Entrée à Sciences Po

ADMISSION AU COLLÈGE UNIVERSITAIRE 2016

Samedi 20 février 2016

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Les calculatrices sont autorisées.

Problème

La partie A est indépendante des parties B et C

Partie A

Une banque propose un contrat d'assurance vie qui fonctionne de la façon suivante. À l'ouverture du contrat en janvier 2016, le client dépose 5 000 euros. Le 31 décembre de chaque année, la banque ajoute des intérêts à hauteur de 2 %. Puis chaque année, le 1er janvier, le client dépose 500 euros. Les intérêts produits une année engendrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.
On note I_n le solde de l'assurance vie au 1er janvier de l'année $(2016+n)$. Ainsi $I_0 = 5000$.

1. Calculer I_1, I_2 et I_3.
2. Montrer que pour tout entier n, $I_{n+1} = 1,02 I_n + 500$.
3. On note (K_n) la suite définie pour tout n par $K_n = I_n + 25000$. Montrer que la suite (K_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de K_n puis celle de I_n en fonction de n.
5. Justifier que la suite (I_n) tend vers $+\infty$.
   Écrire un algorithme permettant de déterminer l'année au bout de laquelle le solde de l'assurance serait supérieur à 20 000 euros. Déterminer cette année.

Partie B

Soit f la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par

$$f(x) = \frac{30x-16}{15x-2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(1)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{180}{(15x-2)^2}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f pour $x \geqslant 1$.
4. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

Partie C

Un cadre de la banque envisage la commercialisation d'un produit financier dont la valeur, en centaines d'euros à la fin de l'année $(2016 + n)$, serait modélisée par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. On introduit la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{15u_n - 20}{15u_n - 12}$$

a. Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie.

b. Calculer v_0, v_1 et v_2.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $-\dfrac{5}{3}$ et de raison $\dfrac{5}{9}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. Après avoir donné l'expression de u_n en fonction de v_n, démontrer que

$$u_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}.$$

e. Établir un algorithme permettant de déterminer la première année pour laquelle le taux de variation de ce produit financier sera inférieur à 2 %.

Déterminer cette année.

Exercice : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On dispose d'un dé à quatre faces bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Un joueur qui lance le dé gagne 3 euros s'il tombe sur 4, 1 euro s'il tombe sur 1 et perd 2 euros sinon.

   On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   Proposition : l'espérance de G est nulle.

2. Une urne contient 15 chaussettes vertes et 5 chaussettes bleues. Une personne tire successivement et sans remise deux chaussettes.

   Proposition : la probabilité qu'il obtienne deux chaussettes de la même couleur, arrondie à 10^{-3}, est égale à $0,605$.

3. Une usine fabrique des assiettes en grande quantité. On admet que 4 % des assiettes fabriquées sont cassées. On prélève au hasard 100 assiettes, et on considère que le stock d'assiettes disponibles est très important.

   Proposition : la probabilité qu'au moins 99 assiettes ne soient pas cassées est supérieure à $0,1$.

4. Soient $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère et (D) la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

   Proposition : la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D).

5. Dans un repère orthonormé, on note (d) la droite, passant par A$(2\,;\,1)$ et parallèle à la droite (d') d'équation $x-2y+3=0$.

   Proposition : (d) a pour équation $y=\dfrac{x}{2}$.

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2-1\right)\ln(x)$.

   Proposition : dans un repère orthonormé, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est horizontale.

7. Dans un repère orthonormé, on désigne par A, B et C les points de coordonnées A$(1\,;\,3)$,B$(6\,;\,4)$ et C$(7\,;\,-1)$.

   Proposition : le triangle ABC est rectangle isocèle.

8. **Proposition :** Pour tout réel x, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$.

9. Soit (u_n) une suite croissante minorée.

   Proposition : la suite (u_n) converge.

10. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive et croissante.

    Proposition : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

FIN