Techniciens supérieurs de l'aviation 2010

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Question liées entres elles :

1 à 6

7 à 11

12 à 13

Exercice 1 Des probabilités

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul. On jette n fois une pièce de monnaie qui fait apparaître le coté « pile » avec une probabilité de p $(0 < p < 1)$.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de « piles » obtenus au cours des n lancers. Y est la variable aléatoire égale au numéro du lancer pour lequel on obtient le premier pile, si un pile est obtenu lors des n lancers, et qui vaut 0 sinon.

Question 1 : À propos de la variable aléatoire X.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

A. X prend ses valeurs dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots,\ n\}$

B. Pour k un entier tel que $0 \leqslant k, \leqslant n,\ P(X = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$

C. Pour k un entier tel que $0 \leqslant k,\ P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

D. L'espérance mathématique de X est $np(1-p)$

Question 2 : À propos de la variable aléatoire Y.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

A. Y prend ses valeurs dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots,\ n\}$

B. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k, \leqslant n,\ P(Y = k) = (1-p)^{k-1}p$

C. $P(Y = 0) = (1-p)^n$

D. $P(Y = 0) = p^n$

Question 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de raison r un réel.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

A. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\dfrac{1-r^n}{1-r}$ si $r \neq 1$

B. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\dfrac{1-r^{n-1}}{1-r}$ si $r \neq 1$

C. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n-1$ si $r = 1$

D. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = nu_1$ si $r = 1$.

Question 4 : Les résultats de la question 3 permettent d'affirmer que :

A. $P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = n) = 1$

B. $P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = n) = (1-p)^n$

C. $P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = n) = p^n$

D. $P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = n) = 0$

Question 5 : Dans la suite de cet exercice on choisira n et p tels que np soit un entier naturel non nul.
Pour tout entier $k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$, on pose $m(k) = \dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$.
On peut alors dire que :

A. $m(k) = \dfrac{(n-k)(1-p)}{(k+1)p}$

B. $m(k) = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$

C. $m(k) > 1$ si et seulement si $k \leqslant np - 1$

D. $m(k) > 1$ si et seulement si $k < np - 1$

Question 6 : Les résultats de la question précédente permettent donc d'affirmer que :

A. $P(X = k)$ est maximal pour $k = np$

B. $P(X = k)$ est maximal pour $k = np - 1$

C. $P(X = k)$ est minimal pour $k = np$

D. $P(X = k)$ est minimal pour $k = np - 1$

Exercice 2 : Une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par, pour tout x réel,

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On notera g la fonction définie pour tout x réel par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Question 7 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. $f(x)$ est définie pour tout x réel car g est définie sur l'ensemble des réels

B. $f(x)$ est définie pour tout x réel positif car g est continue sur l'intervalle $[0\,;\,2x]$

C. g admet une unique primitive sur l'ensemble des réels car g est continue

D. Si G note une primitive de g, alors pour tout x réel : $f(x) = G(2x)$

Question 8 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. Comme $\dfrac{1}{1+t^2} > 0$ pour tout t réel, on peut dire que pour tout a et b deux réels, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

B. $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_{2a}^{2b} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et donc $f(b) - f(a) \geqslant 0$ si et seulement si $b \geqslant a$

C. f est décroissante

D. f est croissante

Question 9 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. f est dérivable sur l'ensemble des réels et pour tout x réel $f'(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$

B. f est dérivable sur l'ensemble des réels et pour tout x réel $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$

C. la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation $y = x$

D. la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation $y = 2x + 1$

Question 10 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. Comme g est paire et en utilisant la définition de l'intégrale comme étant l'aire sous la courbe, f est paire

B. Comme g est paire et en utilisant la définition de l'intégrale comme étant l'aire sous la courbe, f est impaire

C. Pour tout x réel négatif, $f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 1 - \frac{1}{x}$

D. Pour tout x réel positif, $f(x) > \displaystyle\int_0^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - 1 - \frac{1}{x}$

Question 11 : On pourra utiliser sans le démontrer le théorème suivant : toute fonction croissante admet une limite en $+\infty$ qui est soit finie soit égale à $+\infty$.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

B. $f(x)$ ne peut pas tendre vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ puisque pour tout x réel positif $f(x) \leqslant 2$

C. f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$

D. On ne peut pas savoir avec les informations dont on dispose si f admet ou non une limite quand x tend vers $+\infty$

Exercice 3 :
L'espace est ramené à un repère orthonormé, On considère alors la sphère S de centre I de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$ et de rayon 2 et le plan P passant par les points A, B et C de coordonnées respectives A$(0\,;\,0\,;\,-1)$, B$(1\,;\,-1\,;\,0)$ et C$(0\,;\,2\,;\,1)$

Question 12 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. Une équation de S est donnée par $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z = 1$

B. Une équation de S est donnée par $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z = -1$

C. Une équation de P est donnée par $2x - y - z - 1 = 0$

D. Une équation de P est donnée par $x - 2y - z - 1 = 0$

Question 13 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. Si G est un point de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$ et R un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, la distance de G à R est donnée par $\dfrac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

B. Si G est un point de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$ et R un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$,la distance de G a R est donnée par $\dfrac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$

C. Si G est un point de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et R un plan d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$, la distance de G à R est donnée par $\dfrac{|\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

D. Si G est un point de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et R un plan d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$, la distance de G à R est donnée par $\dfrac{|\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

Question 14 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. P est sécant à S

B. P ne coupe pas S

C. Le plan Q d'équation $2x+y-z=0$ est tangent à S et orthogonal à P

D. Le plan Q' d'équation $2x+y-z=0$ est tangent à S et parallèle à P

Question 15 : S' est une sphère de centre J et de rayon $R>0$.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A. Il existe une homothétie de centre I qui transforme S en S' si et seulement si I = J

B. Il existe une homothétie de centre I qui transforme S en S' même si I $\neq$ J

C. Il existe une homothétie h de centre I qui transforme S en S' alors $P'=h(P)$ est un plan sécant à S' et parallèle à P.

D. S'il existe une homothétie h de centre I qui transforme S en S' alors $P'=h(P)$ est un plan parallèle à P qui ne coupe pas S'.