

# Introduction d'une nouvelle représentation des expressions algébriques dans un micromonde d'algèbre Aplusix : la représentation sous forme d'un arbre.

Hamid Chaachoua\*, Said Mouffak\*\*

\*Université Joseph Fourier - MeTAH - LIG Grenoble

\*\*Lycée Jean Monnet - INRP

## Résumé.

Une nouvelle représentation des expressions algébriques et numériques a été introduite dans le logiciel Aplusix (<http://aplustix.imag.fr/>) : il s'agit d'une représentation en arbre. Cette nouvelle représentation permet d'avoir une autre appréhension des expressions algébriques différente de la représentation usuelle. Nous faisons l'hypothèse qu'elle permet de mieux comprendre la structure profonde des expressions algébriques et qu'elle peut aider à développer une meilleure appréhension de la représentation usuelle.

## I – Introduction

En mathématiques, les notions ne peuvent être manipulées qu'à travers des représentations sémiotiques comme le registre du langage naturel, celui des écritures numériques, des représentations graphiques. Comme le précise Duval (1993), « *les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signifiante et de fonctionnement* ». Dans cette approche, la conceptualisation des notions mathématiques nécessite la manipulation de plusieurs registres pour un même objet mathématique permettant ainsi de le détacher de ses représentations. Duval (ibid.) distingue trois types d'activités : la *formation* d'une représentation identifiable répondant à des règles données, le *traitement* d'une représentation dans son propre registre et la *conversion* d'une représentation d'un registre dans un autre registre. Seules les deux premières sont prises en compte dans l'enseignement. Or, la troisième activité, celle de conversion, joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. En effet, « *le jeu sur les registres sémiotiques, permettant au sujet d'identifier une représentation, de la traiter à l'intérieur d'un même registre ou de la convertir dans un autre registre engage la distanciation entre le signe et l'objet, et construit la signification en mathématiques* » et c'est la raison pour laquelle « *la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion* » (ibid.).

Nous nous sommes appuyés sur ces hypothèses didactiques pour faire évoluer le logiciel Aplusix. En effet, dans la première version du logiciel, un seul registre a été implémenté : le registre symbolique que nous nommerons registre usuel. Ce registre permet la formation des expressions algébriques et leur traitement interne. Dans le cadre d'un projet européen ReMath<sup>1</sup>, nous avons fait évoluer le logiciel en introduisant deux autres registres de représentations : l'arbre et le graphique.

L'introduction de ces deux nouveaux registres doit permettre les trois types d'activités décrites ci-dessus. Nous avons pris en compte cette condition au niveau de la conception du logiciel et des scénarios didactiques.

---

<sup>1</sup> ReMath (Representation in Mathematics with Digital Media), Project number IST4-26751.

## II. Les registres de représentation dans Aplusix

### II.1. Le logiciel Aplusix

L'environnement Aplusix (Nicaud et al., 2004) est un EIAH pour pratiquer l'algèbre élémentaire, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations, au lycée et au collège. Il est composé, principalement :

- d'un micromonde d'édition des expressions algébriques, éditeur riche et souple, offrant diverses rétroactions syntaxiques et sémantiques,
- d'un module de génération automatique d'exercices comportant plusieurs centaines de patrons d'exercices,
- de modules pour l'enseignant (éditeur d'exercices, administration des comptes).

L'objectif de l'élève dans Aplusix consiste à résoudre, comme sur le papier, des problèmes d'algèbre en produisant, ligne de calcul après ligne de calcul, les différents pas de calcul de son raisonnement algébrique. Le cadre mathématique offert pour ce travail est la résolution par équivalence : l'élève doit, à chaque étape, donner une expression algébrique équivalente à l'expression précédente ; il a toute liberté, comme sur le papier, pour le choix de l'expression algébrique de l'étape courante et de la forme de son raisonnement (linéaire ou avec des retours en arrière). En général, les activités se déroulent en mode *entraînement*, des rétroactions sont fournies, en particulier deux rétroactions fondamentales. Tout d'abord, l'équivalence algébrique entre étapes est calculée en permanence et affichée de manière non intrusive. Ensuite, quand l'élève décide que l'exercice est terminé, une vérification syntaxique et didactique de la forme de l'expression solution de l'élève est effectuée et les résultats de cette analyse sont affichés. Il existe aussi un mode *test* où ces rétroactions sont absentes.

