Techniciens supérieurs de l'aviation 2016

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OBLIGATOIRE OPTIONNELLE

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.
La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e.
Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $2^2 = -1$.

Question 1

Soient deux suites u et v vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n.$$

A. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$, alors la suite v converge.
B. Si la suite u converge, alors la suite v converge.
C. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$, alors la suite u converge.
D. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Question 2

L'équation réduite de la tangente en -1 à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2}$ est :

A. $3x - 3y + 6 = 0$
A. $y = x + 2$
A. $y = x - 2$
A. $-2x + 2y + 4 = 0$

Question 3

La valeur moyenne M de la fonction $f :\ x \longmapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur $[-1\ ;\ 2]$ est :

A. $M = 3$
B. $M = 5$
C. $M = \dfrac{33}{4}$
D. $M = \dfrac{11}{4}$

Question 4

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est :

A. $F(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
B. $F(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$
C. $F(x) = (-x - 1 + 2\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{-x}$
D. $F(x) = (-x + 1)\mathrm{e}^{-x}$

Question 5

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a\ ;\ b]$.

A. Si pour tout réel x de I , on a $f(x) = g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

B. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout réel x de I , on a $f(x) = g(x)$

C. Si pour tout réel x de I, on a $f(x) < g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

D. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ alors pour tout réel x de 1 , on a $f(x) \geqslant g(x)$

Question 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Soit S l'aire de la surface sous l'arche parabolique, comprise entre la droite d'équation $y = 0$ et la courbe représentative de f.

A. S vaut le tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.
B. S vaut la moitié de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.
C. S vaut les deux tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.
D. S vaut les trois quarts de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

Question 7

Soit $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

A. z^{2013} est un imaginaire pur
B. z^{2014} est un imaginaire pur
C. z^{2015} est un réel
D. z^{2016} est un réel

Question 8

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-8}{z-3} = z$ est

A. $S = \{2 + 2\mathrm{i}\}$
B. $S = 2 - 2\mathrm{i}$
C. $S = 2 + 2\mathrm{i}\ ;\ -2 + 2\mathrm{i}$
D. $S = \emptyset$

Question 9

Soient A, B et O les points d'affixes respectives 1, i et 0. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1| = \left|\overline{z} + \mathrm{i}\right|$ est

A. la droite (AB)
B. la médiatrice du segment [AB]
C. le cercle de centre O et de rayon 1
D. le cercle de diamètre [AB]

Question 10

Soient les points A(2 ; 0 ; 3) et B(−1 ; 2 ; 0), et la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 + 2u \\ y & = & 1 - u \\ z & = & -2 + u \end{array}\right. ,\ u \in \mathbb{R}$$

A. Les droites (AB) et (D) ne sont pas coplanaires
B. Les droites (AB) et (D) sont coplanaires
C. Les droites (AB) et (D) sont sécantes

D. Les droites (AB) et (D) sont parallèles

Question 11

SABDC est une pyramide de base carrée ABDC. Les points I , J et K sont les milieux respectifs des segments [SA], [SB] et BD] , et O désigne le centre du carré ABDC.

A. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\,\overrightarrow{\text{IJ}},\ t \in \mathbb{R}$ est la droite (AD)
B. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{J}M} = u\overrightarrow{\text{SD}},\ u \in \mathbb{R}$. est la droite (JK)
C. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{B}M} = k\overrightarrow{\text{SA}},\ k \in \mathbb{R}$ est la droite (BJ)
D. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{O}M} = x\overrightarrow{\text{SB}} + y\overrightarrow{\text{SC}},\ x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan (ABC)

Question 12

A. Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.
B. Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.
C. Si deux droites de l'espace sont parallèles, elles admettent une droite perpendiculaire à elles deux.
D. Si deux. droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, les trois droites sont coplanaires.

