∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2009 ∾

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Question liées entres elles :

3, 4, 5 et 6

7, 8, 9 et 10

11, 12 et 13

Toutes les autres questions sont indépendantes les unes des autres

Question 1

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels. On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ si et seulement si :

A. Quel que soit un intervalle contenant λ, tous les éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans cet intervalle.

B. Quel que soit un intervalle ouvert contenant λ, tous les éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans cet intervalle.

C. Quel que soit un intervalle ouvert contenant λ, une infinité d'éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans cet intervalle.

D. Quel que soit un intervalle ouvert contenant λ, il existe un rang à partir duquel tous les éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans cet intervalle.

Question 2

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 c'est dire que :

A. Quel que soit $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ ou $u_n < 0$

B. Quel que soit $\epsilon > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N},\ u_n \notin]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

C. Il existe $\epsilon > 0$, quel que soit un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n > n_0$ et $u_n \notin]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

D. Quelque soit $\epsilon > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

Nota Bene : Les questions 3, 4, 5 et 6 sont liées

Question 3 :

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 \neq 0$. On peut alors montrer que :

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, par récurrence

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est du signe de u_0

C. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$

D. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$

Question 4 :

On introduit la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$.

On appellera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ donné. On peut alors dire que :

A. $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0$ car f est impaire

B. $\mathscr{C}_f$ admet $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$ et $y = -2x$ en $-\infty$

C. $\mathscr{C}_f$ admet un minimum global en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et un maximum local en $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Question 5 :

On considère la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, soit la fonction

$$g : \left|\begin{array}{lcl} \left]0\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x + \dfrac{1}{x} \end{array}\right. .$$

On peut alors affirmer que :

A. g est strictement décroissante et continue sur cet intervalle. C'est une bijection de $\left]0\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sur $]2\sqrt{2}\,;\,+\infty]$

B. Puisque g est une bijection il y a une solution unique à l'équation $f(x) = 3\sqrt{2}$

C. Si $y = g(x)$ alors $x = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 8}}{4}$

D. Si $y = g(x)$ alors $x = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 8}}{4}$

Question 6 :

On considère à nouveau les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies en question 3. On choisira de plus dans la suite de ce sujet $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Que peut-on alors affirmer ?

A. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car g est décroissante.

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $x > 0$, $f(x) - x > 0$

C. Les solutions de $f(x) = x$ sont 1 et -1 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

D. L'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution réelle et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. De plus comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Nota Bene : Les questions 7, 8, 9 *et* 10 *sont liées*

Question 7 :

A l'ENAC, il y a des jours où il fait soleil et des jours où il ne fait pas soleil. Si il fait soleil un jour, le lendemain il fait soleil avec une probabilité a $(a \in]0\,;\,1[)$ et s'il ne fait pas soleil un jour, le lendemain il fait soleil avec une probabilité b $(b \in]0\,;\,1[)$.

Nous noterons S_n l'évènement « le jour n il fait soleil sur l'ENAC ». $\overline{S_n}$ notera l'événement contraire à S_n. Le jour 1 il fait soleil sur l'ENAC.

L'énoncé nous donne :

A. $P(S_1) = a$

B. $P(S_n) = a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

C. $P_{S_n}\left(\overline{S_{n+1}}\right) = b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

D. $P_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 8 :

La formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

A. $P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1}) + P_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$

B. $P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1})P(S_n) + P_{\overline{S_n}}(S_{n+1})(1 - P(S_n))$

C. $P(S_{n+1}) = (a-b)P_{S_n} + b$

D. $P(S_{n+1}) = (b-a)P_{S_n} + a$

Question 9 :
On considère alors la suite réelle $p_n = P(S_n)$.

A. $|a-b| < 1$

B. Il existe un réel λ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - \lambda$ soit géométrique de raison $|a-b|$.

C. Il existe un réel λ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - \lambda$ soit géométrique de raison $(a-b)$

D. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - \dfrac{a}{1-a+b}$ est géométrique.

Question 10 :
On peut donc écrire que :

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (a-b)^{n-1}\dfrac{1-a}{1+b-a}$

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (a-b)^{n}\dfrac{1-a}{1+b-a}$

C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_n) = (a-b)^{n-1}\dfrac{1-a}{1+b-a} - \dfrac{b}{1+b-a}$

D. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n) = \frac{b}{1+b-a}$

Nota Bene : Les questions 11, 12 *et* 13 *sont liées*

Question 11 :
On considère une fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + 2f(x) = 2.$$

On peut dire que :

A. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ car on ne sait pas si f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$

C. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle somme de $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $x \longmapsto 1$ qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

D. f n'est pas nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$

Question 12 :
Si on suppose que f est dérivable (soit parce qu'on l'a démontré en question précédente, soit en faisant cette hypothèse supplémentaire). On peut affirmer que :

A. $f'(x)+2f(x)=0$, pour tout x réel

B. $2f'(x)+f(x)=0$, pour tout x réel

C. Il existe C réel tel que, pour tout x réel : $f(x)=C\text{e}^{2x}$.

D. Il existe C réel tel que, pour tout x réel $f(x)=C\text{e}^{\frac{x}{2}}$

Question 13 :
Les fonctions satisfaisant à la question 11 sont donc :

A. Toutes les fonctions de la forme $x\longmapsto C\text{e}^{-\frac{x}{2}}+2$

B. Toutes les fonctions de la forme $x\longmapsto +C\text{e}^{\frac{x}{2}}+2$

C. La seule fonction qui convient est $x\longmapsto -\text{e}^{-\frac{x}{2}}$

D. La seule fonction qui convient est $x\longmapsto \text{e}^{\frac{x}{2}}$

Question 14 :
On note j le nombre complexe $\text{j}=\text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
On rapporte le plan complexe à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et on note A un point d'affixe z, $z\neq 0$, B le point d'affixe jz et C le point d'affixe j^2z.

A. $1+\text{j}+\text{j}^2=\dfrac{1-\text{j}^2}{1-\text{j}}$

B. $1+\text{j}+\text{j}^2=0$, ce qui permet d'affirmer que le centre de gravité de ABC de trouve en O

C. L'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)$ vaut $\dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près

D. ABC est un triangle équilatéral

Question 15 :
On ramène l'espace à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère alors le cône de révolution d'axe $\left(O,\,\vec{k}\right)$ et de sommet O et d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$ et on considère la portion de ce cône défini entre les plans d'équations $z=-2$ et $z=3$

A. L'intersection de ce tronc de cône avec le plan d'équation $z=k$ est un cercle de centre $(0\,;\,0\,;\,k)$ et de rayon $\tan\frac{\pi}{3}k$

B. L'intersection de ce tronc de cône avec le plan d'équation $z=k$ est un cercle de centre $(0\,;\,0\,;\,k)$ et de rayon $\sin\frac{\pi}{3}k$

C. Le volume du tronc de cône considéré est $\dfrac{17\pi}{27}$

D. Le volume du tronc de cône considéré est $\dfrac{17\pi}{12}$