☙ Concours d'entrée à l'ENAC juin 2018 ❧
Techniciens de l'aéronautique

Cette épreuve comporte 25 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée en première page du sujet.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

À chaque question numérotée entre 1 et 25, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 26 à 100 sont neutralisées).
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :
▹ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, la ligne correspondante doit rester vierge.
▹ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
▹ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
▹ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

Questions liées

3 et 4
5 et 6
8 à 12
13 à 15
16 à 20
21 à 25

PARTIE I

Dans cette partie, i désigne le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$ et $\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z = x + \mathrm{i}y$, $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
Pour $z \in \mathbb{C}$ convenablement choisi, on note $z' = \dfrac{2\overline{z}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$.

Question 1 : z' est un nombre réel si et seulement si :

A. z est imaginaire pur différent de i.

B. z est imaginaire pur.

C. z est réel différent de 1.

D. z est réel.

Question 2 : on montre que :

A. Pour $z \neq -\mathrm{i}$, $\left|z' - 2\right| = \dfrac{2}{|z + \mathrm{i}|}$.

B. Pour $z \neq \mathrm{i}$, $\left|z' - 2\right| = \dfrac{2}{\left|\overline{z} + \mathrm{i}\right|}$

C. Pour $z \neq \mathrm{i}$, $\left|z' - 2\right| = \dfrac{2}{|z - \mathrm{i}|}$

D. Pour $z \neq -\mathrm{i}$, $\left|z' - 2\right| = \dfrac{2}{\left|\overline{z} - \mathrm{i}\right|}$

Question 3 : $\arg\left(z' - 2\right)$ existe pour tout :

A. $z \in \mathbb{C}$

B. $z \in \mathbb{C}/\{\mathrm{i}\}$

C. $z \in \mathbb{C}/\{\mathrm{i},\ 2\}$

D. $z \in \mathbb{C}/\{\mathrm{i},\ 2,\ -\mathrm{i}\}$

Question 4 : lorsque les arguments en question sont définis, on montre que :

A. $\arg\left(z' - 2\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arg(z - \mathrm{i}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $\arg\left(z' - 2\right) = \dfrac{\pi}{2} + \arg(z - \mathrm{i}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $\arg\left(z' - 2\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z + \mathrm{i}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. $\arg\left(z' - 2\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z - \mathrm{i}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Question 5 : une écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{1 - \mathrm{i}}$ est :

A. $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

B. $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

C. $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

D. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

Question 6 : la forme algébrique de $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2024}$ est :

A. $2^{2024}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

B. $2^{2024}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

C. $2^{2023}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

D. $2^{2023}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

Question 7 : on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad z_{\mathrm{A}} = -1-\mathrm{i}\quad \text{et}\quad z_{\mathrm{C}} = -\left(2+\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}.$$

Le triangle ABC est :

A. Rectangle isocèle en A.

B. Isocèle en C.

C. Équilatéral.

D. Rectangle isocèle en B.

PARTIE II

Dans cette partie, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
Dans le cadre des questions 8 à 12, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'expression :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \ln\left(2^n u_n\right) = n.$$

On prendra comme approximation : $\mathrm{e}\approx 2,718$.
Dans le cadre des questions 13 à 15, on considère le nombre réel suivant : $v = 9,999\ldots$ qui s'écrit dans le système décimal de position à l'aide d'un 9, d'une virgule et d'une infinité de 9 après la virgule.
On note $v_0 = 9,\ v_1 = 0,9,\ v_2 = 0,09,\ v_3 = 0,009$, etc.

Question 8 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

A. de raison e et premier terme 2.

B. de raison 2e et premier terme 1.

C. de raison $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ et premier terme 2 .

D. de raison e et premier terme 1.

Question 9 : on en déduit que :

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{2}{1-\mathrm{e}}$

D. $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$

Question 10 : on note : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. On montre alors que :

A. $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{2^{n+1} - \mathrm{e}^{n+1}}{2-\mathrm{e}}$

B. $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times (2^n - \mathrm{e})$

C. $S_n = \dfrac{1}{2^{n1}} \times \dfrac{2^{n+1} - \mathrm{e}^{n+1}}{2-\mathrm{e}}$

D. $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{2^{n+1} - \mathrm{e}^{n+1}}{2-\mathrm{e}}$

Question 11 : on en déduit que :

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{1-\mathrm{e}}$

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$

D. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Question 12 : on montre que :

A. $u_n \geqslant 10^3 \iff n \leqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln \mathrm{e} - \ln 2}$

B. $u_n \geqslant 10^3 \iff n \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln \mathrm{e} - \ln 2}$

C. $u_n \geqslant 10^3 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 3 + \ln 10}{\ln \mathrm{e} - \ln 2}$

D. $u_n \geqslant 10^3 \iff n \leqslant \dfrac{\ln 3 + \ln 10}{\ln \mathrm{e} - \ln 2}$

Question 13 : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

A. De raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $v_0 = 9$.

B. De raison $\dfrac{9}{10}$ et de premier terme $v_0 = 9$.

C. De raison $0,1$ et de premier terme $v_0 = 9$.

D. De raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = 9$.

Question 14 : on déduit alors que :

A. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \dfrac{9}{10^n}$

B. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 1 - \dfrac{1}{10^{n-1}}$

C. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 9 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$

D. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 10 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$

Question 15 : et ainsi :

A. $v = 9$

B. $v = 0$

C. $v = 10$

D. $v = 1$

PARTIE III

Question 16 : on donne le polynôme $P(X) = 2X^3 + 11X^2 - 20X + 7$. On démontre que :

A. $P(X) = (X+1)\left(2X^2 + 13X - 7\right)$

B. $P(X) = (X+1)\left(2X^2 - 13X - 7\right)$

C. $P(X) = (X-1)\left(2X^2 - 13X - 7\right)$

D. $P(X) = (X-1)\left(2X^2 + 13X - 7\right)$

Question 17 : l'égalité est vraie :

A. $13^2 = 10^2 + 3^2$

B. $13^2 = 10^2 + 60 + 3^2$

C. $15^2 = 225$

D. $15^2 = 125$

Question 18 : dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels, l'ensemble S_1 des solutions de l'équation

$$(E_1) \qquad 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7 = 0 \text{ est :}$$

A. $S_1 = \left\{\dfrac{1}{2} ; -1 ; -7\right\}$

B. $S_1 = \left\{\dfrac{1}{2} ; 1 ; -7\right\}$

C. $S_1 = \left\{\dfrac{1}{2} ; 1 ; 7\right\}$

D. $S_1 = \left\{-\dfrac{1}{2} ; 1 ; 7\right\}$

Question 19 : dans $\mathbb{R}_+^*$, ensemble des nombres réels strictement positifs, l'ensemble S_2 des solutions de l'équation

$$(E_2) \qquad 2(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 - 20\ln x + 7 = 0 \text{ est :}$$

A. $S_2 = \left\{\mathrm{e} ; \mathrm{e}^{-7} ; \sqrt{\mathrm{e}}\right\}$

B. $S_2 = \left\{\mathrm{e}^{-1} ; \mathrm{e}^{-7} ; \sqrt{\mathrm{e}}\right\}$

C. $S_2 = \left\{\mathrm{e} ; \mathrm{e}^{7} ; \sqrt{\mathrm{e}}\right\}$

D. $S_2 = \left\{\mathrm{e} ; \mathrm{e}^{7} ; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right\}$

Question 20 : dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels, l'ensemble S_3 des solutions de l'équation

$$(E_3) \qquad 2\mathrm{e}^{3x} + 11\mathrm{e}^{2x} - 20\mathrm{e}^{x} + 7 = 0 \text{ est :}$$

A. $S_3 = \left\{0\ ;\ -\ln 2\ ;\ \mathrm{e}^{-7}\right\}$

B. $S_3 = \{-\ln 2\}$

C. $S_3 = \{0\ ;\ -\ln 2\}$

D. $S_3 = \{0\ ;\ -\ln 2\ ;\ -\ln 7\}$

PARTIE IV

On donne les équations différentielles (F), (G) et (G_0) suivantes :

$$(F)\ y'' + 4y = 0. \quad (G)\ y' + y = 2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad (G_0)\ y' + y = 0 \text{ où :}$$

y , y' et y'' désignent respectivement une fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde.
On **admet** que l'ensemble des solutions de l'équation (G) est l'ensemble des fonctions h qui s'écrivent sous la forme $h = g + g_0$ où g désigne une solution particulière de l'équation (G) et g_0 la forme générale des solutions de l'équation (G_0).

Question 21 : la fonction f solution d'équation différentielle (F) satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$ est définie par l'expression :

A. $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$

B. $f(x) = \sqrt{3}\cos(4x) + \sin(4x)$

C. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

D. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\sin(4x)$

Question 22 : pour tout nombre réel x, nous avons :

A. $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

D. $f(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Question 23 : pour $x \in [0\ ;\ 2\pi[$, l'équation $f(x) = 0$ admet pour ensemble de solutions :

A. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

B. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

C. $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

D. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Question 24 :

A. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\text{e}^{-x}$ est solution de l'équation (G).

B. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\text{e}^{-x}$ est solution de l'équation (G).

C. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\text{e}^{-x}$ est solution de l'équation (G).

D. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x\text{e}^{-x}$ est solution de l'équation (G).

Question 25 : la solution h de l'équation (G) qui vérifie la condition initiale $h(0) = -1$ s'écrit :

A. $h(x) = (2x+1)\text{e}^{-x}$

B. $h(x) = 2x\text{e}^{-x} + \text{e}^{x}$

C. $h(x) = (2x-1)\text{e}^{-x}$

D. $h(x) = 2x\text{e}^{-x} - \text{e}^{x}$