Techniciens supérieurs de l'aviation 2014

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE

QUESTIONS LIÉES

1 à 7
8 à 11
12 à 14
15 à 25

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.

Partie I

En 2013, une forêt possède 10 000 arbres. Dans le but d'entretenir cette forêt vieillissante, l'office chargé de l'entretien décide de supprimer chaque année 5 % des arbres existants en les abattant, et de replanter chaque année 600 arbres.
Soit u_n le nombre d'arbres l'année $2013+n$.

Question 1

On a :

A. $u_0 = 10\,000$
B. $u_0 = 10\,100$
C. $u_1 = 10\,195$
D. $u_1 = 1\,100$

Question 2

La suite u_n est définie par la relation de récurrence :

A. $un+1 = 0,95 \cdot u_n - 600$
B. $un+1 = 0,05 \cdot u_n - 600$
C. $un+1 = 0,95 \cdot u_n + 600$
D. $un+1 = 0,05 \cdot u_n + 600$

Question 3

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 12\,000$. La suite v_n

A. est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = -2\,000$
B. est une suite géométrique de raison $q = 0,05$ et de premier terme $v_0 = 2\,000$
C. est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 2\,000$
D. est une suite géométrique de raison $q = 0,05$ et de premier terme $v_0 = -2\,000$

Question 4

On en déduit :

A. $u_n = 2\,000 \times 0,95^n + 12\,000$
B. $u_n = -2\,000 \times 0,05^n + 12\,000$
C. $u_n = -2\,000 \times 0,95^n + 12\,000$
D. $u_n = 2\,000 \times 0,05^n + 12\,000$

Question 5

La suite u_n est :

A. croissante, majorée par 12 000
B. décroissante, majorée par 12 000
C. décroissante, minorée par 10 000
D. croissante, minorée par 10 000

Question 6

On en déduit :

A. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10\,000$
B. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 9\,000$
C. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12\,000$
D. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 11\,000$

Question 7

En 2020, la forêt comptera M arbres, avec :

A. $M = 2\,000 \times 0,95^7 + 12\,000$
B. $M = 2\,000 \times 0,95^8 + 12\,000$
C. $M = -2\,000 \times 0,05^7 + 12\,000$
D. $M = -2\,000 \times 0,05^8 + 12\,000$

Partie II

À la caisse d'un magasin, le temps d'attente exprimé en secondes d'un client pris au hasard est modélisé par une variable aléatoire T, laquelle suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,008$.

Question 8

La probabilité p_1 que l'attente en caisse d'un client dure moins d'une minute est :

A. $p_1 = 1 - \mathrm{e}^{-0,008}$
B. $p_1 = 0,008 \cdot \mathrm{e}^{-0,008}$
C. $p_1 = 1 - \mathrm{e}^{-0,48}$
D. $p_1 = 0,48 \cdot \mathrm{e}^{-0,48}$

Question 9

La probabilité p_2 que l'attente en caisse d'un client dure plus de 3 minutes est :

A. $p_2 = 1 - \mathrm{e}^{-0,024}$
B. $p_2 = 0,024 \cdot \mathrm{e}^{-0,024}$
C. $p_2 = 1 - \mathrm{e}^{1,44}$
D. $p_2 = \mathrm{e}^{1,44}$

Dans toute la suite, on utilisera 86,64 comme valeur approchée de $125\ln(2)$**.**

Question 10

Le temps d'attente moyen T_0 en caisse est :

A. $T_0 = 125$ min
B. $T_0 = 86$ min 39 s
C. $T_0 = 2$ min 05 s
D. $T_0 = 1$ min 26,64 s

Question 11

Sachant que le temps médian T_1 correspond à $P(t > T_1) = 0,5$, on en déduit :

A. $T_1 = 125$ min
B. $T_1 = 86$ min 39 s
C. $T_1 = 2$ min 05 s
D. $T_1 = 1$ min 26,64 s

Partie III

On se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x$, où y désigne une fonction de la variable x

Question 12

L'équation différentielle homogène (E_0) : $y' + 2y = 0$ admet pour solution générale :