Au cours de la conception d'Aplusix, les auteurs se sont efforcés de proposer une représentation des expressions algébriques utilisées à l'écran aussi fidèle que possible de la représentation usuelle de ces expressions, telle que chacun peut la donner sur le papier ou au tableau (cf. figure 1). Cette représentation utilise le registre usuel de l'algèbre.

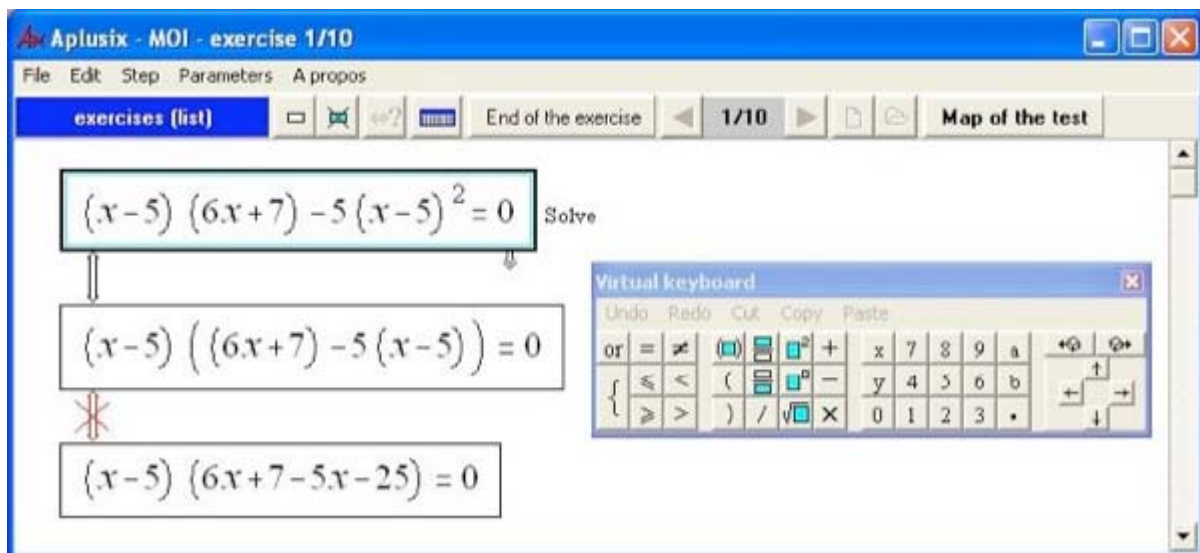


Figure 1. Représentation dans Aplusix des expressions algébriques dans le registre usuel.

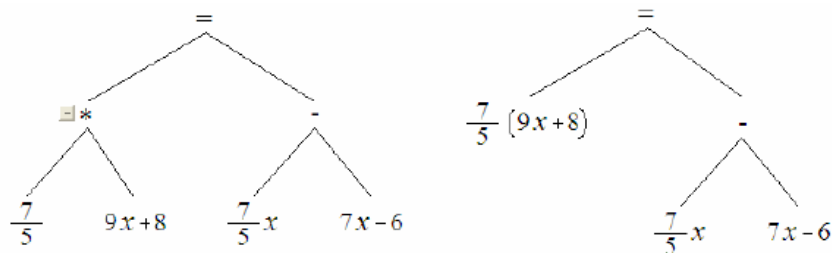
Ce registre permet deux types d'activités : formations des expressions et leurs traitements.

Afin de développer des activités de conversion, un autre registre a été ajouté : le registre arbre (Bouhineau & al., 2007). Un autre registre existe dans Aplusix, celui de la langue naturelle, mais il n'est pas contrôlé et évalué par le logiciel.

## II.2. La représentation des expressions en arbre

L'introduction du registre arbre dans Aplusix permet à l'élève de choisir entre 4 modes de représentation :

- 1) La *représentation usuelle* ;
- 2) La *représentation arbre libre* où on peut éditer librement les arbres et écrire librement dans les nœuds ;
- 3) La *représentation arbre contrôlé* où on ne peut utiliser que des opérateurs connus et le nombre correct d'arguments ;
- 4) La *représentation en arbre mixte*, qui correspond à un mode contrôlé mais qui permet, dans un nœud, d'écrire une expression dans le registre usuel (cf. Figure 2).



**Figure 2.** En mode mixte, l'arbre est partiellement développé et il peut se développer ou se réduire en utilisant les boutons "+" et "-".

