Une section d'un cube

Charles Pérol

Re*traité du Supérieur, le clermontois Charles Pérol est mort d'un accident de la route, voici quelques années, alors qu'il venait, avec leur professeur, de* ***faire faire*** *des maths à des élèves de collège.*
Il avait, en effet, la double passion conjuguée des élèves et de l'enseignement, surtout de la géométrie. Il aimait particulièrement l'étude expérimentale des solides et de leurs sections. Ses mains et sa tête s'y alliaient merveilleusement.
Ainsi avait-il conçu et réalisé un « Filicoupeur » agissant sur du polystyrène. Les journées de Clermont en octobre 2006 permettront peut-être d'admirer le « filicoupeur » et de regretter que son utilisation ne soit plus possible actuellement en classe.

En 1972, à contre-courant du « affine avant le métrique » alors imposé en collège, Charles, directeur de l'IREM de Clermont-Ferrand, avait lancé une expérimentation qui, relayée par quelque cinq IREM, puis par l'APMEP en ses « Problématiques Collège », enfin à la commission ministérielle des programmes, allait déboucher, en 1985, sur des programmes de Collège guère changés depuis.

L'article ci-après, outre son intérêt propre, est aussi l'occasion, d'un hommage à Charles Pérol, pédagogue humaniste qui cherchait à incarner de grands idéaux dans une pratique quotidienne et à les vivre dans la simplicité et l'amitié .

Au groupe de travail que j'animais à Orléans le vendredi 21 novembre 1980, j'ai proposé d'étudier l'exploitation en classe de seconde indifférenciée d'un thème constitué par la réalisation d'une tâche technique précise dont l'énoncé ne comporte pas de difficulté de compréhension. Je propose d'utiliser ce thème dès le début de l'étude de l'espace et même dès le début de l'étude de la géométrie en seconde.

Les élèves reçoivent dès l'abord du travail l'énoncé ci-dessous :

Le cube coupé en deux

ABCD est un carré de 10 cm de côté ; AA', BB', CC', DD' sont les 4 arêtes, perpendiculaires au plan ABCD, d'un cube ABCDA' B' C' D' .
Le point P est situé sur l'arête AB à 8 cm de A.
Le point Q est situé sur l'arête A'B' à 2 cm de A'.
Le point R est situé sur l'arête D'C' à 8 cm de D'.
Le plan PQR coupe le cube en deux morceaux.
On se propose de réaliser des maquettes (grandeur réelle) de ces 2 morceaux.
a) en carton mince,
b) en polystyrène expansé.
Question subsidiaire : volume des morceaux.

Pour les élèves il s'agit d'un thème très fermé ; les seules libertés qui leur sont laissées sont :
a) pousser plus ou moins loin la réalisation,
b) choisir des méthodes de réalisation et d'étude.

En développant ce thème, j'essayais d'apporter une réponse à une question posée à Clermont-Ferrand en juin par Michel Manivel : « Comment peut-on traiter un thème spatial sans avoir acquis préalablement un minimum de connaissances théoriques ? Quel est le minimum indispensable ? »

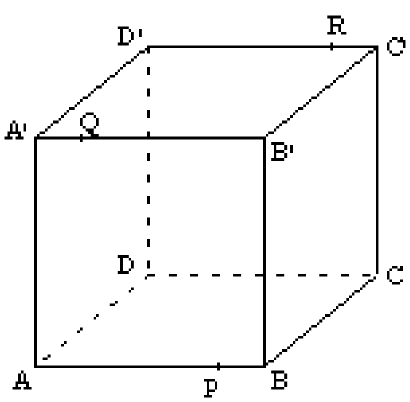
Je me proposais de persuader les participants du groupe qu'il est possible de commencer par un thème et de l'utiliser pour motiver les études théoriques qui conduisent aux résultats fondamentaux.
Le travail sur ce thème durera dans la classe pendant au moins 4 heures, probablment 6 heures, peut-être plus. Il importe qu'à chaque séance :
- la tâche technique progresse,
- des résultats généraux soient acquis et notés.