A. $y(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$
B. $y(x) = (2C-1)\mathrm{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$
C. $y(x) = (5C+3)\mathrm{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$
D. $y(x) = -2x + C$, $C \in \mathbb{R}$

Question 13

Une solution particulière de l'équation (E) est $u(x)$, avec

A. $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
B. $u(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
C. $u(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
D. $u(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Question 14

En admettant que toute solution de (E) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + y(x)$, avec $y(x)$ solution de (E_0), la solution φ_0 de (E) vérifiant $\varphi_0(0) = \frac{3}{4}$ est :

A. $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$
B. $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}$
C. $\varphi_0(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$
D. $\varphi_0(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{2x}$

Partie IV

Question 15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}$, de courbe représentative (Γ).

A. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$
B. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-$
C. La fonction f est définie, continue et dérivable uniquement sur R_-^*

D. La fonction f est définie, continue et dérivable uniquement sur R_+^*

Question 16

On a :

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$
D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

Question 17

En admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$, on obtient

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$
C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Question 18

Le calcul de la dérivée de f nous donne

A. $f(x) = -\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$
B. $f'(x) = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2x}$
C. $f'(x) = \dfrac{1}{2} - 2\mathrm{e}^{-2x}$
D. $f'(x) = \left(-x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}$

Question 19

L'équation $f'(x) = 0$ admet pour solution $\overline{x}$, avec

A. $\overline{x} = \dfrac{1}{2}$
B. $\overline{x} = \dfrac{\ln(2)}{2}$
C. $\overline{x} = \ln(2)$
D. $\overline{x} = -\dfrac{1}{2}$

Question 20

A. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$
B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln(2)[$
C. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$
D. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

Question 21

La tangente à (Γ) en O est la droite (T) d'équation

A. $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$
B. $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{4}$

C. $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}$

D. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

Question 22

On considère la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{4}$

A. La courbe (Γ) est au dessous de (D)

B. La courbe (Γ) est au dessus de (D)

C. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in]-\infty\,;\,x_0[$, (Γ) est au dessous de (D) et au dessus sinon

D. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in]-\infty\,;\,x_0[$, (Γ) est au dessus de (D) et au dessous sinon

Question 23

Pour m un nombre réel strictement supérieur à $\ln(2)$, on note $A(m)$ l'aire de la partie de plan délimitée par la courbe (Γ), la droite(D) et les droites d'équation $x = \ln(2)$ et $x = m$. On a :

A. $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x$

B. $A(m) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{m} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x$

C. $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

D. $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}x$

Question 24

On en déduit que :

A. $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[(\ln(2) + m - 1)(\ln(2) - m) + 2\mathrm{e}^{-2m} - \dfrac{1}{2}\right]$

B. $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[(m - 1 + \ln(2))(m - \ln(2)) + \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2m}\right]$

C. $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2} - 2\mathrm{e}^{-2m}\right]$

D. $A(m) = \dfrac{1}{4}[(\ln(2) + m - 1)(\ln(2) - m)]$

Question 25

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

A. $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} A(m) = +\infty$

B. $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} A(m) = -\infty$

C. $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} A(m) = 0$

D. $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} A(m) = \frac{1}{8}$

ÉPREUVE OBLIGATOIRE OPTIONNELLE

Notations

. Les lettres $\mathbb{R}$. et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.
La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e.

Partie I1

On dispose d'une grille à 3 lignes et 3 colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre e_i, enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.
Soient les évènements suivants :

- H : « Les 3 jetons sont alignés horizontalement »,
- V : « Les 3 jetons sont alignés verticalement »,
- D : « Les 3 jetons sont alignés en diagonale »,
- N : « Les 3 jetons ne sont pas alignés ».

