Sciences Po Paris 2012
Mathématiques
Solutions

Partie 1 : Le modèle de Malthus

1. **Modèle discret**

   a. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} - P_n = kP_n$ donc $P_{n+1} = (1+k)P_n$.
   Par suite la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$.

   b. Comme la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$ alors :
   - (P_n) est croissante si $1+k>1$ d'où si $k>0$;
   - (P_n) est constante si $1+k=1$ c'est à dire $k=0$;
   - (P_n) est décroissante si $0<1+k<1$ d'où $-1<k<0$.

   c. Comme $P_0>0$ et la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$ alors on a :
   - si $k+1>1$ d'où $k>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$;
   - si $k+1=1$ d'où $k=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$;
   - si $0<k+1<1$ d'où $-1<k<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

   d. Interpréter les résultats des questions **b.** et **c.** en termes d'évolution de population.
   On déduit des questions précédentes que suivant le modèle de Malthus discret, alors :
   - si $k>0$, la population croit, que cette croissance ne ralentit jamais et que la population augmente indéfiniment ;
   - si $k=0$, la population n'évolue pas ;
   - si $-1<k<0$, la population décroît et finit par s'éteindre.

2. **Modèle continu**

   a. La fonction P est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ donc on sait que $P(t) = C\mathrm{e}^{kt}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
   De plus comme $P(0) = P_0$, on en déduit $C = P_0$ d'où $P(t) = P_0\mathrm{e}^{kt}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.

   b. Comme pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $P'(t) = kP(t)$ et que $P(t) \geqslant 0$, alors $P'(t)$ est du signe de k.
   Ainsi :
   - si $k>0$, la fonction P est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$;
   - si $k=0$, la fonction P est constante égale à P_0 sur $[0\ ;\ +\infty[$;
   - si $k<0$, la fonction P est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. On a λ défini par $P(\lambda) = 2P_0$ d'où $P_0\mathrm{e}^{k\lambda} = 2P_0$.
   On obtient donc $k\lambda = \ln(2)$ d'où $\lambda = \frac{\ln(2)}{k}$.
   La population double en 50 ans donc $\lambda = 50$ans ainsi $k = \frac{\ln(2)}{50}$.
   Par suite l'instant t tel que $P(t) = 3P_0$ est solution de l'équation $P_0\mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{50}t} = 3P_0$.
   On obtient donc $\frac{\ln(2)}{50}t = \ln(3)$ d'où $t = 50\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 79,2$ans.
   On peut remarquer que P_0 n'intervient pas dans le résultat. Ainsi quel que soit le moment, la population aura doublé en 50 ans et triplé en $\approx 79,2$ans.

d. Soit $k > 0$.

On a $\mu = \frac{1}{T-0}\int_0^T P_0 \mathrm{e}^{kt}\,dt$ d'où $\mu = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\right]_0^T = \frac{P_0}{kT}\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)$.

On a λ tel que $\mathrm{e}^{k\lambda} = 2$ et $\lambda = \frac{\ln(2)}{k}$ donc la population moyenne sur $[0;\lambda]$ est donnée par $\mu = \frac{P_0}{k\times\frac{\ln(2)}{k}}(2-1) = \frac{P_0}{\ln(2)} \approx 1,44P_0$.

3. **Comparaison des deux modèles**

On a montré que pour le modèle discret, P_n est une suite géométrique de raison $1+k = 1,1$ et de premier terme $P_0 = 1\,000$ donc pour tout entier naturel n, $P_n = 1000\times(1,1)^n$.

Par suite $P_{10} \approx 2\,594$ individus et $P_{100} = 13\,780\,612$ individus.

Pour le modèle continu, on obtient $P(10) = 2\,718$ individus et $P(100) = 22\,026\,466$ individus.

Le modèle continu augmente plus vite que le modèle discret.

Pour 10 années écoulées, les 2 résultats obtenus sont presque du même ordre de grandeur mais pour 100 ans le modèle continu donne une population pas loin du double de celle obtenue avec le modèle discret.

