IV. Annexe : La méthode géométrique pour évaluer les $S_q(n)$ pour $q \geq 4$, application à une formule de récurrence algébrique

A. Prolongement de la méthode géométrique

On se place donc cette fois en dimension $q+1$, $q \geq 3$ (ou 4 si on ne veut pas effrayer certains élèves). Le volume cherché est celui de la réunion de n "hypercubes" d'arêtes de longueurs 1, 2, 3, …, n, qui est la différence entre le volume du pavé de côtés de longueurs $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, n, n, …, n, et celui de la réunion de $n-1$ cylindres de bases des équerres généralisées de volumes q-dimensionnels $(k+1)^q - k^q$ et de hauteurs les sommes $1+2+3+\ldots+k$: voir la figure 5, dont le dessin par les élèves (après recherche et conjectures) serait le pas décisif pour développer une intuition "hypergéométrique", par exemple en dimension 4. On obtient ainsi la formule

$$S_{q+1}(n) = n^q \, \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} (1+2+3+\ldots+k)\big[(k+1)^q - k^q\big]. \tag{6}$$

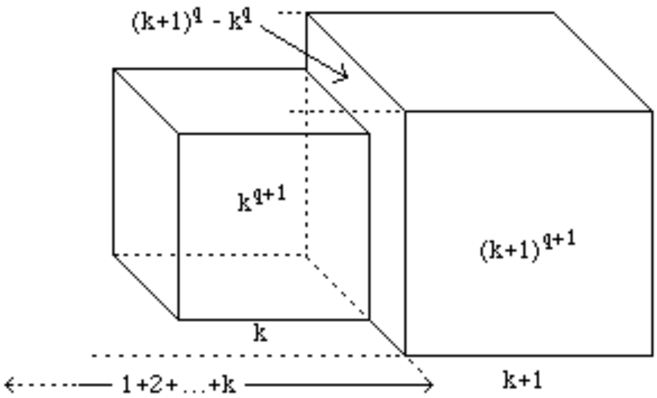

Figure 5

Pour $q=2$, on retrouve la formule (4), et pour $q=1$, la formule (2). Le cas $q=0$ redonne directement $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Par contre, le cas $q=-1$ donne $S_0(n) = n$, ce qui n'est pas en accord avec la convention $S_0(n) = n+1$ que nous avons rappelée, et qui se révèle utile dans plusieurs questions (voir par exemple la formule (10)). Cette formule (6) est donc valable pour $q \geq 0$, et on peut l'énoncer sous la forme suivante :

Théorème 1. *Si $q \geq 0$, on a la formule générale*

$$S_{q+1}(n) = \frac{n^{q+1}(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}\big[(k+1)^q - k^q\big]. \tag{7}$$

Remarque 5. Là encore, il est aisé de voir qu'évaluer $S_{q+1}(n)$ par différence entre le volume du pavé et la somme de ceux des cylindres de hauteurs k et de bases en forme d'équerres de volumes q-dimensionnels $n^q - k^q$ ne donne rien d'autre que …$0=0$!

Regardons ce que donne cette formule pour $q = 3$, c'est-à-dire pour la recherche de la somme $S_4(n)$:

$$S_4(n) = \frac{n^4(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}\Big[(k+1)^3 - k^3\Big] = \frac{n^4(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)(3k^2+3k+1)$$

$$= \frac{n^4(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(3k^4 + 6k^3 + 4k^2 + k\big)$$

$$= \frac{n^4(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\Big[3\big(S_4(n) - n^4\big) + 6\big(S_3(n) - n^3\big) + 4\big(S_2(n) - n^2\big) + \big(S_1(n) - n\big)\Big].$$

On en déduit en multipliant par 2 la relation précédente

$$5S_4(n) = n^5 + 4n^4 + 6n^3 + 4n^2 + n - \frac{3}{2}\,n^2(n+1)^2 - \frac{2}{3}\,n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\,n(n+1),$$

d'où, après multiplication par 6 :

$$30S_4(n) = 6n(n+1)^4 - 9n^2(n+1)^2 - 4n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)$$

$$= n(n+1)\Big[6(n+1)^3 - 9n(n+1) - 4(2n+1) - 3\Big]$$

$$= n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

On obtient finalement l'expression

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{8}$$

B. Une formule de récurrence générale

Au-delà de ce qu'on peut faire avec des élèves de terminale, nous proposons, pour le lecteur qui veut pousser un peu plus loin ce que peut donner l'approche géométrique ici choisie, une formule de récurrence *opérationnelle* entre les $S_q(n)$.

On va déduire du théorème 1 une telle relation de récurrence, en simplifiant un peu la méthode utilisée dans l'exemple du calcul de $S_4(n)$.

