∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2010 ∾

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 8
1 à 14
15 à 18
19 à 23
24 à 25

PARTIE 1

On considère les fonctions f, g définies sur l'intervalle $I =]-\infty\ ;\ +\infty[$ et h définie sur l'intervalle $J =]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 3x - 2 \\ g(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 2 \\ h(x) &= 2(\ln x)^2 + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2 \end{aligned}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien et e la fonction exponentielle.
On note f', g' et h' les fonctions dérivées respectivement des fonctions f, g et h.
On appelle (E_1) l'équation $g(x) = 0$ et (E_2) l'équation $h(x) = 0$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Question 1
Pour tout x réel, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

a. $f(x) = 2\left[x + \frac{1}{2}\right]\left[\frac{x}{2} - 1\right]$
b. $f(x) = (x+2)(2x-1)$
c. $f(x) = (x-2)(2x+1)$
d. $f(x) = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Question 2
Pour tout x réel, la fonction dérivée g' de la fonction g est définie par :

a. $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x}$
b. $g'(x) = 4\mathrm{e}^{x} - 3$
c. $g'(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x}$
d. $g'(x) = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 3)$

Question 3

Pour tout x réel strictement positif; la fonction dérivée h' de la fonction h est définie par :

a. $h'(x) = 2\ln(x) - 3$
b. $h'(x) = 4\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{3}{x}$
c. $h'(x) = 4\ln x - 3\ln\left(x^2\right)$
d. $h'(x) = 4\dfrac{\ln x}{x} - 3\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$

Question 4
La fonction g'

a. est de signe constant sur l'intervalle I
b. change de signe niais ne s'annule pas sur l'intervalle I
c. s'annule au point $x = \ln 3 - \ln 4$
d. s'annule au point $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 4}$

Question 5
La fonction h'

a. est de signe constant sur l'intervalle J
b. s'annule au point $x = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3$
c. s'annule au point $x = -\mathrm{e}^{-1}$
d. s'annule au point $x = -\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}$.

Question 6
La fonction f est

a. croissante et positive sur l'intervalle $[3/4 ; +\infty[$
b. décroissante et négative sur l'intervalle $[-1/2 ; 3/4]$
c. négative et croissante sur l'intervalle $[-1/2 ; 2]$
d. positive uniquement sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$

Question 7
L'équation (E_1)

a. a une solution unique $x = \ln 2$
b. n'admet pas de solution
c. a deux solutions -2 et -1
d. a deux solutions 2 et 1.

Question 8
La fonction h est

a. décroissante et négative sur l'intervalle J
b. croissante et positive sur l'intervalle J
c. décroissante sur l'intervalle $\left]0 ; \mathrm{e}^{\frac{3}{4}}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{3}{4}} ; +\infty\right[$
d. croissante, négative sur l'intervalle $\left]0 ; \mathrm{e}^{\frac{3}{4}}\right]$ et décroissante, positive sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{3}{4}} ; +\infty\right[$.

Question 9
L'équation (E_2)

a. a une solution unique $x = \mathrm{e}^2$

b. n'admet pas de solution
c. a deux solutions $-\mathrm{e}^2$ et $\mathrm{e}^{-1/2}$
d. a deux solutions e^2 et $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^2}$

Question 10
La courbe $\mathscr{C}_f$

a. admet un maximum au point $x = 3/4$
b. est symétrique par rapport au point origine
c. est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy
d. est symétrique par rapport à l'axe des abscisses Ox

Question 11
La courbe $\mathscr{C}_g$

a. admet un minimum au point $x = 3/4$
b. admet un minimum au point $x = \ln 3 - \ln 4$
c. est symétrique par rapport au point origine
d. est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy

Question 12
On a

a. les fonctions f, g et h ont le même minimum égal à $-25/8$
b. les fonctions f, g et h ont des minimums différents
c. les fonctions f, g et h ont le même maximum égal à $-25/8$
d. les fonctions f, g et h ont le même maximum égal à $25/8$

Question 13
La fonction g est la dérivée de la fonction G définie sur l'intervalle I par

a. $G(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x}$
b. $G(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 2x - 2$
c. $G(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-}2x$
d. $G(x) = x\mathrm{e}^{2x} - 3x\mathrm{e}^{x} - 2x$.

Question 14
La fonction h est la dérivée de la fonction H définie sur l'intervalle J par

a. $H(x) = (x\ln(x) - x)(\ln(x) - 1) + x$
b. $H(x) = \dfrac{2}{3}(\ln x)^3 - \dfrac{3}{2}(\ln x)^2 - 2x$
c. $H(x) = 2x(\ln x)^2 - 3x\ln(x) - 2x$
d. $H(x) = \dfrac{4\ln x - 3}{x}$

PARTIE II

On considère un placement à intérêts composés à 12 % par an. On note B_0 le capital initial et $B(n)$ le capital après n années de placement dans ces conditions, n étant un entier naturel non nul.
ln désigne la fonction logarithme népérien.

Question 15

Après n années de placement, n étant un entier strictement positif

a. $B(n) = 28nB_0/25$

b. le capital a augmenté de $3nB_0/25$, $B(n)$ est une suite arithmétique

c. $B(n) = \left(\dfrac{13}{12}\right)^n B_0$, $B(n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{13}{12}$

d. $B(n) = \left(\dfrac{28}{25}\right)^n B_0$, $B(n)$ est une suite arithmétique de raison $1,12$.

Question 16

On suppose, dans cette question, que le capital initial est 1 000 euros. Après 2 années de placement

a. le capital a augmenté de 24 % soit 240 euros

b. le capital a augmenté de 120^2 euros

c. le capital a augmenté de $\left[\frac{3}{25} + \left(\frac{3}{25}\right)^2\right] \times 1\,000$ soit $134,40$ euros

d. le capital a augmenté de $\left[\frac{6}{25} + \left(\frac{3}{25}\right)^2\right] \times 1\,000$ soit $254,40$ euros.

Question 17

Le nombre k d'années au bout duquel on détient un capital d'au moins 1 700 euros à partir d'un capital initial de 1 000 euros vérifie

a. $k < \dfrac{\ln 1\,700}{\ln 1,12}$

b. $k = \ln \dfrac{1\,700}{1,12}$

c. k est le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln 1\,700}{\ln 1,12}$

d. $k = 5$

On considère, maintenant, un placement à intérêts simples à 12 % par an. On note C_0 le capital initial et $C(n)$ le capital après n années de placement dans ces conditions, n étant un entier naturel non nul.

Question 18

Après n années de placement, n étant un entier strictement positif

a. $C(n) = 28nC_0/25$

b. le capital a augmenté de $3nC_0/25$

c. $C(n) = \left(\dfrac{13}{12}\right) nC_0$

d. le capital a augmenté de $\left(\dfrac{3}{25}\right)^n C_0$

PARTIE III

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [10 ; 90]$ par :

$$f(x) = \frac{110\ln(x) - 220}{x}.$$

Question 19

La fonction f

a. a pour dérivée la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{110}{x}$ pour tout $x$appartenant à l'intervalle I
b. a pour dérivée la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{110(3-\ln(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle I
c. a pour dérivée la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{110}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle I
d. a pour dérivée la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{110(\ln(x)-3)}{x^2}$pour tout x appartenant à l'intervalle I

Question 20
Sur l'intervalle I, l'équation $\ln(x) - 3 = 0$

a. n'admet pas de solution
b. admet plus d'une solution
c. admet une solution unique $x = \ln 3$
d. admet une solution unique $x = \text{e}^3$.

Question 21
Sur l'intervalle I, l'inéquation $\ln(x) - 3 < 0$

a. n'admet pas de solution
b. a pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[10 ; \text{e}^3\right[$
c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[10 ; \text{e}^3\right[$
d. admet une seule solution

Question 22
La fonction f est

a. décroissante sur l'intervalle $\left[10 ; \text{e}^3\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\text{e}^3 ; 90\right]$
b. croissante sur l'intervalle I
c. croissante sur l'intervalle $\left[10 ; \text{e}^3\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\text{e}^3 ; 90\right]$
d. décroissante sur l'intervalle I

Question 23
La fonction f

a. n'admet pas d'extremum sur l'intervalle I
b. admet un minimum sur l'intervalle I qui vaut $f\left(\text{e}^3\right) = 5,5$
c. admet, sur l'intervalle I, un maximum au point $x = \text{e}^3$ qui vaut $-5,5$
d. est, sur l'intervalle I, inférieure à $\dfrac{330-220}{\text{e}^3}$

PARTIE IV

On considère une progression arithmétique (u_n), n entier supérieur ou égal à 1, de premier terme u_1 et de raison r telle que la somme S_n de ses n premiers termes est donnée par la formule $S_n = 3n^2 + 4n$ pour tout n entier strictement positif.

Question 24
Pour tout n entier strictement positif on a

a. $u_n = u_1 + (n-1)r$
b. $u_n = u_1 r^{n-1}$
c. $S_n = \dfrac{n\left(u_1 + u_1 + (n-1)r\right)}{2}$
d. $S_n = u_1 \dfrac{(1-r^n)}{(1-r)}$ pour r différent de 1

Question 25 :

On en déduit

a. $u_1 = 6$ et $r = 7$
b. $u_1 = 7$ et $r = 5$
c. $u_n = 5n+2$ pour tout n entier strictement positif
d. $u_n = 7 \times 6^{n-1}$ pour tout n entier strictement positif