∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2018 ∽
Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions liées
4 à 6 ;
7 à 10 ;
11 à 15.

Notations Les lettres $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des nombres complexes, des nombres réels et des entiers naturels.
Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
$|z|$ désigne le module du nombre complexe z.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{r},\ \vec{s},\ \vec{t}\right)$.

PARTIE 1

Question 1

On désigne par (D) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :
$z = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ étant un nombre réel :

A. (D) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2\mathrm{i}$.
B. (D) est le cercle de centre le point d'affixe $-1 + 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
C. (D) est le cercle de centre le point d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
D. (D) est le cercle de centre le point d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Question 2

On désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient :

$$|z - 1 + \mathrm{i}| = |z + 1 + 2\mathrm{i}|.$$

Les points A, B et C ont respectivement pour affixe : $1 - \mathrm{i}$, $-1 + 2\mathrm{i}$ et $-1 - 2\mathrm{i}$.
Préciser la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies :
A. C est un point de (E).
B. (E) est la médiatrice du segment [AB].
C. (E) est la médiatrice du segment [AC].
D. (E) est le cercle de diamètre[AB].

Question 3

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z + \left|z^2\right| = 7 + \mathrm{i}.$$

Cette équation admet :
A. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
B. Une solution réelle.
C. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
D. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

Partie II

Question 4

On considère les points A$(1~;~2~;~-1)$, B$(1~;~1~;~0)$, C$(9~;~-1~;~-2)$ et S$(1;1;1)$.
Préciser la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies :

A. Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $-x-2y-2z+3=0$.
B. Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+2y+2z+3=0$.
C. Une équation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\\ y &=& -2-t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$

D. Une équation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 2-2t\\ z &=& -1+2t\end{array}\right.$

Question 5

Les coordonnées du point S$'$ symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

A. $\left(\dfrac{8}{9}~;~\dfrac{7}{9}~;~\dfrac{7}{9}\right)$
B. $\left(\dfrac{5}{9}~;~\dfrac{1}{9}~;~\dfrac{1}{9}\right)$
C. $\left(\dfrac{7}{9}~;~\dfrac{5}{9}~;~\dfrac{5}{9}\right)$
D. $\left(\dfrac{1}{9}~;~\dfrac{5}{9}~;~\dfrac{5}{9}\right)$

Question 6

Le triangle ABC est :
A. équilatéral.
B. isocèle.
C. rectangle en A.
D. rectangle en C.

Partie III

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches e une houle noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2.
On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2 .
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve E.
On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement :
« On a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_1 » et $p(B_1)$ (respectivement $p(N_1)$ les probabilités associées.
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement :
« On a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_2 » et $p(B_2)$ (respectivement $p(N_2)$ les probabilités associées.

Question 7

Le calcul de $p(B_2)$ donne :

A. $\dfrac{1}{2}$

B. $\dfrac{3}{4}$
C. $\dfrac{3k+6}{4k+7}$.
D. $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Question 8

Le calcul de $p\left(N_2\right)$ donne :

A. $\dfrac{1}{2}$
B. $\dfrac{1}{4}$
C. $\dfrac{k+1}{4k+7}$
D. $\dfrac{k+18}{4k+12}$

Question 9

Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve E.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme relative dont il dispose à la fin de l'épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une houle blanche, il reçoit 12 euros de la banque. Sinon, il ne reçoit rien et sa mise revient à la banque. Nous avons alors :

A. $X \in \{-8\ ;\ 4\}$
B. $X \in [-8\ ;\ 4]$
C. $X \in [-8\ ;\ 12J$
D. $X \in \{-8\ ;\ 12\}$

Question 10

Préciser la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies :

A. Le jeu est favorable au joueur à partir de 7 boules blanches au total c'est-à-dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
B. Le jeu est favorable à la banque pour un maximum de 7 boules blanches au total c'est-à-dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
C. Le jeu est favorable au joueur à partir de 9 boules blanches au total c'est-à-dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
D. Le jeu est favorable à la banque pour un maximum de 5 boules blanches au total c'est-à-dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.

Partie IV

Soit la suite $\left(I_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{(\sin x)^n}{\cos x}\,\text{d}x.$$

Question 11

Le calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,\text{d}x$ donne :

A. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

B. $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

D. $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Question 12

On en déduit que :

A. $I_{n+2} - I_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

B. $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

C. $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

D. $I_{n+2} - I_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Question 13

On obtient alors :

A. $I_1 = -\ln 2$, $I_3 = -\ln 2 - \dfrac{3}{8}$ et $I_5 = -\ln 2 - \dfrac{33}{64}$

B. $I_1 = \ln 2$, $I_3 = \ln 2 - \dfrac{3}{8}$ et $I_5 = \ln 2 - \dfrac{33}{64}$

C. $I_1 = \ln 2$, $I_3 = \ln 2 - \dfrac{3}{8}$ et $I_5 = \ln 2 - \dfrac{9}{64}$

D. $I_1 = -\ln 2$, $I_3 = -\ln 2 - \dfrac{3}{4}$ et $I_5 = -\ln 2 - \dfrac{9}{64}$

Question 14

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3};\right]$ par :

$$f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3};\right]$ nous avons :

A. $f'(x) = -\dfrac{2}{\cos x}$

B. $f'(x) = \dfrac{2}{\cos x}$

C. $f'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$

D. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Question 15

Nous admettrons que pour $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a + b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$.
On obtient alors :

A. $I_0 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$, $I_2 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$.

B. $I_0 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$, $I_2 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

C. $I_0 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$, $I_2 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

D. $I_0 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$, $I_2 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $I_4 = \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$