Partie 2 : Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telles que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1-\frac{P_n}{M}\right)$.

1. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1-\frac{P_n}{M}\right)$ d'où $P_{n+1} = (1+k)P_n - \frac{k}{M}{P_n}^2 = f(P_n)$ avec $f(x) = (1+k)x - \frac{k}{M}x^2$.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si la suite (P_n) converge vers ℓ, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   Or l'équation $f(x) = x$ revient à $(1+k)x - \frac{k}{M}x^2 = x$ d'où $kx\left(1-\frac{1}{M}x\right) = 0$.

   Cette équation admet donc 2 solutions : $x = 0$ et $x = M$.

   Par conséquent si la suite (P_n) converge, elle converge vers 0 ou vers M.

2. On pose $r = 1+k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{k}{rM}P_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a $u_{n+1} = \frac{k}{rM}P_{n+1} = \frac{k}{rM}\left[(1+k)P_n - \frac{k}{M}{P_n}^2\right] = \frac{k}{M}P_n - \frac{1}{r}\left(\frac{k}{M}P_n\right)^2 = ru_n - \frac{1}{r}(ru_n)^2 = ru_n(1-u_n)$.

3. *Préliminaires :*

   a. On définit la fonction $g_{1,8}$ par $g_{1,8}(x) = 1,8x(1-x)$.

   La fonction g est une fonction du second degré dont les racines sont 0 et 1 et le coefficient des x^2 est $-1,8 < 0$.

   Par suite on sait que la fonction $g_{1,8}$ admet un maximum atteint en $x_0 = \frac{-1,8}{2\times(-1,8)} = \frac{1}{2}$ égal à $g_{1,8}(\frac{1}{2}) = 1,8\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0,45$ et que g est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

   On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

   On définit la proposition $\mathcal{Q}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   On sait que $u_0 = 0,8$ d'où $u_1 = 0,288 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

   On a alors $u_2 = 0,369\,100\,8 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et de plus $u_1 \leqslant u_2$.

   La proposition $\mathcal{Q}(1) : 0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \frac{1}{2}$ est donc vraie.

   Soit n un entier naturel non nul.

   On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors comme par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $u_{n+1} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ et comme la fonction $g_{1,8}$ est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on obtient $g_{1,8}(0) \leqslant g_{1,8}(u_n) \leqslant g_{1,8}(u_{n+1}) \leqslant g_{1,8}(\frac{1}{2})$ d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

La proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geqslant 1$, est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Par suite pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

On en déduit que :

- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) $n \geqslant 1$ est majorée par $\frac{1}{2}$;
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée.

Elle est donc convergente.

Alors comme on sait que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = g_{1,8}(u_n)$ avec $g_{1,8}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$, la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $x = g_{1,8}(x)$.
Résolvons cette équation.

L'équation $x = g_{1,8}(x)$ s'écrit $x = 1,8x(1-x)$ d'où $1,8x^2 - 0,8x = 0$ et donc $x(1,8x - 0,8) = 0$.

L'équation admet donc deux solutions $x = 0$ et $x = \frac{0,8}{1,8} = \frac{4}{9}$.

On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{4}{9}$.

Néanmoins comme $u_1 = 0,228 > 0$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0,288$ d'où $\ell \geqslant 0,288 > 0$.

Par conséquent $\ell = \frac{4}{9}$.

c. On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{9}$ et pour tout entier naturel n, $P_n = \frac{Mr}{k}u_n = \frac{M\times 1,8}{1,8-1}u_n = \frac{9}{4}Mu_n$.

