
la géométrie des surfaces gonflables
r.march*apmep-larochelle-2008

Géométrie et expérimentation constructive

Robert March
(robert.march@paris-valdeseine.archi.fr)
Ecole nationale supérieure d'architecture Paris-Val-de-Seine
Laboratoire de recherche « Géométrie, Structure, Architecture » (ENSA Paris-Malaquais)

Dans l'enseignement de l'architecture en France, les mathématiques sont une discipline en voie de disparition. C'est particulièrement vrai pour la géométrie, à commencer par la géométrie descriptive. Pour ne citer qu'un exemple, dans le programme de l'Ecole d'architecture où j'enseigne, récemment modifié pour se conformer à la réforme européenne dite LMD, l'enseignement des mathématiques n'existe plus qu'en 1ère année de licence et il est réduit à 2 heures par semaine au seul 1er semestre. Autant dire qu'il n'existe plus.

Pourtant, contrairement aux idées reçues, les logiciels de modélisation 3D ne condamnent pas la géométrie. Elle est au contraire toujours plus nécessaire à qui veut modéliser des formes non triviales et utiliser de façon maîtrisée ces outils remarquables.

L'enseignement optionnel que je développe en 1ère année de master s'efforce de réconcilier les étudiants avec la géométrie en leur montrant son intérêt et en utilisant des outils informatiques récents pour la « redécouvrir ».

Il s'agit d'une part d'un logiciel de « géométrie dynamique », Cabri-géomètre, qui intervient comme outil d'exploration de familles de courbes et de surfaces. Dans sa version « 2D », avec le recours aux outils de la géométrie descriptive, il permet l'exploration d'un très large registre de surfaces sans se livrer à un quelconque calcul, sans dériver ni intégrer la moindre fonction.

Il s'agit d'autre part d'un modeleur surfacique puissant, Rhinoceros, dont l'usage professionnel s'étend dans les agences d'architecture, particulièrement adapté à la mise au point de prototypes permettant la réalisation de maquettes à différentes échelles.

Cet enseignement se prolonge par des réalisations de maquettes à grande échelle, des « expérimentations constructives », dont certaines ont lieu aux Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau, un établissement spécialement conçu à cet effet situé entre Lyon et Grenoble.

L'exposé qui suit porte sur une réalisation que nous avons récemment menée à bien, celle d'une enveloppe gonflable auto-portée couvrant une surface au sol de 75 m^2. Dans un premier temps, nous traiterons de la géométrie des surfaces gonflables. Dans un deuxième temps nous verrons comment le choix s'est porté sur une forme particulière et nous examinerons les étapes de la réalisation du prototype.

La géométrie des enveloppes gonflables

L'objectif était de réaliser une enveloppe gonflable permettant de recouvrir une surface donnée. Ancrée au sol, cette enveloppe, qui n'est pas hermétique, est maintenue en forme à l'aide d'une soufflerie qui fonctionne en permanence. Les couvertures de certains terrains de tennis en sont un exemple courant. On a pu concevoir sur ce modèle des salles de spectacle ou des halls d'exposition, structures temporaires pour lesquelles cette technologie présente des qualités évidentes.

Si l'on veut que cette enveloppe réalisée dans une toile pratiquement inextensible soit parfaitement tendue, il faut qu'elle réponde à une géométrie spécifique. Pour s'en convaincre, il suffit de souffler dans un sac de plastique. Contrairement à un ballon de baudruche qui est, lui, réalisé dans un matériau extensible et préformé, le sac adopte une forme avec des parties parfaitement tendues mais d'autres qui, au contraire, présentent des plis qui ne disparaissent pas même si on augmente la pression.

Cette géométrie particulière est connue. Il s'agit des surfaces enveloppes d'une famille de sphères dont le centre décrit une courbe donnée et dont le rayon est susceptible de varier continûment. Les surfaces de révolution en sont un cas particulier comme en témoignent les montgolfières. Dans le cas où le rayon des sphères enveloppées est constant on a affaire à une surface canal, les tubes de « section droite constante ».

La forme la plus élémentaire est donc la sphère, ce qu'illustre parfaitement une bulle de savon.

De même la demie sphère est la forme qui s'impose pour couvrir un espace circulaire.

Un demi tore permet de couvrir une couronne circulaire.