Dans ce que je vais écrire ici, il est difficile de discerner ce que j'avais prévu avant la séance, ce qui a été apporté par les participants et ce que j'ai modifié depuis la séance sous l'influence de ce qui a été dit.

Le découpage que je propose est seulement indicatif. Le maître doit être prêt à l'ajuster constamment suivant les réactions de la classe.

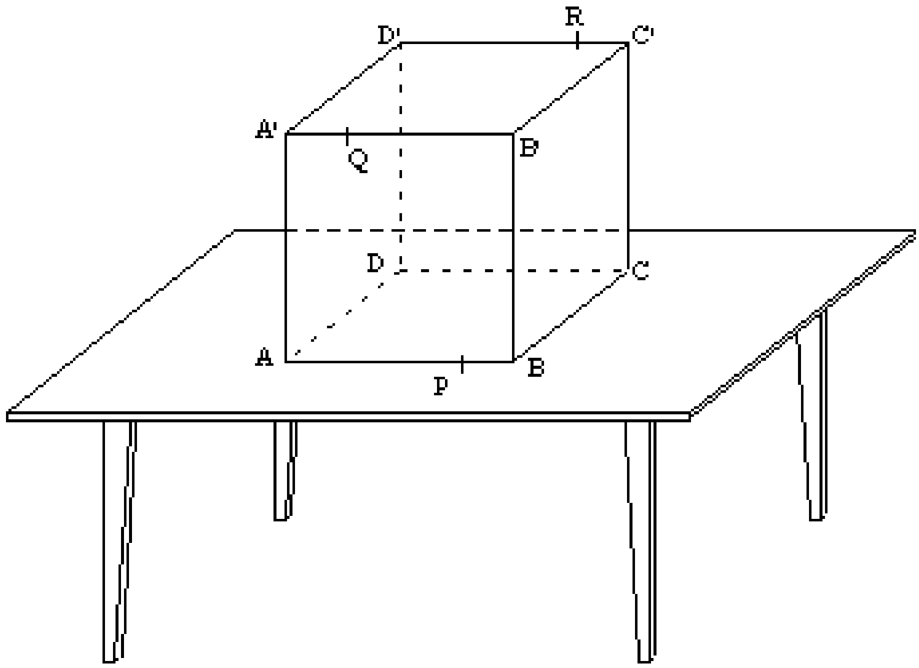
Première séquence (les séquences ne sont pas d'égales durées, celle-ci est courte)

Faire dessiner une figuration plane de la situation. Je pense que la grande majorité des élèves, à cause de leur vécu, donneront la représentation ci-dessous.



Un petit débat aura lieu dans le groupe sur cette question. Je crois que la plupart des participants ont été d'accord sur ce point.

Je crois qu'il y a même intérêt à représenter le cube posé sur une table.

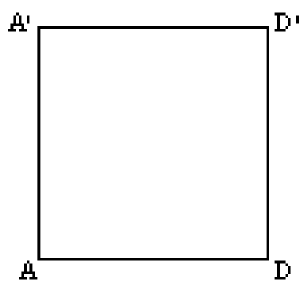


Contenus à dégager

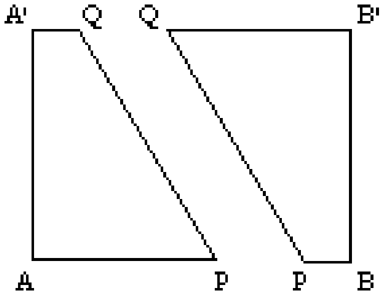
- par 3 points non alignés il passe un plan et un seulement,
- si une droite (PQ) a deux points dans un plan, elle y est contenue toute entière.

Deuxième séquence (plus longue)

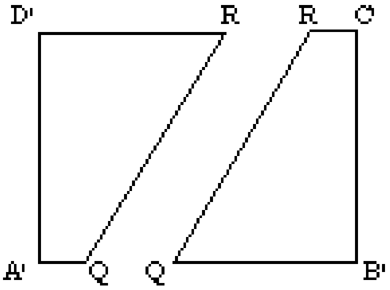
Faire amorcer la construction en papier.
Face de « gauche » du morceau de gauche



Le carré ADD'A' n'est pas coupé par le plan PQR. Je crois que pour les élèves aucun problème ne se pose. Il ne serait pas opportun de couper les cheveux en quatre.

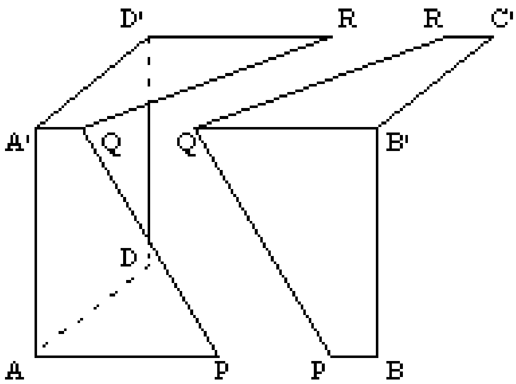


Faces avant : pas de problème



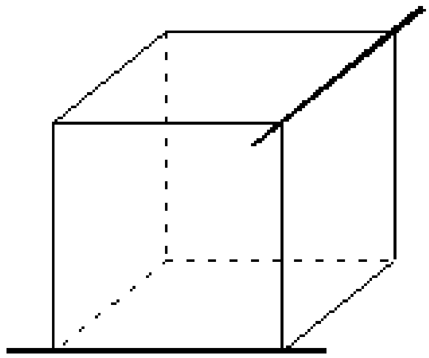
Faces supérieures : pas de problème

Faire réaliser les morceaux ci-dessus en vraie grandeur dans le carton prévu par l'énoncé et les assembler en scotchant. Faire dessiner ce que nous avons obtenu.

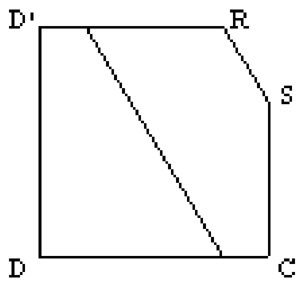


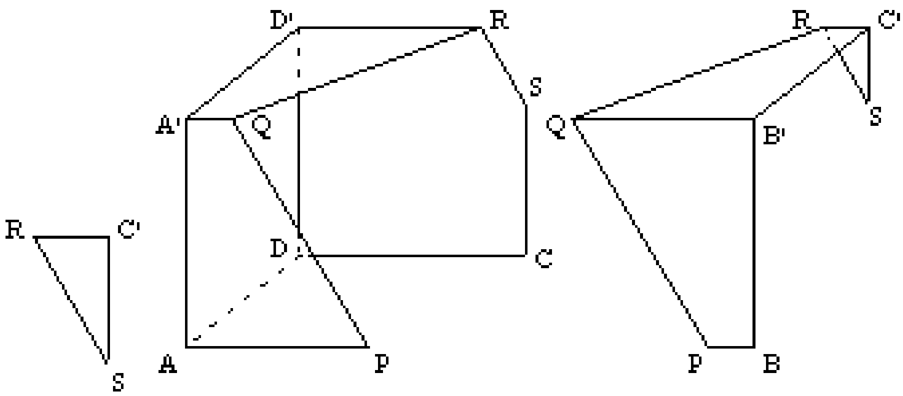
Troisième séquence

Poursuite de la construction en papier. Face arrière : il faut reconnaître que le plan PQR coupe les faces arrière et avant suivant des droites parallèles.



A cette occasion, on discutera les positions relatives de 2 droites dans l'espace et on exhibera, sur le cube c'est facile, des droites qui n'ont aucun point commun sans être parallèles.





Contenus à dégager dans la synthèse

- si deux plans distincts ont un point commun, alors ils ont une droite commune,
- positions relatives de deux droites dans l'espace,
- notion de plans parallèles,
- positions relatives de deux plans,

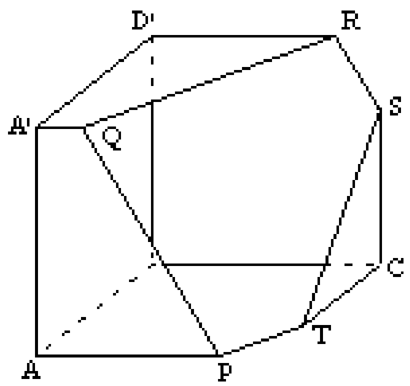
sections par un plan (¶) de deux plans (¶') et (¶'')

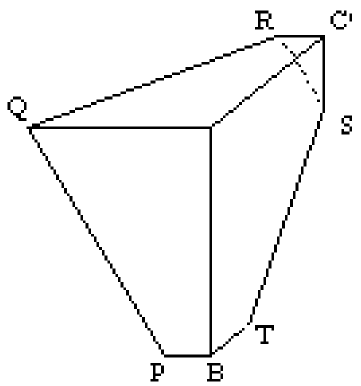
- et aussi figuration des droites parallèles en perspective cavalière.

Quatrième séquence

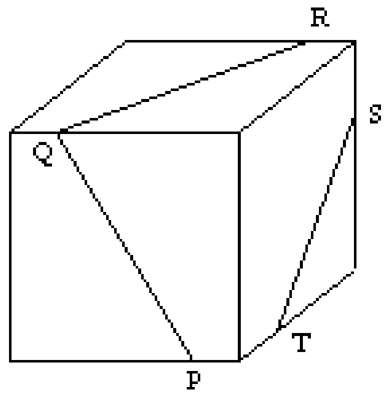
Réinvestissement de ce qui précède pour déterminer les faces inférieures (pas de nouvelle difficulté) et détermination des faces de droite.

Assembler.





Remarque : quelques participants ont pensé que les élèves pourraient préalablement chercher l'intersection avec la face de droite de la manière suggérée par le croquis ci-dessous et en déduire les intersections avec la face arrière et la face inférieure.



Cinquième séquence

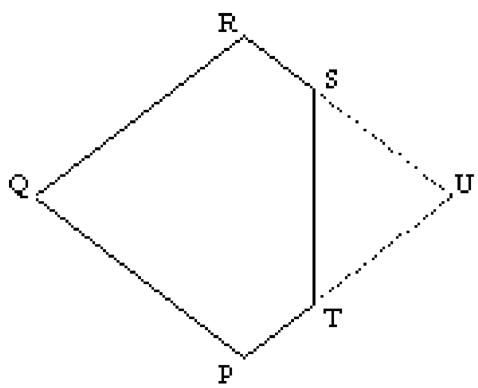
Etude de la face PQR.

Cette séquence est difficile.

Il nous a semblé que, dans un premier temps, les élèves verraient bien :

a) que la face a 5 côtés,

b) que PQ et RS sont parallèles ainsi que QR et PT.



Nous avons pensé qu'ils auraient, de la même manière, PT = RS et la longueur commune est construite.

La difficulté provient de la détermination de « l'aplatissement » du losange PQRU. Les méthodes envisageables sont variées. Il serait bien que les diverses équipes dans la classe trouvent des méthodes diverses. La synthèse serait riche.

Il a semblé au groupe qu'il ne serait pas mauvais d'exploiter les particularités dimensionnelles déjà signalées pour obtenir : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{BC'}$ et PR = $10\sqrt{2}$ cm.

La construction en résulte.

