∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2018 ∽
Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 3
4 à 7
8 à 11
12 à 15

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres complexes. La lettre e désigne la constante de Neper et l'application que à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e. Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$.

Partie 1

Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge en mois auquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez un enfant pris au hasard dans la population peut se modéliser par une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(11,5\ ;\ 16)$.
On donne, pour une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite :

- $P(X < 2) \approx 0,977$
- $P(X < 0,5) \approx 0,691$
- $P(X < 0,125) \approx 0,550$
- $P(X < 0{,}03125) \approx 0,512$

Question 1

La probabilité p_1 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots avant ses 9 mois et demi est d'environ :
A. $p_1 \approx 0,050$
B. $p_1 \approx 0,191$
C. $p_1 \approx 0,309$
D. $p_1 \approx 0,450$

Question 2

La probabilité p_2 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots dans le cours de son 12^{e} mois est d'environ :
A. $p_2 \approx 0,010$
B. $p_2 \approx 0,024$
C. $p_2 \approx 0,512$

D. $p_2 \approx 0,550$

Question 3

La probabilité p_3 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots après l'âge de 19 mois et demi est d'environ :
A. $p_3 \approx 0,023$
B. $p_3 \approx 0,309$
C. $p_3 \approx 0,691$
D. $p_3 \approx 0,977$

Partie II

On considère sur $[0 ; 2\pi]$ les courbes $\mathscr{C}$ d'équation $y = \text{e}^{-x}$, $\mathscr{C}'$ d'équation $y = -\text{e}^{-x}$ et la courbe Γ représentant la fonction f définie par $f(x) = \text{e}^{-x}\sin x$.

Question 4

Les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et Γ vérifient :

A. La courbe Γ est au-dessous de $\mathscr{C}$, et $\mathscr{C}'$.
B. La courbe Γ est au-dessus de $\mathscr{C}$, et $\mathscr{C}'$
C. La courbe Γ est au-dessus de $\mathscr{C}'$, mais oscille autour de $\mathscr{C}$
D. La courbe Γ est au-dessous de $\mathscr{C}$, mais oscille autour de $\mathscr{C}'$

Question 5

La dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; 2\pi]$ peut s'écrire :
A. $f'(x) = -\text{e}^{-x}\cos x$
B. $f'(x) = \text{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$
C. $f'(x) = -\text{e}^{-x}(\cos x + \sin x)$
D. $f'(x) = \sqrt{2}\text{e}^{-x}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Question 6

La courbe Γ touche $\mathscr{C}$ au point d'abscisse :
A. $x = \dfrac{\pi}{2}$
B. $x = \pi$
C. $x = \dfrac{3\pi}{2}$
D. $x = 2\pi$

Question 7

La tangente à Γ en ce point de contact admet pour équation :
A. $y = -\text{e}^{-\pi}x + \pi\text{e}^{-\pi}$
B. $y = -\text{e}^{-\frac{\pi}{2}}x + \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)\text{e}^{\frac{\pi}{2}}$
C. $y = \text{e}^{-2\pi}(x - 2\pi)$
D. $y = \text{e}^{-\frac{3\pi}{2}}\left(x - 1 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Partie III

On souhaite étudier une modélisation d'une tour de contrôle aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. L'unité sur chaque axe est 1 km.
Le plan $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ représente le sol. Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites D_1 et D_2 dont on connaît des représentations paramétriques :

$$D_1 : \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 3+a\\ y &=& 9+3a\\ z &=& 2\end{array}\right., a \in \mathbb{R} \quad ; \quad D_2 : \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 0,5+2b\\ y &=& 4+b\\ z &=& 4-b\end{array}\right., b \in \mathbb{R}.$$

Question 8

Les droites D_1 et D_2 :
A. sont parallèles,
B. sont sécantes,
C. sont coplanaires,
D. sont non coplanaires.

Question 9

On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3\,;\,4\,;\,0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R).
Un technicien souhaite savoir s'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites D_1 et D_2.
Le point S vérifie :

A. $S \in D_1$
B. $S \in D_2$
C. $S \in (R)$
D. S n'appartient à aucune de ces droites.

Question 10

Soit P_1 le plan contenant S et D_1 et P_2 le plan contenant S et D_2. Les plans P_1 et P_2 se coupent selon la droite Δ.

A. Les droites D_1 et Δ sont sécantes.
B. Les droites D_1 et Δ sont parallèles.
C. Les droites D_2 et Δ sont sécantes.
D. Les droites D_2 et Δ sont parallèles.

Question 11

Les droites (R) et Δ :

A. ont un unique point d'intersection en S.
B. se coupent en un point distinct de S.
C. sont confondues.
D. sont parallèles distinctes.

Partie IV

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$ et n un entier naturel non nul. On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète cette épreuve de façon identique et indépendante au maximum n fois et on s'arrête à la réalisation du premier succès. La variable aléatoire X prend :

- la valeur 0 si aucun succès n'a été rencontré,
- la valeur k si le premier succès est rencontré lors de la k-ième répétition pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Question 12

On montre que :

A. $P(X=0) = p^n$
B. $p(X=0) = (1-p)^n$
C. $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
D. $P(X=k) = p^k(1-p)^{n-k}$

Question 13

L'espérance mathématique $E(X)$ de X s'écrit :
A. $E(X) = np$
B. $E(X) = n(1-p)$
C. $E(X) = np(1-p)$
D. $E(X) = p\left(1+2(1-p)+3(1-p)^2+\ldots+n(1-p)^{n-1}\right)$

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

Question 14

$E(X)$ vérifie :

A. $E(X) = f(p)$
B. $E(X) = f(1-p)$
C. $E(X) = pf'(1-p)$
D. $E(X) = (1-p)f'(p)$

Question 15

On montre ainsi, que pour $x \neq 1$ et $0 < p < 1$:

A. $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
B. $f(x) = \dfrac{1-x^n(1+n-nx)}{(1-x)^2}$
C. $E(X) = \dfrac{1}{1-p} - \dfrac{p^n}{1-p} - np^n$
D. $E(X) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}(1-p)^n - n(1-p)^n$