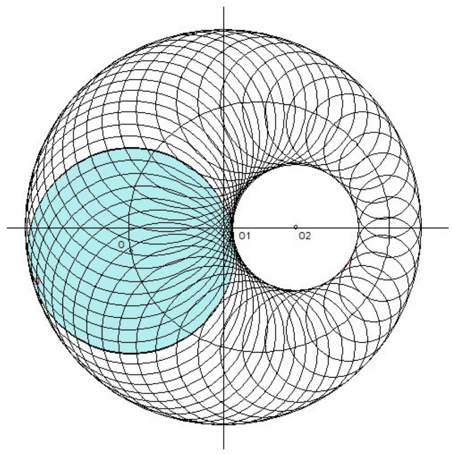
Dans la suite, nous allons limiter notre étude au cas particulier où le centre des sphères enveloppées décrit une courbe plane horizontale et nous ne considérerons que les demies sphères au-dessus de ce plan horizontal. Cela correspond au problème de la couverture d'une surface donnée au sol par une enveloppe gonflable simplement lestée de sorte que le raccordement au sol se fasse verticalement.

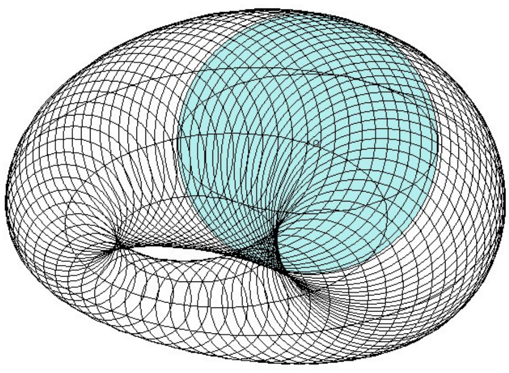
Si la ligne des centres est une droite, on a affaire à une surface de révolution. Ainsi, un demi ellipsoïde de révolution permet de couvrir un espace horizontal elliptique.

Nous allons nous intéresser à une géométrie un peu plus complexe en posant le problème de la façon suivante : quelle est la surface gonflable qui permet de couvrir un espace donné ? Et nous allons définir cet espace par deux courbes fermées C_1 et C_2, de sorte que C_2 soit intérieure à C_1, comme dans une couronne circulaire.

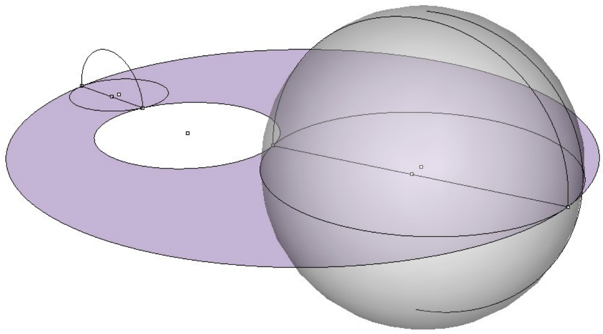
Si C_1 et C_2 sont circulaires et concentriques, on obtient donc un tore.

Considérons maintenant le cas où les centres O_1 et O_2 des cercles C_1 et C_2 ne sont pas confondus. La surface correspondante est une cyclide de Dupin, engendrée par une sphère dont le cercle équateur C reste tangent simultanément à C_1 et C_2. On obtient, en projection horizontale, une figure classique : le centre O du cercle C décrit une ellipse de foyers O_1 et O_2.



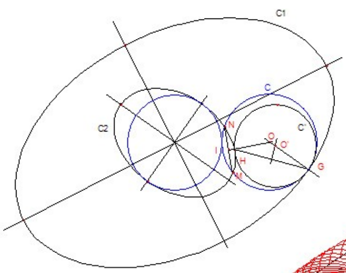


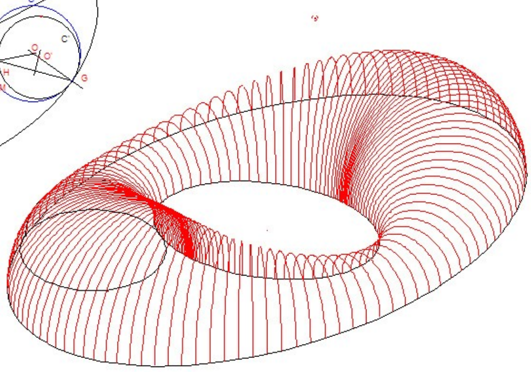
cyclide de Dupin



Comme toute surface enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre, la cyclide est une surface cerclée, c'est-à-dire qu'elle peut être engendrée par le mouvement d'un cercle soumis à certaines conditions. Ce cercle générateur peut être considéré comme l'intersection de deux sphères infiniment voisines. Son plan est donc perpendiculaire au plan de la ligne des centres et il a pour diamètre le segment joignant les points de contact de la sphère avec les courbes C_1 et C_2.

Nous pouvons envisager maintenant l'étude d'un cas un peu plus complexe où la détermination d'un cercle C tangent aux courbes C_1 et C_2 n'est pas rigoureusement constructible. Choisissons pour C_1 et C_2 deux ellipses concentriques. On se donne alors un point G sur C_1 et on construit un cercle C tangent à C_1 (en G) et au cercle de diamètre le petit axe de C_2. C'est une première approximation du cercle cherché. Ce cercle C coupe C_2 en deux points M et N. Soit I le milieu de MN. Le segment joignant I au centre du cercle C coupe C_2 en H. Le cercle C' tangent à C_1 en G et passant par H est une deuxième approximation (meilleure) du cercle cherché. On pourrait poursuivre cette construction itérative (ce cercle C' coupe C_1 en H et K, …) mais ce n'est pas nécessaire pour le cas qui nous occupe : l'enveloppe des cercles C est constituée de l'ellipse C_2 et d'une courbe « suffisamment proche » de l'ellipse C_1. Nous obtenons ainsi, avec Cabri, une bonne modélisation de la surface cherchée.





Modèle théorique et approximation

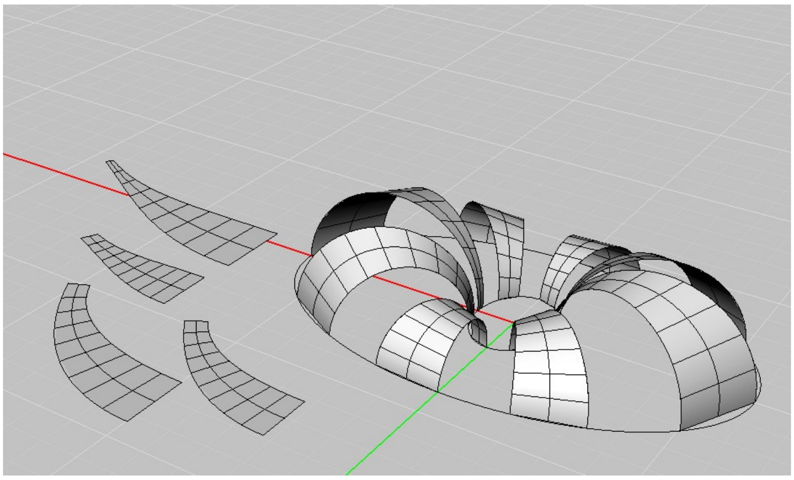
Nous allons maintenant considérer le cas que nous avons retenu pour la réalisation d'une enveloppe gonflable. Plusieurs contraintes techniques ont conditionné ce choix. L'enveloppe est réalisée par assemblage de laizes découpées dans du plastique en rouleaux de 3 m de largeur, utilisé dans le bâtiment pour assurer l'étanchéité des dalles de béton. L'assemblage est fait en utilisant un ruban adhésif double face. Nous avons choisi pour C1 et C2 deux ellipses concentriques de 8 m x 12 m et 3 m x 4 m respectivement, en faisant coïncider le grand axe de l'une avec le petit axe de l'autre. Ces deux axes de symétrie orthogonaux simplifient la modélisation.

Le matériau utilisé (film de polypropylène) peut être considéré comme inextensible. Or les surfaces gonflables ne sont pas développables (à l'exception des cônes et cylindres). Pour modéliser ces surfaces il faut donc les approcher par des segments de surfaces développables. Nous allons alors sélectionner sur la surface un certain nombre de demi-cercles, convenablement répartis. Ce pourraient être des arceaux rigides et la couverture pourrait être réalisée en fixant sur chaque couple d'arceaux voisins une toile tendue.

