Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient 2

Sciences Po - Samedi 23 février 2019

L'exercice Vrai-Faux est noté sur 11*, le problème est noté sur* 9*. Vous devez traiter les deux exercices. Les calculatrices sont autorisées.*

EXERCICE VRAI ou FAUX

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant soigneusement la réponse.

Question 1.

Les prix réglementés du gaz évoluent mensuellement. En mai 2018, ils ont augmenté de 0,4 %, en juin 2018 de 2,1 % et en juillet 2018 de 7,45 %.
Affirmation : l'augmentation cumulée sur ces trois mois est de 9,95 %.

Question 2.

Affirmation : toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.

Question 3.

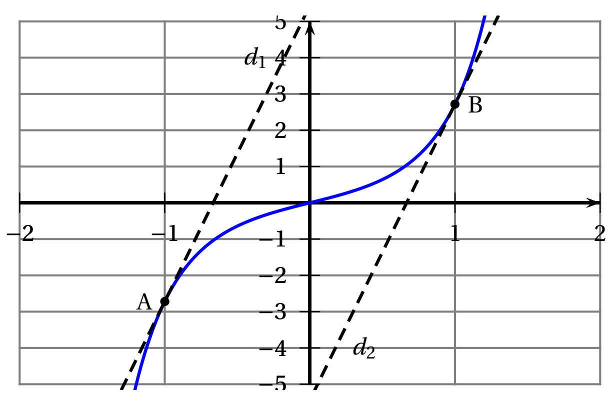
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Question 4.

Affirmation : l'équation $\ln(4x + 5) + \ln(x + 1) = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Question 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.



Affirmation : d_1 et d_2 sont parallèles.

Question 6.

Un cycliste part de chez lui à 8 h 00 et doit parcourir une distance de 61 km pour arriver à son point d'arrivée à 9 h 30 au plus tard.
Son parcours est constitué d'une descente de 16 km qu'il parcourt à la vitesse de 80 km/h, puis de 40 km de plat qu'il parcourt à la vitesse de 50 km/h, et enfin d'une montée de 5 km qu'il parcourt à une vitesse de x km/h.
Affirmation : le cycliste sera à l'heure si et seulement si $x \geqslant 10$.

Question 7.

Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + f^2(x)$ et $f(1) = 0$.
Affirmation : f est strictement positive sur $[-1\ ;\ 0]$.

Question 8.

Une urne contient n boules numérotées, indiscernables au toucher. Une boule porte le numéro 10, trois boules portent le numéro 5 et les boules restantes portent le numéro 0.
Après avoir misé 1 €, un joueur tire au hasard l'une des boules et remporte la somme affichée sur la boule.
Affirmation : le jeu est équitable si et seulement si $n = 25$.

Question 9.

Une pièce de monnaie est mal équilibrée.
La probabilité de tomber sur FACE est deux fois plus grande que celle de tomber sur PILE.
On lance 15 fois successivement la pièce.
Affirmation : la probabilité de tomber exactement 10 fois sur FACE est supérieure à 0,2.

Question 10.

Dans un repère on considère quatre points : A$(1\,;\,1)$, B$(4\,;\,1)$, C$(4\,;\,2)$ et D$(1\,;\,2)$.
On définit les points M, N et P par :
$\overrightarrow{\text{DM}} = -2\overrightarrow{\text{BD}}$, $\overrightarrow{\text{CN}} = 5\overrightarrow{\text{CA}}$ et $\overrightarrow{\text{BP}} = 3\overrightarrow{\text{AB}}$.
Affirmation : les points M, N et P sont alignés.

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) + 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

Partie A

1. Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur I. Montrer que, pour tout $x \in I,\ f'(x) = 1 + \ln(x)$.
3. Etudier les variations de f sur I. Montrer que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte.
4. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. On pose, pour tout $x \in I,\ g(x) = f(x) - x$.
   a. Étudier les variations de g sur I. On ne demande pas de calculer les limites.
   b. En déduire le signe de g sur I.
   c. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ sur I.

Partie B

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans I.
2. Démontrer sans utiliser la calculatrice que $\alpha \leqslant 2$.
3. On admet que $\alpha^2 - \alpha \geqslant 1$.
   a. Montrer que $\alpha \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   b. En déduire un encadrement de α à 0,2 près.
4. On souhaite obtenir un encadrement de α à 0,001 près. Proposer l'écriture d'un algorithme qui répond à cette question.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée α_n dans I.
2. Préciser la valeur de α_1.
3. Démontrer que la suite (α_n) est croissante.
4. Démontrer que la suite (α_n) n'est pas majorée.
5. Conclure quant à la convergence de la suite (α_n).

Partie D

On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de I et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si $u_0 = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On suppose que $u_0 \in]0\ ;\ 1[$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   c. On admet que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ.