Techniciens supérieurs de l'aviation 2011

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Question liées :

1 et 2

4 à 8

9 à 13

PARTIE I

On désigne par e, la fonction exponentielle, par e^x l'image de x par cette fonction et par f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I.

1. On a

A. Pour tous les réels a et b, $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$

B. Pour tous les réels a et b, $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b$

C. La droite d'équation $y = x+\mathrm{e}$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1

D. La droite d' équation $y = \mathrm{e}x$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1

2. Soit a un point de l'intervalle I, on a

A. Pour que f soit continue en a il est nécessaire que f soit dérivable en ce point

B. Pour que f soit dérivable en a il est nécessaire que f soit continue en ce point

C. La fonction e est dérivable en a mais n'est pas nécessairement continue en ce point

D. Si f est dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h)-f(h)}{h}$ a une limite finie, égale à $f'(a)$, lorsque h tend vers 0

PARTIE II

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$

3. * désignant la multiplication, on a

A. Pour que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge il suffit que les suites (u_n) et (u_n) convergent

B. Pour que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge il est nécessaire que les suites (u_n) et (u_n) convergent

C. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers 0

D. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour que la suite $(u_n * v_n)$ converge il suffit que la suite (u_n) converge vers 0

PARTIE III

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n.$$

On désigne par A_n le point d'affixe le complexe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$, où $|z_n|$ désigne le module du complexe z_n.

4. Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point

A. A_3 vérifient $x = \dfrac{1}{2} = -y$

B. A_3 vérifient $x = -\dfrac{1}{2} = y$

C. A_4 vérifient $x = -\dfrac{1}{2} = -y$

D. A_4 vérifient $x = 0$ et $y = -1$

5. La suite (u_n)

A. est une suite géométrique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 2$ car $|1+\mathrm{i}| = 2$

B. est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0 = 2$ car $|1+\mathrm{i}|^2 = 2$

C. vérifie, pour tout n entier naturel, $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{2^n}}$

D. est une suite géométrique convergente et de limite nulle car sa raison est positive et strictement inférieure à 1

6. On note D le disque fermé de centre O et de rayon 0,1. Le point A_n appartient à D

A. si et seulement si $u_n^2 \leqslant 0,1$

B. si et seulement si n est supérieur ou égal à $\dfrac{2\ln 10}{\ln 2}$

C. si et seulement si n est un entier supérieur ou égal à $\dfrac{2\ln 20}{\ln 2}$

D. si et seulement si n est égal à $\dfrac{2\ln 20}{\ln 2}$

7. Pour tout entier naturel n, $Z_n = \dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$, on a

A. Z_n a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ car $Z_n = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})} = \mathrm{i}$

B. Z_n a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ car $Z_n = \dfrac{(-1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})}$

C. le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_n

D. le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}

8. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$, on a

A. $\ell_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\ell_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

C. la suite (ℓ_n) diverge

D. la suite (ℓ_n) converge vers $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ car $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2^n}-1}{\sqrt{2^{n-1}}\left(\sqrt{2}-1\right)}$

PARTIE IV

On considère les équations différentielles

$(E)\quad y' = \dfrac{1}{10}y - \dfrac{3}{10}$ et $(F)\quad z' = -\dfrac{1}{10}z(3-\ln z)$.

On désigne par f, une fonction dérivable strictement positive sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ et par g, la fonction définie sur I par $g(t) = \ln(f(t))$.

On note exp la fonction exponentielle

9. L'équation différentielle (E) a pour solution générale

A. La fonction z qui à x associe $z(x) = C\exp\left(\dfrac{x}{10}\right)$ où C est un réel quelconque

B. La fonction z qui à x associe $z(x) = 3 + C\exp\left(\dfrac{x}{10}\right)$ où C est un réel quelconque

C. La fonction z qui à x associe $z(x) = \dfrac{3}{10} + C\exp\left(\dfrac{x}{10}\right)$ où C est un réel quelconque

D. La fonction z qui à x associe $z(x) = 3 + \exp\left(\dfrac{x}{10}\right)$

10. La fonction g

A. n'est dérivable que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

B. est dérivable sur l'intervalle I car la fonction ln est dérivable sur I

C. a pour dérivée $g'(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ pour tout t appartenant à I

D. a pour dérivée $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ pour tout t appartenant à I

11. On a

A. La fonction f vérifie l'équation différentielle (F) sur I si et seulement si la fonction g vérifie r équation différentielle (E) sur I

B. La fonction f vérifie l'équation différentielle (E) sur I si et seulement si la fonction g vérifie l'équation différentielle (F) sur I

C. La fonction f vérifie l'équation différentielle (E) sur I si et seulement si il existe un réel K tel que pour tout t appartenant à I, $f(t) = \exp\left(3 + K\exp\left(\dfrac{t}{10}\right)\right)$

D. La fonction f vérifie l'équation différentielle (E) sur I si et seulement si pour tout t appartenant à I, $f(t) = \exp\left(3 + \exp\left(\dfrac{t}{10}\right)\right)$

12. On suppose dorénavant que la fonction f prend la valeur 1 au point $t = 0$. On a alors

A. $f(x) = \exp\left(3 + 3\exp\left(\dfrac{x}{10}\right)\right)$ pour tout x appartenant àI

B. $f(x) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\dfrac{x}{10}\right)\right)$ pour tout x appartenant à I

C. $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ car $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

D. $f(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ car $\exp(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$

13. La fonction f

A. est strictement croissante sur I

B. est décroissante puis croissante sur I

C. est croissante puis décroissante sur I

D. est strictement décroissante sur I

PARTIE V

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $J =]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

14. La fonction h

A. a pour dérivée $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ pour tout x appartenant à J

B. a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ pour tout x appartenant à J

C. est décroissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$ et croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ car la fonction $H(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ est croissante sur J et nulle au point $x = 0$

D. est décroissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$ et croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ car la fonction $H(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ est croissante sur J et nulle au point $x = 0$.

PARTIE VI

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note L l'intégrale de la fonction f sur le segment $[1\ ;\ \text{e}]$ et M l'intégrale de g sur ce même segment $[1\ ;\ \text{e}]$

15. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = \text{e}$ et les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On obtient

A. par une intégration par parties, $M = \text{e} - L$ et $L = 1$ car $x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$

B. par une intégration par parties, $M = \text{e} - 2L$ et $L = 1$ car $x\ln x + x$ est une primitive de $\ln x$

C. $A = L - M = 3 - \text{e}$

D. $A = M + L = \text{e} - 1$