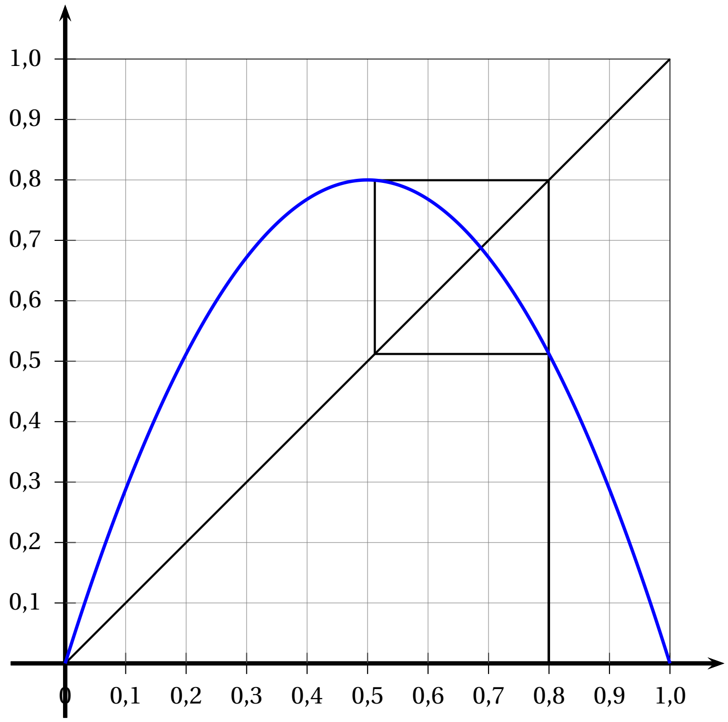
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{9}{4}M \times \frac{4}{9} = M$.

À long terme, la population a tendance à se stabiliser vers la constante M.

On peut considérer que suivant ce modèle M représente la capacité d'accueil du milieu dans lequel cette population vit.

4. Dans cette question **4.**, on suppose que $r = 3,2$ et $u_0 = 0,8$.

a. On obtient :



b. La suite semble osciller entre 2 valeurs : $\approx 0,8$ et $\approx 0,51$.

c. On obtient :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0,8000000	0,5120000	0,7995392	0,5128841	0,7994688	0,5130190

Les résultats montrent que les valeurs obtenus diffèrent légèrement.
La sous-suite des termes de rang pairs décroît légèrement à partir de 0,8 et la sous-suite des termes de rang impairs croît légèrement à partir de 0,512.

Remarque :

On peut montrer qu'en fait la suite converge vers la solution non nulle de l'équation $3,2x(1-x)=x$, c'est dire 0,6875.

Néanmoins la convergence dans ce cas est très lente.

5. a. Pour tout entier n, on a $u_{n+1} = g_5(u_n)$ avec $g_2 : x 5x(1-x)$.
La fonction g_2 est une fonction du second degré dont le coefficient des x^2 est $-5<0$.
Elle est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.
Par suite si $u_p > 1 > \frac{1}{2}$, $g_5\left(u_p\right) < g_5(1)$ d'où $u_{p+1} < 0$.
Démontrons par récurrence sur $n \geqslant p+1$ que $u_n < 0$.
On a montré que $u_{p+1} < 0$: la proposition est vraie au rang $p+1$.
Soit alors un entier $n \geqslant p+1$.
On fait l'hypothèse de récurrence $u_n < 0$.
Alors comme $u_n \in]-\infty\ ;\ 0[$, et comme g_5 est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on obtient $g_5(u_n) < g_5(0)$ d'où $u_{n+1} < 0$.
La proposition est héréditaire.
D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant p+1$.
Par suite pour tout entier $n \geqslant p+1$, $u_n < 0$.

b. On définit la fonction h par $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

On a donc $h(x) = -5x^2 + 4x$ pour tout réel $x \leqslant 0$.

Il est clair que pour tout réel $x \leqslant 0$, $-5x^2 \leqslant 0$ et de plus $4x \leqslant 0$ donc $h(x) \leqslant 0$.

Remarquons alors que pour tout entier $n \geqslant p+1$, comme d'après la question précédente, $u_n \in]-\infty\,;\,0[$, alors $h(u_n) \leqslant 0$.

Or $h(u_n) = g_5(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$.

Par suite pour tout $n \geqslant p+1$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite (u_n) est donc décroissante.

c. On raisonne par l'absurde.

On suppose la suite minorée.

Alors elle est décroissante minorée et donc convergente.

Comme pour tout entier n, $u_{n+1} = g_5(u_n)$ et que g_5 est continue sur $\mathbb{R}$, on sait donc que la limite ℓ de la suite est une solution de l'équation $g_5(x) = x$.

Donc de l'équation $5x^2 - 4x = 0$ c'est à dire $x(5x-4) = 0$.

Par suite $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{4}{5}$.

Or pour tout entier $n \geqslant p+1$, $u_n \leqslant u_{p+1} < 0$ donc $\ell \leqslant u_{p+1} < 0$: contradiction.

Par conséquent le suite (u_n) n'est pas minorée.

d. La suite $(u_n)_{n \geqslant p+1}$ est décroissante non minorée donc elle diverge vers $-\infty$.

En effet, quel que soit le réel M, il existe un entier N_M tel que $u_{N_M} < M$.

De plus comme la suite est décroissante, alors pour tout entier $n \geqslant N_M$, $u_n \leqslant u_{N_M} < M$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

e. Si $u_0 = 0,8$, on remarque que $u_1 = 0,8$.

Montrons par récurrence que (u_n) est constante égale à $0,8$.

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit n un entier. Supposons que $u_n = 0,8$.

Alors $u_{n+1} = 5 \times 0,8(1-0,8) = 5 \times 0,8 \times 0,2 = 0,8$.

La proposition est donc héréditaire.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

f. Pour $u_0 = 0,5$, on obtient $u_1 = 5 \times 0,5(1-0,5) = 1,25 > 1$ donc l'entier $p = 1$ convient.

Si $u_0 = 0,1$, alors $u_1 = 5 \times 0,1 \times (1-0,1) = 0,45$ d'où $u_2 = 5 \times 0,45 \times (1-0,45) = 1,2375 > 1$ donc l'entier $p = 2$ convient.

En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799\,999$, alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.

On obtient $u_{17} \approx 1{,}133\,741 > 1$ et $u_{16} \approx 0{,}347\,515 < 1$ donc $p = 17$ convient.

Un exemple de programme, en langage naturel :

Variables :	u, n
Initialisation	0,799 999->u 0->n
Traitement	Tant que u<1 faire 5u(1-u)->u n+1->n Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Les 3 exemples étudiés montre que la validité du modèle de Verhulst discret dépend fortement de la valeur de k.

Dans le premier cas, on obtient un modèle raisonnable.

Dans le deuxième cas, le modèle correspond moins bien à ce que l'on pourrait penser. La population oscille entre 2 valeurs autour de la capacité d'accueil.

Dans le dernier cas, ou la population n'évolue pas, ou elle disparaît.

Partie 3 : Modèle de Verhulst continu

1. **a.** On suppose que P est solution de (E).

On a donc $P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$.

D'autre part comme $P(t) > 0$ pour tout $t \in [0~;~+\infty[$ donc la fonction $Q = \frac{1}{P}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, $Q'(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)^2}$.

Par suite $Q'(t) = -\frac{kP(t)\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)}{P(t)^2} = -\frac{k}{P(t)} + \frac{k}{M} = -kQ(t) + \frac{k}{M}$.

Donc Q est solution de $\left(E'\right)$.

Réciproquement, soit Q une solution de $\left(E'\right)$: on a donc $Q'(t) = -kQ(t) + \frac{k}{M}$ d'où comme $Q = \frac{1}{P}$ et donc $Q' = -\frac{P'}{P^2}$, on obtient $-\frac{P'(t)}{P(t)^2} = -\frac{k}{P(t)} + \frac{k}{M}$ d'où $P'(t) = kP(t) + \frac{k}{M}P(t)^2 = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$ d'où P est solution de (E).

b. L'équation $\left(E'\right)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants donc on sait que les solutions de l'équation $\left(E'\right)$ sont les fonctions de la forme $Q : tQ(t) = C\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}, C \in \mathbb{R}$.

D'autre part on sait que $P(0) = P_0$ d'où $Q(0) = \frac{1}{P(0)} = \frac{1}{P_0}$ et donc la constante C vérifie $C + \frac{1}{M} = \frac{1}{P_0}$ d'où $C = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}$.

Ainsi l'équation $\left(E'\right)$ admet pour unique solution la fonction $Q : tQ(t) = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right)\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $Q(t) = \frac{1}{P_0}\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$.

Or pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-kt} \leqslant 1$ d'où $\frac{1}{M}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) \geqslant 0$ d'où comme $\frac{1}{P_0}\mathrm{e}^{-kt} > 0$, $Q(t) > 0$.

Donc les fonctions obtenues sont strictement positives sur $[0~;~+\infty[$ quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.

c. On sait que P est solution de (E) si et seulement si $Q = \frac{1}{P}$ est solution de $\left(E'\right)$.

Par suite comme les solutions de $\left(E'\right)$ sont les fonctions $Q : t\left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right)\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}$ avec $Q(t) > 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$, on en déduit que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions P définies par $P(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right)\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-kt}}$ pour tout $t \in [0~;~+\infty[$.

2. **a.** On a $P_0 = \frac{M}{1+C}$ d'où $(1 + C)P_0 = M$ et donc $C = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{M}{P_0} - 1$.

On en déduit donc que $C > 0$ si $\frac{M}{P_0} > 1$ d'où $M > P_0$, $C = 0$ si $M = P_0$ et $C < 0$ si $M < P_0$.

Le signe de C dépend donc de la position de P_0 par rapport à M.

b. Pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $P(t) = \frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ d'où $P'(t) = -\frac{-kMC\mathrm{e}^{-kt}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2} = C\frac{kM\mathrm{e}^{-kt}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2}$.

On sait que $\mathrm{e}^{-kt} > 0$, $\left(1 + C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2 > 0$, $M > 0$, $k > 0$ donc $P'(t)$ est du signe de C.

Donc :

- si $C > 0$, P est strictement croissante sur $[0;+\infty[$;
- si $C = 0$, P est constante égale à $M = P_0$ sur $[0;+\infty[$;
- si $C < 0$, P est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

c. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -kt = -\infty$ car $k > 0$ et on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0$.
Par suite $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 + C\mathrm{e}^{-kt} = 1 \neq 0$ et ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}} = M$.

d. D'après l'étude précédente, on déduit donc :
- si $P_0 < M$, la population croît et se rapproche de M;
- si $P_0 = M$, la population est constante égale à M;
- si $P_0 > M$, la population décroît et se rapproche de M.

On peut donc dire que M représente la population d'équilibre du milieu considéré et que dans tous les cas, la population tend vers cette population d'équilibre.

3. a. On a $\mu_T = \frac{1}{T-0}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{kT}\int_0^T \frac{k\mathrm{e}^{kt}}{\mathrm{e}^{kt}+C}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{kT}\ln\left(\mathrm{e}^{kt}+C\right)\Big]_0^T =$
$\frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT}+C\right) - \ln(1+C)\right)$.

b. Pour tout $T \in [0;+\infty[$, on a $\mu_T = \frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT}+C\right) - \ln(1+C)\right) =$
$\frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT}\right) + \ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right) + \ln(1+C)\right) = M + \frac{\ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right)+\ln(1+C)}{kT}$.
Or $\lim\limits_{T\to+\infty} 1 + C\mathrm{e}^{-kT} = 1$ d'où $\lim\limits_{T\to+\infty} \ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right) + \ln(1+C) = \ln(1+C)$ et comme
$\lim\limits_{T\to+\infty} kT = +\infty$ alors $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right)+\ln(1+C)}{kT} = 0$.
Finalement $\lim\limits_{T\to+\infty} \mu_T = M$.

4. On se place dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ un point où la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la courbe $\mathscr{C}_f$.

5. a. La tangente à la courbe représentative de la fonction cube au point O a pour équation $y = \left(3\times 0^2\right)(x-0) + 0^3 = 0$.
De plus pour $x < 0$, $x^3 - y = x^3 < 0$ et pour $x > 0$, $x^3 - y = x^3 > 0$.
donc la courbe représentative de la fonction cube est en-dessous de sa tangente au point O sur $]-\infty\,;\,0]$ et au-dessus sur $[0\,;\,+\infty[$.
La tangente au point O de la courbe représentative de la fonction cube traverse donc cette courbe. Le point O est un point d'inflexion pour la courbe représentative de la fonction cube.

b. On a montré que $P'(t) = \frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2}$ donc
$P''(t) = \frac{-k^2CM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2 - kCM\mathrm{e}^{-kt}\times 2\left(-kC\mathrm{e}^{-kt}\right)\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4}$
d'ou $P''(t) = \frac{k^2CM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4}\left(-\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right) + 2C\mathrm{e}^{-kt}\right) =$
$\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4}\left(C\mathrm{e}^{-kt} - 1\right)$.
On sait que :
- $\mathrm{e}^{-kt} > 0$
- $1 + C\mathrm{e}^{-kt} > 0$

Donc $\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4} > 0$.
Par suite $P''(t) = 0$ si et seulement si $C\mathrm{e}^{-kt} - 1 = 0$.
Si $C < 0$, alors $C\mathrm{e}^{-kt} < 0$ d'où $C\mathrm{e}^{-kt} - 1 < -1 < 0$: l'équation $C\mathrm{e}^{-kt} - 1 = 0$ n'admet pas de solution.
Si $C = 0$, l'équation devient $-1 = 0$ et donc n'admet pas de solution.
Finalement si $C > 0$, alors $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{C} > 0$ d'où $-kt = \ln\left(\frac{1}{C}\right)$ et donc $t = \frac{\ln(C)}{k}$.
Par suite l'équation $P''(t) = 0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C > 0$ et $t_0 = \frac{\ln(C)}{k}$.

c. Comme $C > 0$, t_0 est bien défini.
On a alors $P(t_0) = \frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}} = \frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-\ln(C)}} = \frac{M}{1+\frac{C}{C}} = \frac{M}{2}$.
Donc quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A(t_0; P(t_0))$ appartient à la droite d'équation $y = \frac{M}{2}$.

d. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P au point A_0 est donnée par $y = P'(t_0)(x - t_0) + P(t_0)$.
Or $P(t_0) = \frac{M}{2}$ (question précédente) et $P'(t_0) = \frac{kCM\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}\right)^2} = \frac{kCM\times\frac{1}{C}}{\left(1+C\times\frac{1}{C}\right)^2} = \frac{kM}{4}$.
Par suite l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P au point A_0 est $y = \frac{kM}{4}\left(x - \frac{\ln(C)}{k}\right) + \frac{M}{2} = \frac{kM}{2}x + \frac{M}{4}(2 - \ln(C))$.
On a donc $g(t) = \frac{kM}{4}t + \frac{M}{4}(2 - \ln(C))$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.

e. Étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0.
Soit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = P(t) - g(t)$.
La fonction φ est dérivable et pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\varphi'(t) = P'(t) - g'(t) = P'(t) - \frac{kM}{2}$ et $\varphi''(t) = P''(t)$.
On a montré que $P''(t) = \frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4}\left(C\mathrm{e}^{-kt} - 1\right)$ avec $\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^4} > 0$.
Donc le signe de $P''(t)$ est donné par celui de $C\mathrm{e}^{-kt} - 1$.
Or $C\mathrm{e}^{-kt} - 1 > 0$ si $\mathrm{e}^{-kt} > \frac{1}{C}$ d'où si $-kt > \ln\left(\frac{1}{C}\right)$ et donc si $t < t_0$(défini à la question **4.b.**).
On en déduit que φ' est croissante sur $[0; t_0]$ et décroissante sur $[t_0; +\infty[$.
Or $\varphi'(t_0) = P'(t_0) - \frac{kM}{2} = 0$ donc on obtient que $\varphi'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
La fonction φ est donc décroissante sur $[0\,; +\infty[$.
Or $\varphi(t_0) = 0$ donc pour tout $t \in [0; t_0]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ et pour tout $t \in [t_0; +\infty[$, $\varphi(t) \leqslant 0$.
On en déduit que la courbe représentative de P est au-dessus de sa tangente sur $[0; t_0]$ et en dessous sur $[t_0; +\infty[$.
Par suite la courbe représentative de P traverse sa tangente en A_0.
Le point A_0 est donc un point d'inflexion.

