∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2015 ∽

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 7

8 à 11

12 à 15

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.

La lettre e désigne la constante de Néper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e.

Partie 1

On dispose d'une grille à 3 lignes et 3 colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

Soient les évènements suivants :

- H : « Les 3 jetons sont alignés horizontalement »,
- V : « Les 3 jetons sont alignés verticalement »,
- D : « Les 3 jetons sont alignés en diagonale »,
- N : « Les 3 jetons ne sont pas alignés ».

Question 1 :

La probabilité de l'évènement H vaut :

A. $p(H) = \dfrac{1}{27}$

B. $p(H) = \dfrac{1}{28}$

La probabilité de l'évènement V vaut :

C. $p(V) = \dfrac{1}{27}$

D. $p(V) = \dfrac{1}{18}$

Question 2 :

La probabilité de l'évènement D vaut :

A. $p(D) = \dfrac{1}{42}$

B. $p(D) = \dfrac{1}{63}$

Ainsi, la probabilité de l'évènement N vaut :

C. $p(N) = \dfrac{56}{63}$

D. $p(N) = \dfrac{19}{21}$

On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$ lorsque H ou V est réalisé
- $X = \alpha$ lorsque D est réalisé
- $X = -2$ lorsque N est réalisé

Question 3 :

La valeur de α pour laquelle l'espérance de X est nulle est :

A. $\alpha = 14$

B. $\alpha = 15$

C. $\alpha = 16$

D. $\alpha = 17$

On se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée : elle place alors le premier jeton dans un des coins de la grille.

Soit Δ l'évènement « la machine M_1 est déréglée ».

Question 4 :

La probabilité d'avoir un alignement horizontal est :

A. $p_\delta(H) = \dfrac{1}{28}$

B. $p_\delta(H) = \dfrac{1}{63}$

C. $p_\delta(H) = \dfrac{9}{112}$

D. $p_\delta(H) = \dfrac{3}{84}$

Soit A l'évènement « les 3 jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ».

Question 5 :

On a :

A. $p_\delta(A) = \dfrac{1}{21}$

B. $p_\delta(A) = \dfrac{1}{28}$

C. $p_\delta(A) = \dfrac{3}{112}$

D. $p_\delta(A) = \dfrac{3}{84}$

Dans toute la suite, on suppose que $p(\Delta) = \dfrac{1}{5}$.

Question 6 :

On a :

A. $p_\Delta\left(\overline{A}\right) = \dfrac{20}{21}$

B. $p_\Delta\left(\overline{A}\right) = \dfrac{19}{105}$

C. $p_\Delta\left(\overline{A}\right) = \dfrac{v}{21}$

D. $p_\Delta\left(\overline{A}\right) = \dfrac{76}{105}$

On ne sait pas lorsqu'on joue si la machine M_1 est en état de marche. On joue une partie et on constate que les 3 jetons sont alignés.

Question 7 :

La probabilité p pour que la machine M_1 soit déréglée est alors de :

A. $p = \dfrac{41}{420}$
B. $p = \dfrac{3}{140}$
C. $p = \dfrac{1}{10}$
D. $p = \dfrac{9}{41}$

Partie II

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1$.

Question 8 :

A. La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

B. La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R}_-^*$

C. La fonction f est définie uniquement pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

D. La fonction f est définie uniquement pour $x \in \mathbb{R}_-^*$

Question 9 :

Le calcul de la dérivée de f donne :

A. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
B. $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
C. $f'(x) = -\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
D. $f'(x) = -\left(\dfrac{2x+1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Question 10 :

A. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

B. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]1-\mathrm{e}^{-2}\ ;\ 1[$

C. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

D. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$

Question 11 :

A. La fonction f est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

B. La fonction f est positive pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right[$,et négative sinon

C. La fonction f est positive pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, et négative pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

D. La fonction f est négative pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, et positive pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

Partie III

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}$$

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Question 12 :

On a :

A. $u_0 = \mathrm{e}$

B. $u_0 = \dfrac{\ln(1+\mathrm{e})}{2}$

C. $u_0 = 1 - \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

D. $u_0 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln(2)$

Question 13 :

On montre

A. $u_0 + u_1 = 1$

B. $u_0 + u_1 = 1 - \dfrac{1}{\text{e}}$

C. $u_0 + u_1 = 1 + \text{e}$

D. $u_0 + u_1 = 1 + \dfrac{1}{\text{e}}$

Question 14 :

On en déduit :

A. $u_1 = 1 + \ln\left(\dfrac{\text{e}+1}{2}\right)$

B. $u_1 = 1 - \dfrac{1}{\text{e}} - \ln\left(\dfrac{\text{e}+1}{2}\right)$

C. $u_1 = 1 + \text{e} - \ln\left(\dfrac{\text{e}+1}{2}\right)$

D. $u_1 = 1 + \dfrac{1}{\text{e}} - \ln\left(\dfrac{\text{e}+1}{2}\right)$

Question 15 :

On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

A. La fonction k est positive sur $[0;1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

B. La fonction k est positive sur $[0;1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

C. La fonction k est négative sur $[0;1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

D. La fonction k est négative sur $[0;1]$, et de ce fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante