Des grilles mathémagiques

Dominique Souder

Dominique Souder nous propose ce petit tour de magie sur des tableaux de nombres. Il est utilisable pour motiver les apprentissages sur une large plage de niveaux scolaires. L'abondance des situations possibles a imposé de faire des choix, nous fournissons quelques exemples éclairants dans l'article, les autres sont téléchargeables sur le site de l'APMEP.

Dominique Souder a enseigné au lycée Valin à La Rochelle (17).

Au début de l'automne 2014, l'Association des Professeurs de Maths de l'Enseignement Public a organisé à Toulouse ses journées nationales, en se préoccupant comme toujours de l'enseignement des mathématiques de la maternelle à l'université. Parallèlement, la revue Tangente Éducation a sorti un numéro faisant l'éloge de la magie mathématique dans l'enseignement secondaire. Je vous propose, dans les pages qui suivent, de ***suivre un même principe de magie mathématique*** œuvrant dans divers tours dont le niveau de connaissance en maths va de la classe de CE1 jusqu'à celle de Terminale S. Je pense que ce qui va suivre permet d'agrémenter des apprentissages ou des exercices d'entraînement variés correspondants aux programmes successifs des élèves selon leur âge de 7 à 18 ans.

Le principe (pour les profs de maths)

Soient a, b, c, A, B, C des nombres et * une opération entre nombres comme l'addition ou la multiplication, mais pas la soustraction ou la division : il faut que cette opération soit commutative et associative. Dressez la table de votre opération : vous obtenez les 9 résultats sur fond blanc.

*	A	B	C
a	a * A	a * B	a * C
b	b * A	b * B	b * C
c	c * A	c * B	c * C

Entourez 3 cases sur les 9, en veillant à ce qu'il n'y en ait qu'une seule entourée par ligne et une seule par colonne. Plusieurs solutions sont possibles…

Combinez les 3 valeurs choisies avec l'opération *. Modifiez vos 3 cases entourées en respectant toujours la consigne « une par ligne, une par colonne » et faites de nouveau agir votre opération : vous trouverez le même résultat que précédemment. Pourquoi ?

Quand vous combinez les 3 valeurs entourées avec *, c'est finalement les 6 valeurs sur fond grisé, celles qui ont permis de dresser la table de l'opération *, que vous combinez. Ainsi, par exemple :

- à partir des 3 cases (a*A), (b*C) et (c*B) vous obtenez : (a*A)*(b*C)*(c*B) qui peut s'écrire a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération,
- à partir des 3 cases (b*A), (a*C) et (c*B) vous obtenez : (b*A)*(a*C)*(c*B) qui peut s'écrire encore a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération, etc...

Ce principe peut être utilisé avec diverses opérations possédant les bonnes propriétés et des tableaux ayant un nombre de cases supérieur : 4 x 4 (on entoure alors 4 cases), 5 x 5 (on entoure 5 cases), … , 10 x 10 (on entoure 10 cases), etc. À partir du moment où les cases entourées respectent la consigne « une par ligne, une par colonne », le résultat de l'action de l'opération * entre les cases choisies est toujours le même : c'est celui qu'on obtient en faisant agir * entre tous les nombres qui ont servi à dresser la table de l'opération *. On peut l'appliquer à des situations variées, adaptées à des élèves du primaire au lycée ; voici quelques exemples.

La présentation sous forme de tour de magie

Vous enseignez en primaire et vous voulez rendre les mathématiques ludiques et les faire entrer dans la vie quotidienne ? Voici comment faire construire à vos élèves un cadeau d'anniversaire original pour un membre de leur famille. Supposons qu'il s'agisse de fêter le 38ème anniversaire d'une personne. Choisissons de dresser un ta-bleau de 4 x 4 = 16 cases qui servira de cadeau mathémagique (voir ci-dessous).

Choisissez 8 nombres (pas forcément distincts) dont la somme est 38 et placez les dans les 8 cases grisées du tableau. Vous dressez ensuite la table de Pythagore de l'opération « addition », et vous coupez les bords grisés (ligne du haut, et colonne de gauche) : il vous reste le tableau de 16 cases à fond blanc.

+	3	5	6	9
1	4	6	7	10
2	5	7	8	11
4	7	9	10	13
8	11	13	14	17

L'enfant présente le tableau de 16 cases, avec 4 pions, à la personne à laquelle il veut souhaiter un bon anniversaire. Il lui demande de placer ceux-ci en respectant la consigne « un par ligne, un par colonne ». La personne doit ajouter les 4 valeurs écrites sous les pions… elle trouvera 38 ! On lui fait choisir un autre positionnement des pions : le total des 4 nombres est toujours 38. Décidément, bon 38ème anniversaire !