Question 1

La probabilité de l'évènement H vaut :
A. $p(H) = \dfrac{1}{27}$
B. $p(H) = \dfrac{1}{28}$
La probabilité de l'évènement V vaut :
C. $p(V) = \dfrac{1}{27}$
D. $p(V) = \dfrac{1}{18}$

Question 2

La probabilité de l'évènement D vaut :
A. $p(D) = \dfrac{1}{42}$
B. $p(D) = \dfrac{1}{63}$
Ainsi, la probabilité de l'évènement N vaut :
C. $P(N) = \dfrac{56}{63}$
D. $p(N) = \dfrac{19}{21}$

On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$ lorsque H ou V est réalisé
- $X = \alpha$ lorsque D est réalisé
- $X = -2$ lorsque N est réalisé

Question 3

La valeur de α pour laquelle l'espérance de X est nulle est :
A. $\alpha = 14$
B. $\alpha = 15$
C. $\alpha = 16$
D. $\alpha = 17$

On se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée : elle place alors le premier jeton dans un des coins de la grille.
Soit Δ l'évènement « la machine M_1 est déréglée ».

Question 4

La probabilité d'avoir IDl alignement horizontal est :

A. $p_\Delta(H) = \dfrac{1}{28}$

B. $p_\Delta(H) = \dfrac{1}{63}$

C. $p_\Delta(H) = \dfrac{9}{112}$

D. $p_\Delta(H) = \dfrac{3}{84}$

Question 5

On a :

A. $p_\Delta(A) = \dfrac{1}{21}$

B. $p_\Delta(A) = \dfrac{3}{28}$

C. $p_\Delta(A) = \dfrac{3}{112}$

D. $p_\Delta(A) = \dfrac{3}{84}$

Dans toute la suite, on suppose que $p(\Delta) = \dfrac{1}{5}$.

Question 6

On a :

A. $p_{\left(\overline{A}\right)}(A) = \dfrac{20}{21}$

B. $p_{\left(\overline{A}\right)}(A) = \dfrac{19}{105}$

C. $p_{\left(\overline{A}\right)}(A) = \dfrac{19}{21}$

D. $p_{\left(\overline{A}\right)}(A) = \dfrac{76}{105}$

On ne sait pas lorsqu'on joue si la machine M_1 est en état de marche. On joue une partie et on constate que les 3 jetons sont alignés.

Question 7

La probabilité p pour que la machine M_1 soit déréglée est alors de :

A. $p = \dfrac{41}{420}$

B. $p = \dfrac{3}{140}$

C. $p = \dfrac{1}{10}$

D. $p = \dfrac{9}{41}$

Partie II

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Question 8

A. La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
B. La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R}_-^*$
C. La fonction f est définie uniquement pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
D. La fonction f est définie uniquement pour $x \in \mathbb{R}_-^*$

Question 9

Le calcul de la dérivée de f donne :

A. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
B. $f'(x) = -\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
C. $f'(x) = -\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
D. $f'(x) = -\left(\dfrac{2x+1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Question 10

A. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$
B. La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]1-\mathrm{e}^{-2}\,;\,1\right[$
C. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
D. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$

Question 11

A. La fonction f est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
B. La fonction f est positive pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right[$, et négative sinon
C. La fonction f est positive pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, et négative pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
D. La fonction f est négative pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, et positive pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

Partie III

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}.$$

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}.$$

Question 12

On a :

A. $u_0 = \mathrm{e}$
B. $u_0 = \dfrac{\ln(1+\mathrm{e})}{2}$
C. $u_0 = 1-\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$
D. $u_0 = \ln(1+\mathrm{e})-\ln(2)$

Question 13

On montre

A. $u_0 + u_1 = 1$
B. $u_0 + u_1 = 1 - \frac{1}{\text{e}}$
C. $u_0 + u_1 = 1 + \text{e}$
D. $u_0 + u_1 = 1 + \frac{1}{\text{e}}$

Question 14

On en déduit :
A. $u_1 = 1 + \ln\left(\frac{\text{e}+1}{2}\right)$
B. $u_1 = 1 - \frac{1}{\text{e}} - \ln\left(\frac{\text{e}+1}{2}\right)$
C. $u_1 = 1 + \text{e} - \ln\left(\frac{\text{e}+1}{2}\right)$
D. $u_1 = 1 + \frac{1}{\text{e}} - \ln\left(\frac{\text{e}+1}{2}\right)$

Question 15

On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

A. La fonction k est positive sur $[0\,;\,1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
B. La fonction k est positive sur $[0\,;\,1]$ et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
C. La fonction k est négative sur $[0\,;\,1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
D. La fonction k est négative sur $[0\,;\,1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante