∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2009 ∾

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 8
10 à 9
20 à 23
24 et 25

PARTIE 1

On considère une suite géométrique (u_n), n entier positif ou nul, de premier terme u_0 et de raison q telle que $243u_7 = 32u_2$, u_2 étant supposé non nul.

Question 1 :
Pour tout n entier positif ou nul on a

A. $u_n = u_0 + nq$
B. $u_n = u_0q^n$
C. $u_n = u_0nq$
D. $u_n = u_0 + q^n$

Question 2 :
On a

A. $u_7 = u_2 + 5q$
B. $u_7 = 5u_2q$
C. $u_7 = u_+q$
D. $u_7 = u_2q^7$

Question 3 :
On en déduit que la raison q de cette suite géométrique est égale à

A. $32/1\,215$
B. $3/2$
C. $2/3$
D. $(32/243)^{1/5}$

Question 4 :
De manière générale, pour une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0, la somme $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$ est donnée, pour tout n entier strictement positif, par la formule

A. $S_n = v_0\left(q^{n+1}-1\right)/(q-1)$ pour q différent de 1
B. $S_n = n\left(v_0+(n+1)(q/2)\right)+v_0$

C. $S_n = v_0\left(1-q^n\right)/(1-q)$ pour q différent de 1
D. $S_n = v_0 + v_1\left(1-q^n\right)/(1-q)$ pour q différent de 1

Question 5 :
On suppose, si cela est possible, que la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n), n entier positif ou nul, tend vers 3^{11} lorsque n tend vers l'infini. On a

A. cette condition ne peut être réalisée car S_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, la raison q de la suite (u_n) étant strictement supérieure à 1.
B. $u_0 = 3^{10}$
C. $u_0 = -(1/2)3^{11}$
D. $u_0 = 3^9$

Question 6 :
Soient n et p deux entiers positifs ou nuls tels que p est inférieur ou égal à n. Le produit des deux termes u_p et u_{n-p} de la suite géométrique (u_n)

A. ne dépend que de n
B. ne dépend que de p
C. est égal à $q^n\,(u_0)^2$
D. est égal à $q^{n-p}\,u_p = q^n\,u_0$

Question 7 :
On note P_n le produit des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n), n entier positif ou nul, $P_n = u_0u_1\dots u_n$. On a

A. $(P_n)^2 = (u_0)^{n+1}\,q^{n(n+1)}$
B. $(P_n)^2 = (u_0)^{2(n+1)}\,q^{n(n+1)}$
C. $(P_n)^2 = (u_0)^2\,q^{n(n+1)}$
D. $(P_n)^2 = \left(u_0+q\right)^{2(n+l)}$

Question 8 :
On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier positif ou nul par $w_n = n$ et on note W_n la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite (w_n), n entier positif ou nul. On a

A. (w_n) est une suite arithmétique de raison 1
B. (w_n) est une suite géométrique de raison 1
C. $P_n = (u_0)^{n+1}\,q^{W_n}$ avec $W_n = n(n+1)$ et $u_0 = 3^{10}$
D. $P_n = (u_0)^{n+1}\,q^{W_n}$ avec $W_n = n(n+1)/2$ et $u_= 3^{10}$.

PARTIE II

On considère le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl}(5-2x)/3)+((3-y)/2) & = & 3\\ ((5y+y)/6)-((3-2x)/5 & = & 0.\end{array}\right.$$

Question 9 :
Le système a pour solution

A. les couples $(x,\ y)$ solutions du système $\begin{cases} (5-2x+3-y)/5 & = & 3 \\ 5+y-3+2x)/11 & = & 0. \end{cases}$

B. les couples $(x,\ y)$ solutions du système $\begin{cases} 8-2x-y & = & 18 \\ 2+y+2x & = & 0 \end{cases}$

C. les couples $(x,\ y)$ solutions du système $\begin{cases} 4x+3y & = & -1 \\ 12x+5y & = & -7 \end{cases}$

D. le couple $(x,\ y) = (-13/8,\ 5/2)$

PARTIE III

On considère les fonctions f et g définies sur $I =]-\infty\ ;\ +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) & = & (x-1)\mathrm{e}^x+1 \\ g(x) & = & (x-2)\mathrm{e}^x+x-2 \end{cases}$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et g' la fonction dérivée de la fonction g.

Question 10 :
On a

A. $f'(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout x réel
B. $f'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$ pour tout x réel supérieur ou égal à 1 et f' n'est pas définie pour x inférieur ou égal à 1
C. $f'(x) = x\mathrm{e}^x + 1$ pour tout x réel
D. $f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ pour tout x réel

Question 11 :
La fonction f'

A. ne s'annule pas car la fonction exponentielle est strictement positive sur I
B. s'annule uniquement pour $x = 0$
C. s'annule en deux points de I
D. s'annule en un point de l'intervalle $]O\ ;\ +\infty[$.

Question 12 :
La fonction f est

A. décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
B. croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ **C.** décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$
D. croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ car f' est positive sur I

Question 13 :
La fonction f

A. admet un minimum au point $x = 1$
B. admet un minimum au point $x = 0$
C. n'admet pas de maximum dans I
D. n'admet pas d'extremum dans I

Question 14 :
La fonction f

A. est positive sur 1 car elle s'annule au point $x = 1$
B. est négative sur 1 car elle s'annule au point $x = 0$
C. n'est pas de signe constant sur I
D. est positive sur I car elle a un minimum égal à 0 au point $x = 0$.

Question 15 :
La fonction g' vérifie

A. $g'(x) = f(x)$ pour tout x appartenant à I
B. $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ pour tout x appartenant à I
C. $g'(x) = (x-3)\mathrm{e}^x - 1$ pour tout x appartenant à I
D. $g'(x) = f(x)$ uniquement sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$

Question 16 :
La fonction g

A. est décroissante sur I
B. n'est croissante sur aucun intervalle de $]-\infty\ ;\ +\infty[$
C. est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$
D. est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

Question 17 :
On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal. La courbe $\mathscr{C}_g$

A. admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 1$ car $g'(1) = 0$
B. n'admet pas de tangente horizontale
C. admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 0$ car $g(0) = 0$
D. admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x-2$ au point d'abscisse $x = 1$ car $f(1) = 1$.

Question 18 :
Soit m un réel fixé. On note h la fonction définie sur I par

$$h(x) = (x-2)\mathrm{e}^x - m - 2.$$

La fonction h

A. est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
B. est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
C. admet un minimum égal à $(-m-4)$ au point $x = 0$
D. admet un minimum égal à $(-m-2-\mathrm{e})$ au point $x = 1$.

Question 19 :
m étant toujours un réel fixé, on désigne par D_m la droite d'équation $y = x + m$

A. il n'existe aucun réel m tel que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe la droite D_m
B. pour m strictement inférieur à $(-2-\mathrm{e})$ la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite D_m n'ont aucun point d'intersection
C. pour m strictement supérieur à $(-2-\mathrm{e})$ la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite D_m se coupent en deux points
D. pour m strictement inférieur à $(-2-\mathrm{e})$ la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite D_m se coupent en deux points.

PARTIE IV

On désigne par J l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On considère la fonction f définie sur J par

$$f(x) = \frac{(1+\mathrm{e}^x)}{(1-\mathrm{e}^x)}$$

et la fonction g définie sur J par

$$g(x) = x - \ln\left[\left(1-\mathrm{e}^x\right)^2\right]$$

ln désignant la fonction logarithme népérien.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et g' la fonction dérivée de la fonction g.

Question 20 :
Pour tout x réel strictement positif, on a, d'après les propriétés du logarithme népérien

A. $g(x) = x - 2\ln(1-\mathrm{e}^x)$
B. $g(x) = x - [\ln(1-\mathrm{e}^x)]^2$
C. $g(x) = x + 2\ln\left[\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}\right]$
D. $g(x) = \dfrac{x}{\ln(1-\mathrm{e}^x)^2}$

Question 21 :
Pour tout x réel strictement positif, la fonction dérivée g' est définie par

A. $g'(x) = 1 - 2\dfrac{-\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)}$
B. $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{1-\mathrm{e}^x}$
C. $g'(x) = f(x)$
D. $g'(x) = -f(x)$

Question 22 :
Pour tout x réel strictement positif, la fonction dérivée f' est définie par

A. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{-\mathrm{e}^x}$
B. $f'(x) = -\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$
C. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$
D. $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$

Question 23 :
Soit $[a\,;\,b]$ un intervalle où a et b sont tels que $b > a > 0$. La fonction g

A. est croissante sur J car f admet un minimum strictement positif sur J
B. est décroissante sur $[a\,;\,b]$ car f est croissante et négative en $x = b$
C. est décroissante sur $[a\,;\,b]$ car f est décroissante et négative en $x = a$
D. admet un minimum sur $[a\,;\,b]$ en un point x_0 tel que x_0 est strictement supérieur à a et strictement inférieur à b.

PARTIE V

Une étude est réalisée sur un échantillon représentatif de la population composé de 1 500 personnes. Deux questions sont posées.
À la première question « Connaissez-vous le commerce équitable ? », 500 personnes répondent oui et 1 000 répondent non.
À la deuxième question « Connaissez-vous le label AB ? », on obtient les résultats suivants :

— parmi les personnes connaissant le commerce équitable, 450 d'entre elles connaissent le label AB

— parmi les personnes ne connaissant pas le commerce équitable, 520 d'entre elles connaissent le label AB.

On interroge au hasard une de ces 1 500 personnes et on considère les évènements C et D suivants :

C : « la personne interrogée connait le label AB »

D : « la personne interrogée connait le commerce équitable »

$p(C)$ (respectivement $p(D)$) désigne la probabilité de l'évènement C (respectivement de D).
On note $\overline{D}$ l' évènement contraire de l'évènement D et on désigne par $p_D(C)$ la probabilité de l'évènement C sachant D.

Question 24 :
On a

A. $p(D) = 1/3$ et $p\left(\overline{D}\right) = 1 - p(D) = 2/3$
B. $p_D(C) = 0,52$ et $p_D\left(\overline{C}\right) = 1 - p_D(C) = 0,48$
C. $p_D(C) = 0,9$ et $p_D\left(\overline{C}\right) = 1 - p_D(C) = 0,1$
D. $p_D(C) = p(D)/p(C \cap D)$

Question 25 :
On a

A. $p(C) = p(C \cap D) = 0,3$
B. $p(C) = p(C \cap D) + p\left(C \cap \overline{D}\right) = \dfrac{1,94}{3}$ d'après la formule des probabilités totales, les évènements étant incompatibles
C. les évènements C et D sont indépendants
D. les évènements C et D ne sont pas indépendants car deux évènements Cet D sont indépendants si $p(C \cap D) = 0$, condition qui n'est pas vérifiée