Avec un énoncé modifié, pour éviter cette particularité, que peut-on faire ?

a) En coupant par deux plans passant par P et R parallèles à ADD'A', on isole un pavé sur lequel PR est une diagonale. La longueur PR en résulte d'après le programme de 3ème.

b) En coupant par le plan perpendiculaire au plan ABCD et passant par P et R, on obtiendra graphiquement le même renseignement. Ce sera l'occasion d'introduire la notion de plans perpendiculaires.

c) En choisissant un repère orthonormé (la situation s'y prête), on pourra; grâce au produit scalaire $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}$; calculer l'angle Q.

Mais peut-être cela devra-t-il être repris en première.

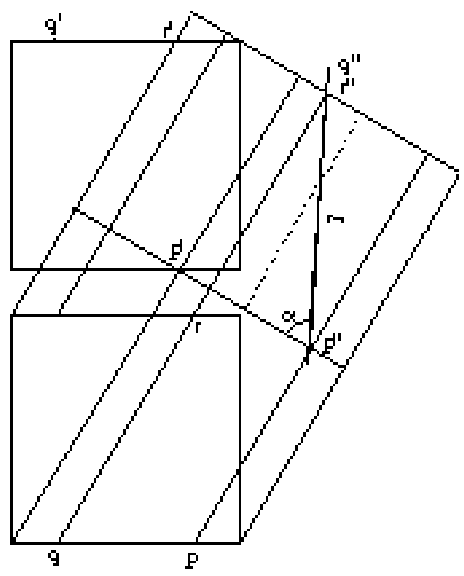
d) En coupant par un plan perpendiculaire à la direction QR, on obtiendra la distance P des parallèles PT et QR.

Ce renseignement permettra à la fois d'achever les constructions en carton et de régler le filicoupeur pour la seconde réalisation demandée.

La voie d) permet et demande de préciser les contenus apparentés aux notions de :

- droite perpendiculaire à un plan,
- plans perpendiculaires,
- dièdre.

Pour toute cette partie, la figuration en perspective cavalière est inadéquate. C'est une occasion d'introduire la figuration de Monge et de pratiquer un changement du plan frontal de projection (ou de choisir d'emblée des particularités de manière pertinente). Voyez la figure*.



* NDLR
Nous, la figure, on l'a vue. Mais, pour être honnêtes, on n'a pas tout compris !
Alors, si un lecteur peut nous expliquer…

Objectifs poursuivis

A) Au groupe de travail d'Orléans :

- persuader les participants qu'on peut partir d'un problème et, chemin faisant, dégager une bonne partie des résultats théoriques qu'on souhaite obtenir dans la classe,
- persuader les participants que cette méthode conduit les élèves à une bonne attitude vis-à-vis de la géométrie et, plus généralement, des maths,
- persuader les participants que, sans partir d'une axiomatique, on peut néanmoins raisonner et déduire.

B) Dans la classe de seconde :

- donner aux élèves la bonne attitude mentionnée ci-dessus,
- contribuer à former la vision de l'espace, faire acquérir quelques résultats théoriques.

La tâche technique (couper le cube) est un thème. Pour les élèves, elle apparaît comme le but et il est bien qu'il en soit ainsi. Elle apporte la motivation et l'encouragement. Elle ne doit pas être dévalorisée aux yeux des élèves.

Elle est le moyen de validation des connaissances et des méthodes de travail acquises.

Prolongement possible pour les plus rapides : problème analogue, mais avec 3 points choisis de manière plus vicieuse, ce qui exigera de faire intervenir des points extérieurs.

P sur le segment AB

Q sur le segment A'D'

R sur le segment CC'

Remarques diverses

- Je considère comme essentiel que le thème concerne une figure « épaisse ».
- Il me semble intéressant que le thème soit fermé. Il ne s'agit pas d'étudier dans l'abstrait et le vague « les » sections planes du cube.
- Peut-être pourra-t-on, dans les diverses équipes de la classe, varier les données, mais pour chacune d'elles, le problème sera fermé.