L'enveloppe gonflable est réalisée de cette façon à cela près que les arceaux ne sont pas matérialisés et que la surface est aéroportée.

Il faut donc déterminer les patrons des segments de surface développable définis par deux arceaux. Il s'agit de deux demi-cercles de rayon différents et dont les plans ne sont pas parallèles. La surface développable qu'ils définissent n'est donc ni conique ni cylindrique et son développement n'est pas simple. Le logiciel Rhinoceros propose un outil qui, dans ce cas de figure, donne un tel développement avec une très bonne approximation.

On dispose ainsi des patrons nécessaires à la réalisation de l'enveloppe gonflable.

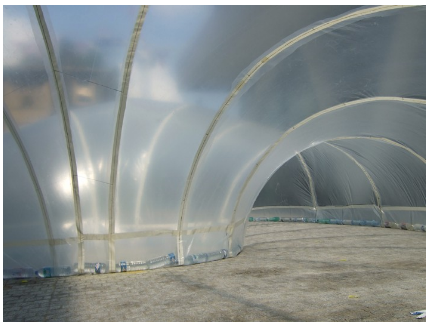


Avant de se lancer dans une fabrication à l'échelle 1, la modélisation est testée sur une maquette en carton, puis sur une maquette gonflable à l'échelle 1/10e en utilisant pour soufflerie un ventilateur de voiture.

Vient alors la réalisation à l'échelle 1 et, avec l'activation de la soufflerie, l'épreuve de vérité : cela ne doit pas faire un pli.

La tension n'est pas constante en tout point de l'enveloppe : on montre qu'elle est fonction de la courbure totale au point considéré de la surface. La membrane est d'autant plus tendue localement que la sphère enveloppée a un plus grand rayon.

Le lestage a été réalisé en glissant des bouteilles d'eau dans des rabats ménagés sur les bords libres de l'enveloppe. Avec la mise en route de la soufflerie, l'enveloppe se déploie et tend vers sa forme d'équilibre.



Quelques leçons

L'expérience en soi qui consiste à réaliser collectivement une structure de cette taille est très positive.

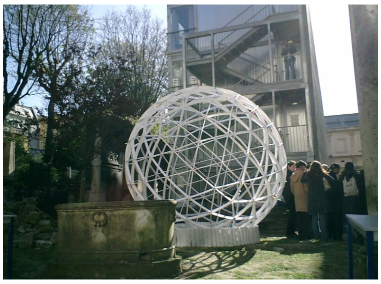
Le groupe d'étudiants concernés s'est vraiment investi dans ce projet.

La nécessité de maîtriser la géométrie de ce type de surface est apparue comme une évidence et justifiait donc le recours à cette discipline mathématique.

Les outils géométriques utilisés sont ceux de la géométrie « pré-analytique » (pas de formules, pas de calculs, ce qui permet de ne pas exclure les étudiants qui sont allergiques à ces notions mathématiques) et de la géométrie descriptive. Selon les compétences et l'intérêt des étudiants on peut pousser plus ou moins loin cette étude.

L'utilisation de logiciels avancés est pour eux un attrait évident. La maîtrise acquise dans ce domaine est un atout indiscutable : on peut, certes, être un très bon utilisateur de Rhinoceros sans connaître un traître mot de géométrie, mais une bonne connaissance de la géométrie des courbes et des surfaces permet seule de tirer le meilleur parti de ce logiciel remarquable.

La même approche en termes de « géométrie constructive » a été appliquée à d'autres domaines tels que, par exemple, la modélisation d'une sphère (avec la réalisation d'une géode d'ordre 4 en « carton plume », de sa structure duale ou encore d'un hexacontaèdre pentagonal en carton ondulé triple épaisseur).



Pourtant, il ne faut pas cacher non plus les difficultés et les limites de ces expérimentations. Ces enseignements ne s'insèrent pas dans les cursus officiels. Il est difficile de réunir des équipes d'enseignants prêts à assumer ce type de projets. Il faut renoncer pour l'essentiel à une évaluation individuelle. Mais ces spécificités apparaissent aussi dans d'autres activités pédagogiques, les voyages d'étude par exemple. Alors, pourquoi se priver de ces voyages en géométrie ?