

TRAVAIL PREPARATOIRE

A chercher avant la séance devant écran.



1. DEFINITIONS

- a. Calculer la vitesse moyenne d'une auto qui a roulé à 30 km/h , puis à 60 km/h, sur deux tronçons de même longueur. Comparer avec la moyenne des nombres 30 et 60.
- b. Calculer la vitesse moyenne d'une auto qui a roulé à a km/h et b km/h sur deux tronçons de même longueur. Cette moyenne s'appelle la moyenne "harmonique" des nombres a et b . La moyenne usuelle s'appelle la moyenne "arithmétique" des nombres a et b .

2. PROPRIETES

Soit a et b deux réels tels que $b > a > 0$. On note m leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$, et h leur moyenne harmonique, définie par la condition : $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$.

Démontrer les propriétés suivantes :

- a. $h = \frac{2ab}{a+b}$
- b. $m > h$
- c. m et h sont compris entre a et b
- d. $m \times h = ab$

TRAVAIL EXPERIMENTAL

On construit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

- u_0 et v_0 sont deux réels donnés
- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n
- v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n

1. On prend $u_0 = 100$ et $v_0 = 1$. Calculez les premières valeurs de u_n et v_n , et représentez les sur un graphique. Quelles observations pouvez vous faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?
2. Poursuivez ce travail avec une dizaine d'autres valeurs de u_0 et v_0 que vous choisirez "à votre bon plaisir".
3. *Compte rendu* : dressez un tableau des valeurs de u_0 et v_0 que vous avez testé, en précisant ce que vous avez observé. Quelles conjectures pouvez vous faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?

TRAVAIL THEORIQUE

A rendre pour la prochaine fois, avec le compte rendu de la partie expérimentale.

Dans les questions ci-dessous, on a pris u_0 et v_0 tels que $u_0 > v_0 > 0$.

Indication : utiliser les propriétés démontrées dans le travail préparatoire.

1.
 - a. Pourquoi a-t-on, pour tout entier n , l'inégalité $u_n > v_n$?
 - b. Pourquoi u_{n+1} et v_{n+1} sont-ils compris entre v_n et u_n ?
2.
 - a. En déduire que pour tout entier n , on a : $u_n > u_{n+1} > v_{n+1} > v_n$
 - b. Justifier les inégalités : $u_n > v_0$ et $u_0 > v_n$
 - c. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3.
 - a. En utilisant la relation entre u_{n+1} , u_n et v_n , prouver que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
 - b. Pourquoi est-ce que le produit $u_n \times v_n$ ne dépend-il pas de n ?
 - c. En déduire l'expression de la limite des suites (u_n) et (v_n) en fonction de u_0 et v_0 .
 - d. Comparer ce résultat avec les observations de la partie expérimentale.

BONUS : UNE TROISIEME MOYENNE

On définit la moyenne "géométrique" g de deux réels a et b tels que $b > a > 0$ par la formule $g = \sqrt{ab}$. Cette dénomination est liée au fait que les trois nombres a , g et b forment une progression géométrique.

Pourquoi la moyenne géométrique de deux nombres positifs est-elle toujours comprise entre leur moyenne harmonique et leur moyenne arithmétique ?