Question 13

Soit X une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3}{8}.$$

Si X suit une loi uniforme sur $[0\,;\,N]$, alors on a :

A. $N = 5,3$
B. $N = 8$
C. $N = \frac{6}{8}$
D. $N = \frac{16}{3}$

Question 14

Soit X une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que :

$$P(1 < X < 3) = \frac{3}{8}.$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

A. $\lambda = -\ln 2$
B. λ prend deux valeurs dont la valeur $\ln 2$
C. $\lambda = \ln\left(\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right)$
D. Il n'existe pas de tel λ.

Question 15

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 8. Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p , alors :

A. $n = 20$ et $p = 0,5$
B. $n = 25$ et $p = 0,4$
C. $n = 40$ et $p = 0,25$
D. $n = 50$ et $p = 0,2$

ÉPREUVE OBLIGATOIRE MATHÉMATIQUES

Questions liées :
1 à 7
8 à 10
12 à 14
17 à 19
20 à 25

PARTIE 1

Nous rappelons que $\text{e}^{\text{i}x} = \cos x + \text{i}\sin x$ où i désigne le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$ et x est un nombre réel.
Si a est un nombre complexe, $|a|$ désigne le module de a et $\arg(a) = \theta\,[2\pi]$ son argument à $2k\pi$ près, k étant un nombre entier relatif.
Autrement dit, $\arg(a) = 0 + 2k\pi$.

On en déduit que :

Question 1 :

1. $\cos x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} + \text{e}^{-\text{i}x}}{2}$
2. $\cos x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} - \text{e}^{-\text{i}x}}{2}$
3. $\cos x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} + \text{e}^{-\text{i}x}}{2\text{i}}$
4. $\cos x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} - \text{e}^{-\text{i}x}}{2\text{i}}$.

Question 2 :

1. $\sin x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} + \text{e}^{-\text{i}x}}{2}$
2. $\sin x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} - \text{e}^{-\text{i}x}}{2}$
3. $\sin x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} + \text{e}^{-\text{i}x}}{2\text{i}}$
4. $\sin x = \dfrac{\text{e}^{\text{i}x} - \text{e}^{-\text{i}x}}{2\text{i}}$.

On démontre alors que :

Question 3 :

1. $1 + \text{e}^{\text{i}x} = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{x}{2}}$
2. $1 + \text{e}^{\text{i}x} = -2\text{i}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{x}{2}}$
3. $1 + \text{e}^{\text{i}x} = 2\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{x}{2}}$
4. $1 + \text{e}^{\text{i}x} = 2\text{i}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{x}{2}}$.

Question 4 :

1. $1 - \text{e}^{\text{i}x} = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{x}{2}}$

2. $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=-2\mathrm{i}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$
3. $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=2\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$
4. $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=2\mathrm{i}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$.

On en déduit que :

Question 5 :

1. $\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1$ et et $\arg\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$
2. $\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=\sqrt{3}$ et et $\arg\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$
3. $\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=\sqrt{3}$ et et $\arg\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$
4. $\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1$ et et $\arg\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

Question 6 :

1. $\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|=2\cos\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
2. $\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|=2\sin\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
3. $\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|=2\sin\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\equiv-\dfrac{3\pi}{8}\quad[2\pi]$
4. $\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|=2\cos\frac{\pi}{8}$ et et $\arg\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\equiv-\dfrac{3\pi}{8}\quad[2\pi]$

Question 7 :

1. $\left|2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right|=4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
2. $\left|2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right|=2\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
3. $\left|2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right|=4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$
4. $\left|2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right|=4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg\left(2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\pi}{8}\quad[2\pi]$.

PARTIE II

Question 8 : l'équation $6x^2-x-1=0$ admet pour solutions les nombres :

1. $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}$
3. $-\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Question 9 : x est solution de l'inéquation $6x^2-x-1>0$ si est seulement si :

1. $x\in\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

2. $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$.
3. $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$.
4. $x \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Question 10 : on choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

1. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{1}{3}$.
2. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{2}{3}$.
3. La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\dfrac{1}{2}$.
4. Avec les données que nous avons, nous ne pouvons pas calculer la probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$.

PARTIE III

A

On considère la suite entière $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

et la suite entière $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

Question 11 : on démontre que :

1. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie pour certaines valeurs de n
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs,
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tous les nombres entiers n.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie pour certaines valeurs de n.

Question 12 : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite :

1. arithmétique de raison : $\dfrac{1}{5}$
2. arithmétique de raison : $\dfrac{4}{5}$
3. géométrique de raison : $\dfrac{4}{5}$
4. géométrique de raison : $\dfrac{1}{5}$

Question 13 : nous avons donc :

1. $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
2. $v_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$
3. $v_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
4. $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

Question 14 : on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car :

1. $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$
2. $u_n = \dfrac{-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$
3. $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 1}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$
4. $u_n = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

B

On considère la suite entière $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{-2n}{n+5}$.

Question 15 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n 2$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Question 16 :on cherche les nombres entiers n qui vérifient : $|u_n + 2| \leqslant 10^{-4}$. On trouve :

1. $n \leqslant 99\,995$
2. $n \geqslant 29\,995$
3. $n \leqslant 9\,995$
4. $n \geqslant 99\,995$.

PARTIE IV

La température de refroidissement d'un objet initialement à la température de 220 °c est une fonction du temps que l'on note $f(t)$, l'unité de temps étant l'heure.
Cette fonction vérifie l'équation différentielle : $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = 10$.
On donne de plus : $\ln(0,15) \approx -1,89$.

Question 17 :

1. La fonction f définie par $f(t) = 400\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.
2. La fonction f définie par $f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.
3. La fonction f définie par $f(t) = 100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

4. La fonction f définie par $f(t) = 300\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

Question 18 : sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

1. La fonction f qui répond au modèle décroît de 220 vers 20.
2. La fonction f qui répond au modèle croît de 0 vers 220 .
3. La fonction f qui répond au modèle est strictement monotone.
4. La fonction f qui répond au modèle et n'est pas strictement monotone.

Question 19 : la température de l'objet est de 50 °C au bout de :

1. 3 heures et 78 minutes, arrondi à la minute par excès
2. 3,78 heures
3. 3 heures et 47 minutes, arrondi à la minute par excès
4. 3,47 heures.

PARTIE V

On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ainsi que les fonctions h et g définies sur l'intervalle $[-1~;~0]$ par $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$ et $g(x) = h(x) - \dfrac{1}{2}x^2$.

Question 20 : sur l'intervalle $[-1~;~0]$:

1. La fonction h est croissante
2. La fonction h est décroissante
3. $h(x) \leqslant 0$
4. $h(x) \geqslant 0$.

Question 21 : on en déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1~;~0]$:

1. La fonction g est croissante.
2. La fonction g est décroissante.
3. $g(x) \leqslant 0$.
4. $g(x) \geqslant 0$.

Question 22 : on déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1~;~0]$:

1. $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
2. $1 + x + x^2 \leqslant \mathrm{e}^x$
3. $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
4. $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x$.

Question 23 : on déduit alors que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0~;~1]$:

1. $1 + x^2 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
2. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x^2$
3. $1 - x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$

4. $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2$.

Question 24 : on déduit aussi que :

1. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$
2. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10}$
3. $\dfrac{4}{3} \leqslant \dfrac{23}{15}$
4. $\dfrac{23}{15} \leqslant I \leqslant \dfrac{5}{3}$.

Question 25 : on en déduit une valeur approchée de I :

1. $I \approx \dfrac{23}{30}$ à + ou $-0,1$ près
2. $I \approx \dfrac{43}{60}$ à + ou $-0,05$ près
3. $I \approx \dfrac{43}{30}$ à + ou $-0,1$ près
4. $I \approx \dfrac{24}{15}$ à + ou $-0,05$ près.