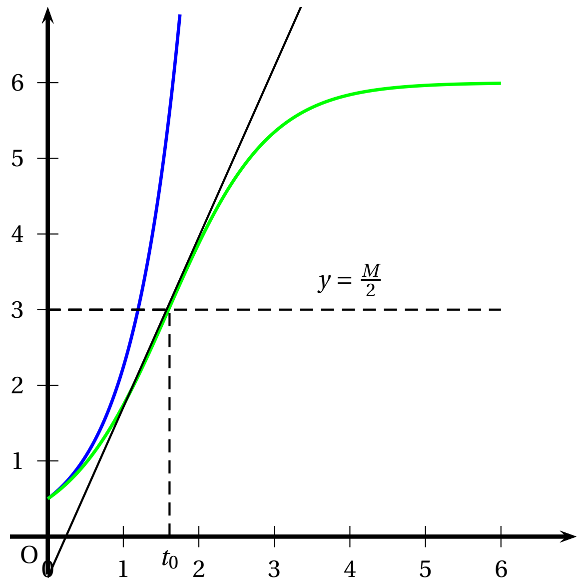
6. **a.** L'inéquation $d(t) < 0,1$ revient à $\frac{0,5\mathrm{e}^{1,5t}\left(1+11\mathrm{e}^{-1,5t}\right)-6}{1+11\mathrm{e}^{-1,5t}} < 0,1$ d'où comme $1 + 11\mathrm{e}^{-1,5t} > 0$, il faut $0,5\mathrm{e}^{1,5t} - 0,5 < 0,1 + 1,1\mathrm{e}^{-1,5t}$.
On en déduit $\frac{0,5\left(\mathrm{e}^{1,5t}\right)^2 - 0,6\mathrm{e}^{1,5t} - 1,1}{\mathrm{e}^{1,5t}} < 0$ d'où comme $\mathrm{e}^{1,5t} > 0$, $0,5\left(\mathrm{e}^{1,5t}\right)^2 - 0,6\mathrm{e}^{1,5t} - 1,1 < 0$.
On pose $X = \mathrm{e}^{1,5t}$ et l'équation revient donc à $0,5X^2 - 0,6X - 1,1 < 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (-0,6)^2 - 4\times 0,5\times(-1,1) = 2,56 > 0$.
Donc le trinôme du second degré $0,5X^2 - 1,5X - 11$ admet deux racines : $X_1 = \frac{0,6-1,6}{2\times 0,5} = -1$ et $X_2 = 2,2$ par suite comme de plus le coefficient des X^2 est $0,5 > 0$ alors on sait que $0,5X^2 - 0,6X - 1,1 < 0$ pour $X \in]-1; 2,2[$.
Enfin comme $X = \mathrm{e}^{1,5t}$ alors il faut t tel que $\mathrm{e}^{1,5t} \in]-1; 2,2[$ d'où

$$t \in \left]-\infty\,; \frac{\ln(2,2)}{1,5}\right[.$$

On a $\frac{\ln(2,2)}{1,5} \approx 0,52$ donc d'après la résolution précédente, pour tout réel $x < 0,52$, les points de chaque courbe d'abscisse x sont à une distance strictement inférieure à 0,1.
Les deux courbes sont donc presque confondues au voisinage de 0.

b. On étudie donc l'évolution de la population lorsque l'effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M, c'est à dire lorsque l'on est au voisinage du point A_0 sur la courbe.

La courbe admet un changement de concavité, le point A_0 étant un point d'inflexion.
La croissance de la population change de rythme.
On passe d'une croissance toujours plus rapide jusqu'à t_0 à une croissance qui va être de moins en moins rapide après t_0.
La rapidité de croissance de la population atteint son point culminant en t_0.



Partie 4 : Modèle de Gompertz

1. **a.** Soit P une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$.

   Alors $Q = \ln(P)$ est dérivable et l'on a $Q' = \frac{P'}{P}$.

   Par suite $Q' = \frac{kP\ln\left(\frac{M}{P}\right)}{P} = k(\ln(M) - \ln(P)) = -kQ + k\ln(M)$.
   Donc Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
   Réciproquement supposons que Q est solution de l'équation différentielle
   $y' = -ky + k\ln(M)$.
   Alors comme $Q = \ln(P)$, $Q' = \frac{P'}{P}$ d'où $\frac{P'}{P} = -k\ln(P) + k\ln(M)$ d'où comme $P > 0$,
   $P' = kP(\ln(M) - \ln(P)) = kP\ln\left(\frac{M}{P}\right)$.

   Partant une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.

   b. L'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants donc ses solutions sont les fonctions Q définies par
   $Q(t) = C\mathrm{e}^{-kt} - \ln(M)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   c. D'après la question **1. a.**, on déduit du résultat précédent que toute solution P de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ est telle que $\ln(P(t)) = C\mathrm{e}^{-kt} - \ln(M)$ avec $C \in \mathbb{R}$ et
   $t \in [0; +\infty[$.
   D'où $P(t) = \mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt} - \ln(M)} = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.
   Si $k > 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} -kt = -\infty$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0$.

Par suite $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = M$.
Si $k=0$, alors $P(t) = M\mathrm{e}^{C}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = M\mathrm{e}^{C}$.
Si $k<0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} -kt = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-kt} = +\infty$.
Par suite si de plus $C>0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} C\mathrm{e}^{-kt} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = +\infty$ et si $C<0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} C\mathrm{e}^{-kt} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = 0$.

En résumé $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \begin{cases} M \text{ si } k>0, \forall C \in \mathbb{R} \\ M\mathrm{e}^{C} \text{ si } k=0 \\ +\infty \text{ si } k<0 \text{ et } C>0 \\ 0 \text{ si } k<0 \text{ et } C<0 \end{cases}$.

3. On a $P_0 = P(0)$ d'où $P_0 = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-k\times 0}}$.
Par suite $\mathrm{e}^{C} = \frac{P_0}{M}$ d'où comme $\frac{P_0}{M} > 0$, $C = \ln\left(\frac{P_0}{M}\right) = \ln(P_0) - \ln(M)$.
Rappelons que $\ln(x) < 0$ si et seulement si $x \in]0;1[$, $\ln(1) = 0$ et $\ln(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.
Par suite $C<0$ si et seulement si $\frac{P_0}{M} < 1$ d'où $P_0 < M$, $C = 0$ si $P_0 = M$ et $C > 0$ si $P_0 > M$.
Le signe de C dépend donc de la position de la population initiale par rapport à la capacité d'accueil M.

4. a. La population étudiée est donc modélisée par la fonction $P(t) = 20\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{20}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} = 20\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}$.
La fonction $t\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc, comme $-\ln(20) < 0$, la fonction $t{-}\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et donc par composition, $t\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}$ est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
La population diminue.
De plus d'après la question **2.**, comme $k<0$ et $C<0$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$ donc la population décroît vers 0.
Elle est donc en voie d'extinction puisque si elle continue à suivre le modèle de Gompertz, alors au bout d'un certain temps son effectif est proche de 0.

b. On résout l'équation $P(t) \leqslant 0,01$ (10 individus correspondent à 0,01 milliers).
On obtient $20\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} \leqslant 0,01$ d'où :
$\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} \leqslant \frac{1}{2000}$
$-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} \leqslant -\ln(2000)$
$\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} \geqslant \frac{\ln(2000)}{\ln(20)}$
$\frac{t}{20} \geqslant \ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right)$
$t \geqslant 20\ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right)$
Alors comme $20\ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right) \approx 18,62$, il faudra 19 années pour que la population devienne inférieure à 10 individus.