Entrée à Sciences Po

4 heures

Le problème se compose de 5 parties.
Les calculatrices sont autorisées.
Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Problème

Le problème examine différents aspects de l'utilisation d'un ensemble de fonctions introduit dans la partie III et motivé dans la partie II.
À ce fil conducteur près, on peut considérer les parties comme indépendantes, mais les résultats de la partie I sont utiles dans la partie II.

I. Des arcs d'hyperboles

À tout réel m élément du segment $[0\,;\,1]$, on associe la fonction f_m, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f_m(x) = \frac{m}{1-x},$$

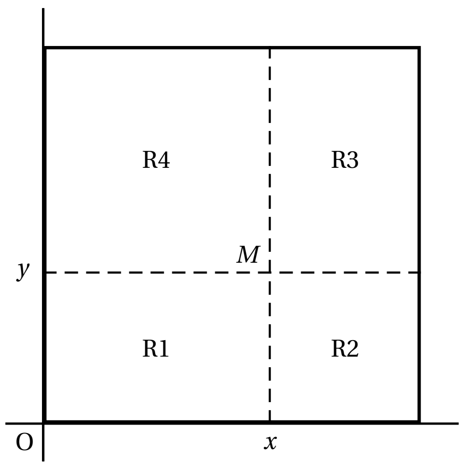
et la fonction g_m définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par :

$$g_m(x) = -\frac{m}{x}.$$

1. Quel est le sens de variation de chacune des fonctions f_m et g_m ?
2. Résoudre les équations :
$$f_m(x) = 1 \quad \text{et} \quad g_m(0) = 0.$$
3. Pour quelles valeurs du réel m l'équation $g_m(x) = f_m(x)$ a-t-elle des solutions ?
4. Représenter sur un même graphique les fonctions f_m et g_m. On distinguera plusieurs cas, selon le nombre de solutions de l'équation précédente et on fera une figure illustrant chaque cas.

II. Des lignes de niveau

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le carré unité OIDJ. Pour chaque point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ intérieur au carré, les parallèles aux axes du repère déterminent quatre rectangles marqués R1, R2, R3 et R4.



1. Exprimer, en fonction des coordonnées de M, les aires des rectangles R1, R2, R3 et R4.
2. On note $A(x\,;\,y)$ la plus grande des aires obtenues.
Pourquoi est-on assuré que
$\frac{1}{4} \leqslant A(x\,;\,y) \leqslant 1$?

3. Montrer que, pour tout couple $(x\,;\,y)$ de réels de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $A(x\,;\,y) = A(y\,;\,x)$.
4. Résoudre dans $[0\,;\,1]$ l'inéquation $t \geqslant 1 - t$. En déduire une expression explicite de $A(x\,;\,y)$ en fonction de x et y (on distinguera quatre cas).
5. Pour tout réel m du segment $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,1\right]$, on note L_m la ligne de niveau m de l'application A c'est-à-dire l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $A(x\,;\,y) = m$.
   a. Déterminer – en utilisant la distinction en quatre cas précédente – une équation de la ligne de niveau L_m.
   b. Tracer sur un même graphique les lignes de niveau $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$.

III. Étude d'un ensemble de fonctions affines par morceaux

Pour tout couple $(t\,;\,x)$ de réels compris entre 0 et 1, on pose :

$$\begin{array}{lcll} K(t\,;\,x) & = & x(1-t) & \text{si} \quad x \leqslant t \\ K(t\,;\,x) & = & t(1-x) & \text{si} \quad x > 1 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $K(t\,;\,x) = 0$.
2. On donne un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   a. Étudier la fonction k_t, définie sur $[0\,;\,1]$ par :
   $$k_t(x) = K(t\,;\,x).$$
   b. Montrer que la fonction k_y, présente un maximum.
3. En déduire qu'il existe un couple $(t_0\,;\,x_0)$ de réels compris entre 0 et 1 tel que, pour tout couple $(t\,;\,x)$ de réels compris entre 0 et 1, on ait : $K(t_0\,;\,x_0) \geqslant K(t\,;\,x)$.

IV. Un noyau pour transformer des fonctions

Dans cette partie, la fonction K, composée d'une certaine manière avec des fonctions, permet de leur associer d'autres fonctions. On reprend la notation de la partie III et, à toute fonction f définie et continue sur le segment $[0\,;\,1]$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\widehat{f} = \int_0^1 K(t\,;\,x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 k_t(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 K(t\,;\,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t (1-t)x\,\mathrm{d}x + \int_t^1 t(1-x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer $h(t) = \displaystyle\int_0^1 K(t\,;\,x)\mathrm{d}x$. (On pourra interpréter $h(t)$ comme une aire)
2. On appelle s la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :
   $$s(x) = \sin(2\pi x).$$
   Déterminer la fonction $\widehat{s}$. (On pourra utiliser le procédé d'intégrations par parties).
   On note E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0\,;\,1]$ et prenant la valeur 0 en 0 et 1.
3. Montrer que, pour toute fonction g appartenant à E, on a aussi $\widehat{g}(0) = \widehat{g}(1) = 0$.

4. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à E, la fonction $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde.
Exprimer $\left(\widehat{f}\right)''$ en fonction de f.

5. Soit g une fonction appartenant à E. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $f'' = g$ appartenant elles aussi à E ? Combien y en a-t-il ?

V. . . . et pour construire une suite

Soit t un réel donné dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$. On considère la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel} n \left\{\begin{array}{lcl} x_{2n+1} & = & t\,(1 - x_{2n}) \\ x_{2n+2} & = & (1-t)\,x_{2n+1} \end{array}\right.$$

1. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = x_{2n+1}$.
Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n.
Prouver l'existence de deux nombres réels α et β tels que, pour tout entier naturel n, on puisse écrire :

$$y_{n+1} - \beta = \alpha\left(y_n - \beta\right)$$

2. La suite $\left(y_n\right)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. On pose, de la même manière, pour tout entier naturel n, $z_n = x_{2n}$.
La suite (z_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

4. La suite (x_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.