Motivons pour un apprentissage

Vous souhaitez faciliter l'apprentissage de la lecture des nombres s'écrivant avec un 1 suivi de beaucoup de zéros : mille, cent mille, un million, un milliard, etc., autrement dit les puissances de 10. Voici une situation utilisant la multiplication.

Partez d'une table de multiplication de 3 x 3 = 9 cases comme la suivante :

x	1	10	1 000
1	1	10	1 000
100	100	1 000	100 000
10 000	10 000	100 000	10 000 000

Avant de couper les bords colorés habituels, et au lieu d'écrire sur les neuf cases blanches les nombres en chiffres, écrivez-les plutôt en lettres…

Un	Dix	Mille
Cent	Mille	Cent mille
Dix mille	Cent mille	Dix millions

Faites choisir 3 nombres, « un seul par ligne, un seul par colonne ». Faites effectuer la multiplication des trois nombres choisis (en comptant bien les zéros).

Puis, faites écrire le résultat en chiffres avec le nombre adéquat de zéros (10 000 000 000), demandez comment le résultat se prononce, et faites-le écrire en lettres (dix milliards).

Recommencez avec d'autres positions des trois nombres pour mettre en valeur la surprise de toujours trouver le même produit. Pour présenter encore mieux, préparez avant de faire le tour une reproduction du capitaine Haddock en furie dans « Tintin et le crabe aux pinces d'or », modifiez une bulle de ses jurons en écrivant « dix millions de mille sabords, c'est dix milliards de sabords et il y a dix zéros ! », mettez cette image dans une enveloppe que vous laisserez traîner sur votre table : vous la sortirez et la montrerez devant votre petit public à la fin du tour…

Voilà une façon ludique et motivante pour écoliers et collégiens de se familiariser avec l'écriture de ces grands nombres.

Les puissances de 10 au collège

Vous enseignez en quatrième et vous espérez faire effectuer à vos élèves quelques calculs d'entraînement sur les puissances de 10 à exposants entiers positifs et négatifs, sans qu'ils rechignent à la tâche, et même en leur faisant relever un défi ?

Faites-leur trouver le plus de positionnements « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrire et calculer les produits des puissances de 10 associées aux 4 pions…

dix	10^{-2}	10^{2}	10^{5}
un centième	10^{-5}	un dixième	10^{2}
cent	10^{-1}	mille	un million
cent mille	100	un million	un milliard

Surprise : tous les produits sont égaux ! Les élèves sauront-ils trouver pourquoi ?

x	10	10^{-2}	10^{2}	10^{5}
1	10	10^{-2}	10^{2}	10^{5}
10^{-3}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-1}	10^{2}
10	10^{2}	10^{-1}	10^{3}	10^{6}
10^{4}	10^{5}	10^{2}	10^{6}	10^{9}

Voici comment le tableau a été construit : c'est une table de multiplication à partir de 8 nombres sur fond grisé dont le produit est 10^8, soit 100 000 000 ou cent millions.

Et au lycée alors ?

Au lycée, les occasions sont là aussi nombreuses de mettre en œuvre le principe magique qui nous occupe, pour faire passer des notions parfois ingrates, ou pour varier les présentations d'exercices d'entraînement à l'application de certaines propriétés fondamentales...

Voici quelques exemples.

Les angles modulo 2π

Calculez la somme, modulo 2π, des 4 angles choisis avec la contrainte habituelle « un par ligne, un par colonne ».

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$

Pour varier les plaisirs, on pourra remplacer dans le tableau les angles par leur mesure principale.

Produits d'exponentielles

$e^{1/2}$	1	$e^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
e^{4}	$e^{3,5}$	e^{2}	e^{3}
e^{3}	$e^{2,5}$	e	e^{2}
$\frac{1}{e}$	$e^{-1,5}$	e^{-3}	$\frac{1}{e^2}$

Sommes de nombres complexes

$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{1+3i}{2+i}$	$-1+i$
$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{3-i}{2+i}$	$-1-i$
$\frac{-1}{1+i}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{-1+2i}{2+i}$	$-2+i$
$\frac{3}{1+i}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	$2-i$	$-i$

D'autres exemples et les grilles complètes sont téléchargeables sur le site de l'APMEP, rubrique PLOT.

