∾ Techniciens supérieurs de l'aviation 2018 ∾

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Questions liées

1 à 5
6 à 12
15 à 20
21 à 25

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensemble des réels et des entiers naturels.
On rappelle que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.

Partie 1

Max doit se rendre en voiture dans une ville voisine pour un rendez-vous à 15 h 15. Il quitte son domicile entre 13 h et 14 h à un instant $13+t$, où t est un nombre quelconque pris au hasard dans $[0\,;\,1]$.
Plus il part tard, plus il y a de circulation, la durée de son trajet étant estimée à $t+0,5$.

Question 1

La probabilité p_1 que Max ne soit pas en retard à son rendez-vous est :

- **A.** $p_1 = 0,125$
- **B.** $p_1 = 0,25$
- **C.** $p_1 = 0,75$
- **D.** $p_1 = 0,875$

Question 2
La probabilité p_2 que Max arrive avec exactement un quart d'heure d'avance est :

- **A.** $p_2 = 0,125$
- **B.** $p_2 = 0,25$
- **C.** $p_2 = 0,75$
- **D.** $p_2 = 0,875$

Question 3

La probabilité p_3 que Max soit en retard de plus de 9 minutes à son rendez-vous est :

- **A.** $p_3 = 0,05$
- **B.** $p_3 = 0,13$
- **C.** $p_3 = 0,87$
- **D.** $p_3 = 0,95$

Question 4

La probabilité p_4 que Max arrive entre 14 h 54 et 15 h 06 est :

- **A.** $p_4 = 0,1$
- **B.** $p_4 = 0,26$
- **C.** $p_4 = 0,52$
- **D.** $p_4 = 0,78$

Question 5

Pour arriver entre 14 h 54 et 15 h 15, Max doit partir :

- **A.** Entre 13 h 32 et 13 h 48
- **B.** Entre 13 h 42 et 13 h 52
- **C.** Entre 13 h 53 et 14 h 21
- **D.** Entre 14 h 02 et 14 h 18

Partie II

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. On souhaite étudier, pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

Question 6

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes.
La suite (u_n) est :

A. une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ eL de raison 2
B. une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2
C. une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $0,2$
D. une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $0,8$

Question 7

On en déduit :

A. $u_n = 10 - 2n$
B. $u_n = 10 + 2n$
C. $u_n = 8 \times (0,8)^{n-1}$
D. $u_n = 10 \times (0,2)^n$

Question 8

On donne $(1,25)^{20} \approx 86,74$. La quantité de médicament restant dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale au bout de :

A. 5 minutes
B. 19 minutes
C. 20 minutes
D. 21 minutes

Question 9

La machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament, et on estime toujours que 20 % du médicament est éliminé par minute. Toutes les minutes, la machine réinjecte 1 mL de médicament.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
La suite (w_n) vérifie la relation :

A. $w_{n+1} = 0,2w_n + 1$
B. $w_{n+1} = 0,2(w_n + 1)$
C. $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$
D. $w_{n+1} = 0,8(w_n + 1)$

Question 10

On pose $z_n = w_n - 5$. La suite (z_n) est :

A. une suite géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $z_0 = 5$
B. une suite géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $z_0 = 5$
C. une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $z_0 = 5$
D. une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $z_0 = 5$

Question 11

Ainsi, on en déduit l'expression de w_n en fonction de n :

A. $w_n = 5(1-0,8)^n + 5$
B. $w_n = 5(1-0,2)^n + 5$
C. $w_n = 2(5+n)$
D. $w_n = 2(5-n)$

Question 12

Par passage à la limite, on obtient :

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$
B. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$
C. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5$
D. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

Partie III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2+\cos x)\mathrm{e}^{1-x}$.

Question 13

La fonction f vérifie :

A. Il existe un réel α tel que $f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$
B. Il existe un réel α tel que $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$
C. Pour tout réel x, $f(x) < 0$
D. Pour tout réel x, $f(x) > 0$

Question 14

La fonction dérivée f' de f est :

A. $f'(x) = (\sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
B. $f'(x) = (2+\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
C. $f'(x) = -(2+\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{1-x}$
D. $f'(x) = -(2+\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{1-x}$

Question 15

On montre que pour tout x :

A. $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$
B. $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

C. $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

D. $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$

Question 16

La fonction f' vérifie :

A. Pour tout réel x, $f'(x)<0$

B. Pour tout réel x, $f'(x)>0$

C. Il existe un réel β tel que $f'(x)\leqslant 0$ si $x\leqslant\beta$ et $f'(x)\geqslant 0$ si $x\geqslant\beta$

D. Il existe un réel β tel que $f'(x)\geqslant 0$ si $x\leqslant\beta$ et $f'(x)\leqslant 0$ si $x\geqslant\beta$

Question 17

On montre :

A. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

B. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

C. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

D. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Question 18

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. On a, en unité d'aire :

A. $\mathcal{A}=2\mathrm{e}-2-\displaystyle\int_0^1(\cos t)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$

B. $\mathcal{A}=2\mathrm{e}-2+\displaystyle\int_0^1(\cos t)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$

C. $\mathcal{A}=2\mathrm{e}-2+\sin 1$

D. $\mathcal{A}=2\mathrm{e}-2-\sin 1$

Question 19

Soit $f_1(t)=(\cos t)\mathrm{e}^{1-t}$ et $f_2(t)=(\sin t)\mathrm{e}^{1-t}$, pour t réel. On peut montrer que :

A. $f_1(t)=\dfrac{1}{2}\left[f_2'(t)-f_1'(t)\right]$

B. $f_1(t)=\dfrac{1}{2}\left[f_1'(t)-f_2'(t)\right]$

C. $f_2(t)=\dfrac{1}{2}\left[f_2'(t)+f_1'(t)\right]$

D. $f_2(t)=-\dfrac{1}{2}\left[f_1'(t)+f_2'(t)\right]$

Question 20

On en déduit que :

A. $\mathcal{A}=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}-\dfrac{3}{2}$

B. $\mathscr{A} = \dfrac{3}{2}\text{e} - 2 + \dfrac{\sin 1 - \cos 1}{2}$

C. $\mathscr{A} = \dfrac{5}{2}\text{e} - \dfrac{5}{2}$

D. $\mathscr{A} = \dfrac{5}{2}\text{e} - 2 + \dfrac{\cos 1 - \sin 1}{2}$

Partie IV

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - \text{i}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - \text{i}\sqrt{2}}{2}$.

Question 21

Les nombres z_1 et z_2 s'écrivent sous forme exponentielle :

A. $z_1 = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

B. $z_1 = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$

C. $z_2 = \sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$

D. $z_2 = \sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$

Question 22

Le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme exponentielle :

A. $\dfrac{z_1}{z_2} = \text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$

B. $\dfrac{z_1}{z_2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$

C. $\dfrac{z_1}{z_2} = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{12}}$

D. $\dfrac{z_1}{z_2} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{12}}$

Question 23

Le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme algébrique :

A. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

B. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

C. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

D. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Question 24

On en déduit :

A. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

B. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Question 25

On en déduit :

A. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$