La représentation usuelle utilise le registre usuel, les représentations arbre libre et arbre contrôlé utilisent le registre arbre, la représentation en arbre mixte utilise deux registres, usuel et arbre.

A chaque étape l'élève peut passer d'une représentation à l'autre. De plus, il est possible d'afficher pour une expression donnée exprimée dans une représentation, une deuxième représentation simultanément sur la fenêtre en utilisant la fonctionnalité « Seconde vue » du logiciel (cf. figure 3). Quand l'élève modifie l'expression dans la représentation de départ, cette modification est prise en compte automatiquement dans la deuxième. Le passage d'un mode de représentation à un autre permet de faire des conversions entre registres de façon automatique. Mais, dans notre projet, ce qui nous intéresse est que cette activité soit faite par l'élève.

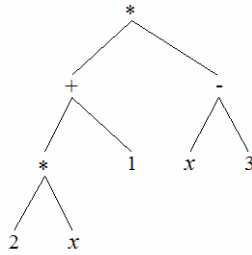
The screenshot shows the Aplux software interface. On the left, the 'Expand and simplify' window displays the expression  $2x^2 + 5(x-4)$  in its usual representation. Below it, the expanded form  $2x^2 + 5x - 4$  is shown. On the right, the 'Tree representation' window shows two tree diagrams. The top tree represents the expression  $2x^2 + 5(x-4)$  as a sum of two products:  $2x^2$  and  $5(x-4)$ . The bottom tree represents the expanded expression  $2x^2 + 5x - 4$  as a sum of three terms:  $2x^2$ ,  $5x$ , and  $-4$ .

**Figure 3.** L'expression  $2x^2+5(x-4)$  sous forme usuelle (représentation de départ) et la seconde vue de cette expression sous forme d'arbre.

Le développement de ce registre a été fait pour permettre la viabilité dans Aplux des trois types d'activités : formation, traitement et conversion. En particulier, des tâches de conversion entre registre usuel et arbre ont été implémentées dans le logiciel permettant à l'enseignant, grâce à l'éditeur d'exercices, de construire des activités pour les conversions des expressions algébriques entre les registres suivants : usuel vers arbre, arbre vers usuel, langue naturelle vers usuel ou arbre.

### III – Intérêt du registre arbre dans l'enseignement

Sfard (1991) propose de distinguer deux conceptions principales pour une expression algébrique : soit de façon structurale, comme un objet, soit de façon opérationnelle, comme un processus, tout en soulignant que, dans une activité mathématique, on articule ces deux conceptions en fonction des besoins. Selon le registre de représentation utilisé, l'une de ces deux conceptions peut être favorisée. Ainsi, le registre usuel favorise la conception procédurale, et à défaut de la conception structurale, elle peut être à l'origine des erreurs typiques liées à la lecture linéaire de gauche à droite (par exemple :  $3+2*5 = 5*5 = 25$  ou  $7-3(x+1) = 4(x+1)$ ). Alors que le registre arbre favorise la conception structurale. En effet, la « lecture » de haut en bas met en évidence la structure de l'expression, dans la figure 4 on regardera l'expression comme le produit de deux facteurs, une somme et une différence etc.



**Figure 4.** L'expression  $(2x+1)(x-3)$  représentée sous forme d'arbre. L'opérateur du plus haut niveau donne la forme de l'expression, ici le produit.

Chaque registre de représentation montre des facettes différentes de l'expression algébrique et permet de l'appréhender différemment. C'est à travers ces différences qu'on favorise l'apprentissage de l'algèbre. Travailler dans un seul registre ne permet pas d'accéder totalement au concept. En effet, un « registre est réducteur (un représentant d'un concept, dans un registre, ne peut montrer qu'une partie des propriétés du concept) et producteur : un représentant permet de voir des propriétés parasites (qui ne sont pas celles du concept) car spécifiques de la représentation » (Bloch, 2002). D'où l'importance de disposer de plusieurs registres de représentation d'une expression algébrique. Or, jusqu'à une période récente, l'enseignement<sup>2</sup> de l'algèbre privilégiait le registre usuel qui est à l'origine d'une prédominance de l'aspect procédural au collège et d'une quasi absence de l'aspect structural.

Partant de ce constat, nous avons conçu un scénario dont l'objectif est d'aider les élèves à *comprendre la structure d'une expression algébrique* en introduisant le registre *arbre* et en le faisant interagir avec les registres *langue naturelle* et *usuel*.

Nous faisons l'hypothèse que l'introduction du registre arbre et son interaction avec les registres langue naturelle et usuel aura un impact positif sur la maîtrise du registre de représentation usuel.

## IV – Déroulement de l'atelier

L'atelier s'est déroulé en trois phases ::

### a) Présentation du logiciel Aplusix

Nous avons présenté les fonctionnalités de base du logiciel Aplusix II. En particulier, les types d'exercices d'Aplusix : calculer, développer et réduire, factoriser, résoudre les équations, inéquations ou systèmes ; mais aussi les problèmes de mise en équations. Ensuite, nous avons montré les trois modes d'activités : entraînement, test et autocorrection, avec les deux principaux feedbacks en mode entraînement : vérification de l'équivalence des expressions et de la fin de l'exercice.

### b) Présentation du nouveau prototype intégrant la représentation sous forme d'arbre des expressions algébriques

Lors de cette deuxième phase, nous avons exploré les différents mode d'édition d'un arbre : mode libre, contrôlé et mixte. Ensuite, nous avons illustré les différents types de manipulations. Enfin, nous avons exploré la possibilité de travailler avec deux modes de représentation des expressions : usuelle et arbre.

<sup>2</sup>Dans les documents d'accompagnement des nouveaux programmes (Du numérique au littéral, 2008) on développe les deux aspects des expressions algébriques et on préconise l'usage d'un **arbre** : "la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »)".

### **c) Scénario pédagogique**

Au cours de cette dernière phase nous avons présenté un scénario qui a été expérimenté dans différentes classes de seconde et de troisième. Les participants ont travaillé sur les activités du scénario à l'aide du logiciel.

Cette phase, était l'occasion de discuter avec les participants sur l'intérêt de ce nouveau mode de représentation dans le logiciel Aplusix. La discussion s'est portée également sur certains choix de représentations (comme celui des fractions, des radicaux, du signe moins).

## **Références bibliographiques**

- Bloch, I. (2002), Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction au lycée, *Petit x* 58, 25-46.
- Bouhineau D., Chaachoua H., Viudez C. & Nicaud J.-F. (2007), Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix : représentations sous forme mixte naturelle & arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques, *Actes de la conférence EIAH2007*, Lausanne, 27-29 juin 2007.
- Du numérique au littéral* (2008), Projet du document d'accompagnement des programmes du collège, Mathématiques, février 2008. [eduscol.education.fr/ D0015/](http://eduscol.education.fr/D0015/)
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, IREM de Strasbourg.
- Nicaud, J.-F., Bouhineau, D. and Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and CAS Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (2), 169-211.
- Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

## Annexe : Scénario d'usage

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	L'enseignant et la classe	En vidéoprojection. L'enseignant ouvre un nouveau fichier Aplusix, entre l'expression $x + y$ , choisit le mode <i>Représentation mixte</i> . Il annonce qu'il va demander au logiciel de convertir la représentation symbolique en arbre. Il clique sur le « + », la représentation arbre de l'expression s'affiche. Il questionne la classe : comment l'arbre est-il créé ? où est l'opérateur ? où met-on les arguments ? Il fait une synthèse et lit l'expression « somme de x et de y ».	Collective pour observer et commenter la création de l'arbre	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	5 min
2	L'enseignant et la classe	En vidéoprojection. L'enseignant ouvre un nouveau fichier Aplusix, entre l'expression $x + y + 2z$ , choisit le mode <i>Représentation mixte</i> . Il demande aux élèves d'anticiper la structure de l'arbre. Les élèves dessinent leurs propositions au tableau. Pour valider, l'enseignant utilise Aplusix (chaque étape est commentée : quel opérateur en premier ? pourquoi ? quels arguments ?...). Une synthèse est faite collectivement et l'expression est lue comme « somme de x, de y et du produit de 2 par z ».	Collective pour observer, conjecturer et commenter la création de l'arbre	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
3	L'enseignant et la classe	Même activité et déroulement avec l'expression $(x-3)(x+y)$ .	Collective	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
4	L'enseignant et la classe	Même activité et déroulement avec l'expression $\frac{2x-1}{x^2+3}$	Collective	Logiciel Aplusix, matériel de vidéoprojection	15 min
5	L'enseignant	Institutionnalisation : structure de l'arbre représentant une expression algébrique, vocabulaire	Collective		5 min