Théorème 2. *Si $q \geq 0$, on a la relation de récurrence suivante, qui permet de calculer les S_r pour $r \geq 1$:*

$$(q+2)S_{q+1}(n) = n(n+1)^{q+1} - \sum_{p=1}^{q}\binom{q+1}{p-1}S_p(n) \tag{9}$$

(avec la convention classique que toute somme $\sum_{p=r}^{s}$ *est nulle si* $s < r$*).*

Démonstration du théorème 2. Dans la relation (7), on développe $(k+1)^q - k^q$ sous la forme $\sum_{p=0}^{q-1} \binom{q}{p} k^p$, on développe aussi les termes $\frac{k(k+1)}{2}$ et *on intervertit les sommations en* p *et en* q (ce qu'on n'avait pas fait explicitement dans le cas $q = 3$). On obtient

$$S_{q+1}(n) = \frac{n^{q+1}(n+1)}{2} - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\binom{q}{p}}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^{p+2} + k^{p+1})$$

$$= \frac{n^{q+1}(n+1)}{2} - \sum_{p=0}^{q-1} \frac{\binom{q}{p}}{2} (S_{p+2}(n) - n^{p+2} + S_{p+1}(n) - n^{p+1}).$$

En faisant passer le terme $\frac{\binom{q}{q-1}}{2} S_{q+1}(n)$ de la somme dans le membre de gauche, et en multipliant par 2, on trouve :

$$(q+2)S_{q+1}(n) = n^{q+1}(n+1) + \sum_{p=0}^{q-1} \binom{q}{p} (n^{p+2} + n^{p+1}) - \sum_{p=0}^{q-2} \binom{q}{p} (S_{p+2}(n) + S_{p+1}(n)) - qS_q(n).$$

Les deux premiers termes du membre de droite se simplifient en $(n^2 + n)(n+1)^q = n(n+1)^{q+1}$. Après une transformation d'Abel élémentaire (on regroupe les deux termes en $S_p(n)$: $S_p(n)\big[\binom{q}{p-1} + \binom{q}{p-2}\big]$), et compte-tenu de la relation $\binom{q}{p-1} + \binom{q}{p-2} = \binom{q+1}{p-1}$, les autres termes donnent la somme $-\sum_{p=1}^{q} \binom{q+1}{p-1} S_p(n)$; ce qui achève de prouver la formule (9) du théorème 2. $\square$

Remarque 6. On déduit immédiatement par récurrence de cette formule que $S_q(n)$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est $\frac{n^{q+1}}{q+1}$. Classiquement ceci suffit à prouver que $\int_0^x t^q \, dt = \frac{x^{q+1}}{q+1}$, par passage à la limite dans les sommes de Darboux.

Remarque 7. Il y a une méthode purement algébrique pour trouver une formule de récurrence analogue à la formule (6), mais elle est artificielle : on développe successivement $(n+1)^{q+2}$, $(n-1+1)^{q+2}$, $(n-2+1)^{q+2}$, $\ldots$, $(1+1)^{q+2}$, et on somme les expressions obtenues. On obtient la formule

$$(q+2)S_{q+1}(n) = (n+1)^{q+2} - \sum_{p=0}^{q} \binom{q+2}{p} S_p(n). \tag{10}$$

Dans cette formule, il faut convenir effectivement que $S_0(n) = n + 1$. Trois lignes de calcul permettent aisément de passer de la formule (10) à la formule (9), ou inversement. L'avantage de la méthode que nous proposons est d'être de nature d'abord géométrique, avec interprétation "naturelle" des puissances comme des longueurs, des aires, des volumes, . . . , des hypervolumes. . .

Remarque 8. On trouve dans [11] la relation suivante, due à Alhazen :

$$S_{q+1}(n) = (n+1)S_q(n) - \sum_{k=1}^{n} S_q(k). \tag{11}$$

Cette relation a le mérite de ne faire intervenir que la fonction S_q, mais le défaut de faire intervenir toutes ses valeurs pour $k = 1, 2, \ldots, n$, ce qui ne la rend utilisable que pour les petites valeurs de q.

Remarque 9. On connaît une expression de $S_q(n)$ au moyen des polynômes de Bernoulli :

$$S_q(n) = \frac{1}{q+1}\Big[B_{q+1}(n+1) - B_{q+1}(0)\Big], \tag{12}$$

où les polynômes de Bernoulli $B_p(t)$ sont définis par

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\, B_p(t)\, x^p \tag{13}$$

(voir [3], chapitre VI, §1, $n^o 4$ et exercice 5, ou [7], annexe 1). Pour exploiter cette formule, il faut alors disposer de formules récurrentes sur les polynômes et les nombres de Bernoulli (voir par exemple [3]).