Pour aller plus loin avec les élèves

Remarquons tout d'abord qu'à tout niveau d'étude, faire construire un tableau additif « anniversaire », pour un nombre d'années choisi par chacun, est une appropriation valorisante de ces grilles mathémagiques à ne pas négliger. Manipuler les principes mis en jeu (construire une grille), démonter les mécanismes dans le détail est plus motivant que de simplement les utiliser. Les prolongements suivants peuvent être intéressants.

- Trouver le nombre de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions dans le tableau.
- La grille complète (avec les lignes et colonnes grisées) et son principe de construction étant fournie, demander aux élèves de trouver « pourquoi ça marche ».
- Ou encore, la grille centrale (sans les cases grisées) étant fournie, retrouver les cases grisées, voire en trouver plusieurs

solutions, ou aussi les retrouver avec des contraintes supplémentaires (par exemple, aucune case grisée ne doit contenir 1). Comparer les propositions des élèves, plus ou moins astucieuses ou élégantes, sans répétitions de cases.

- Pour les calculs effectués, demander à plusieurs élèves de montrer leur tactique au tableau, puis comparer et discuter de leur efficacité et rapidité.

Par exemple :

° pour les « Additions de logarithmes », on pourra s'aider de l'écriture de toutes les cases sous la forme du logarithme népérien d'un rationnel,

° pour les « Multiplications d'exponentielles », on pourra mettre tous les nombres sous la forme e^k avec k rationnel,

° pour les « Multiplications de nombres complexes », on pourra mettre toutes les valeurs en notation exponentielle.

Ces échanges mettent en évidence l'utilité de telle ou telle notation et font ressortir qu'une réflexion préalable peut faire gagner du temps.

- Trouver des variantes ludiques, créatives. Par exemple : construire un grand tableau additif 10 x 10 = 100 cases dont la somme des 10 pions sera le millésime de l'année et faire jouer les parents d'élèves lors de journées portes ouvertes. Les élèves seront fiers de défier leurs parents dans une ambiance festive.

- Utiliser un tableur pour construire la grille. Une fois les valeurs des cases grisées des tableaux saisies, le contenu de la grille est calculé. Le tout est de trouver la bonne formule en jonglant avec les $...

Si les cases grisées sont dans la ligne 1 et la colonne A, la formule magique pour la cellule B2 est =B$1*$A2, à recopier dans les autres cellules.

	A	B	C	D	E
1		0	3	1	4
2	1	=B$1*$A2	=C$1*$A2	=D$1*$A2	=E$1*$A2
3	6	=B$1*$A3	=C$1*$A3	=D$1*$A3	=E$1*$A3
4	3	=B$1*$A4	=C$1*$A4	=D$1*$A4	=E$1*$A4
5	9	=B$1*$A5	=C$1*$A5	=D$1*$A5	=E$1*$A5

Bien sûr, pour les exponentielles, la trigonométrie et les logarithmes, c'est moins satisfaisant puisque le tableur affiche les valeurs approchées décimales au lieu des valeurs symboliques attendues, comme ln(2) ou 2π/3.

Il faut alors utiliser un tableur capable d'afficher les valeurs **exactes**. XCAS sait le faire, même si l'interface est bien moins conviviale. Attention, dans le tableur XCAS, il y a une ligne 0... La formule magique pour la première case (ici, B1) devient =simplify(B$0*$A1). Dans l'exemple ci-dessous, l'opération * est l'addition.

1 Table Edit Maths | eval | val | init | 2-d | 3-d |

B1 =simplify(B$0+$A1)

Sheet config: * Spreadsheet <> R5C5 auto down fill

	A	B	C	D	E
0	0	0	ln(3)+ln(2)	2*ln(2)	ln(2)-ln(3)
1	ln(3)-2*ln(2)	ln(3/4)	ln(9/2)	ln(3)	-ln(2)
2	-ln(3)	-ln(3)	ln(2)	ln(4/3)	ln(2/9)
3	-3*ln(2)	-3*ln(2)	ln(3/4)	-ln(2)	-ln(12)
4	ln(2)	ln(2)	ln(12)	ln(8)	ln(4/3)

À vous, maintenant, de poursuivre cette aventure mathématique : je suis sûr que vous trouverez d'autres idées à la fois utiles et originales pour faire des maths en jouant…

Si vous souhaitez échanger avec moi, ce sera avec plaisir.

Remerciements à Fabien Sommier, du lycée André Boulloche, pour ses idées pour le niveau lycée (données lors d'un stage au Palais de la Découverte à Paris) et à François Bouyer pour ses précieux compléments informatiques.