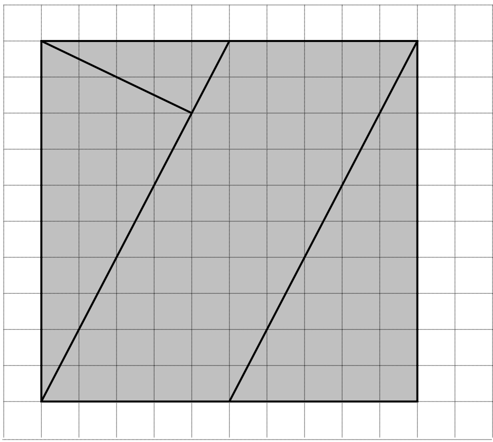
Titre	Catégorie	Origine	Domaine mathématique
1. Puzzle	3 4	17.II.04	Géométrie : manipulation et observation de figures, images mentales (angle droit, rectangle)
2. Des carrés de carrés	3 4 5	19.F.03	Pavage en géométrie ; décomposition en somme de carrés en arithmétique
3. Chasse au trois	3 4 5	10.I.03	Numération : distinction entre chiffre et nombre
4. Chercher la petite bête	3 4 5	24.F.04	Arithmétique : Les 4 opérations
5. Planche à recouvrir	3 4 5	14.I.13	Géométrie : pavage Logique : recherche ordonnée de combinaisons
6. Les trois frères gourmands	4 5 6	13.I.06	Arithmétique : soustraction et, éventuellement, division
7. Des carrés empilés	5 6 7	14.I.09	Géométrie : positions relatives de carrés Logique : relation temporelle à reconstituer
8. Les cadeaux	5 6 7	08.II.10	Géométrie : comparaison de longueurs sur un parallélépipède
9. Le carré de Léa	6 7 8	17.II.11	Géométrie : décomposition et recomposition d'une surface plane en triangles et trapèzes
10. Le relais de Transalpie	6 7 8	20.F.12	Arithmétique : opérations, décomposition d'un nombre en somme de nombres naturels consécutifs
11. Une année particulière	6 7 8	20.I.13	Arithmétique et combinatoire
12. Le réseau hexagonal de Rosalie	6 7 8	19.F.11	Logique et combinatoire : dénombrement
13. L'héritage	7 8	08.I.16	Grandeurs et mesures : Géométrie plane :
14. Les biscuits d'Émilie	8 9 10	13.I.12	Arithmétique : multiples, multiples communs, addition
15. La cueillette des champignons	8 9 10	19.I.15	Arithmétique : les quatre opérations (et les opérations « inverses ») Algèbre : équations du premier degré
16. Le rectangle à dessiner	9 10	19.II.19	Géométrie : Pythagore
17. La randonnée cycliste	9 10	18.II.20	Fonctions : graphiques et vitesse
18. Alignez-vous par trois	9 10	21.I.18	Géométrie : droites passant par 3 points
19. Amis supporters	9 10	20.II.16	Algèbre : système de deux équations à deux inconnues
20. Cartes rouges et cartes noires	9 10	17.II.21	Probabilité : dénombrement

1. PUZZLE (Cat. 3, 4)



Léo a reproduit sur une feuille de papier quadrillé le dessin que voici, puis il l'a découpé le long des lignes marquées et a obtenu les quatre pièces d'un puzzle.

En disposant autrement toutes ces pièces, il parvient à former un rectangle qui n'est pas carré.

Dessinez ce rectangle le plus précisément possible ou collez-le sur votre feuille-réponse, en faisant bien apparaître chacune des pièces.

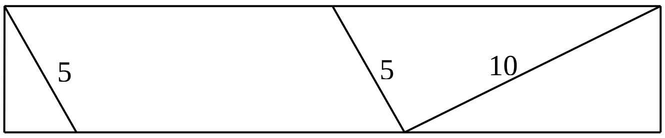
ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Reconstituer un rectangle avec quatre pièces qui sont assemblées en carré. Le carré est dessiné sur un quadrillage de 10 × 10, il est partagé par deux droites parallèles joignant chacune un sommet au milieu d'un côté opposé en un parallélogramme et deux triangles rectangles, puis l'un deux est partagé en deux triangles rectangles par sa hauteur perpendiculaire à son hypoténuse.

Analyse de la tâche

- Observer les pièces, se rendre compte que pour faire le puzzle, il faut les découper soit sur le dessin proposé soit sur une reproduction très précise.
- Procéder par essais en déplaçant les pièces, en les glissant, les tournant sans les retourner, en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits et celles qui ont des côtés de mêmes longueurs pouvant s'accoler.
- D'une part constater que l'hypoténuse du petit triangle rectangle a même longueur que le petit côté du parallélogramme. En déduire que ces deux pièces s'assemblent bien pour former une partie d'un rectangle.
- D'autre part constater que les deux triangles rectangles assemblés par leurs côtés de même longueur (le côté du carré de départ) forment une autre partie du rectangle et que ces deux parties peuvent être assemblées.
- Reproduire le dessin ci-dessous ou coller le puzzle sur la feuille-réponse.



Attribution des points

4 Reproduction du rectangle avec les bonnes dimensions et avec les quatre pièces bien visibles (dessin ou collage corrects et précis)

3 Reproduction imprécise du rectangle avec les quatre pièces (dessin ou collage)
Ou dessin du rectangle avec les mesures correctes mais sans montrer les quatre pièces

2 Agencement de trois des pièces de façon à obtenir un quadrilatère ayant deux angles droits consécutifs ou rectangle reconstitué avec trois pièces (les trois triangles rectangles).

1 Agencement de deux des pièces de façon à obtenir un quadrilatère ayant deux angles droits consécutifs

0 Incompréhension du problème, ...

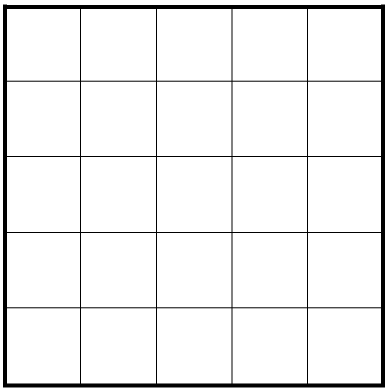
Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 17.II.04

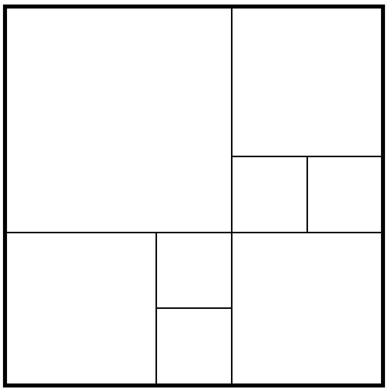
2. DES CARRÉS DE CARRÉS (Cat. 3, 4, 5)

Avec les 25 petites cases carrées de la première grille, on peut former 8 carrés, comme le montre la deuxième grille.

Première grille



Deuxième grille

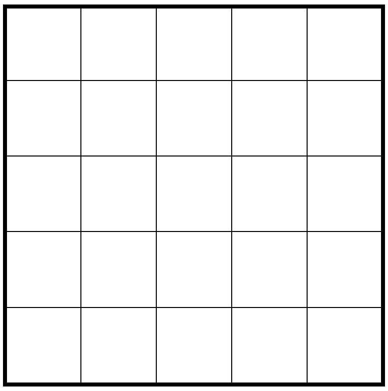


Avec les 25 cases de la première grille, comment peut-on former 10 carrés qui recouvrent exactement la grille ? Et comment peut-on former 13 carrés ?

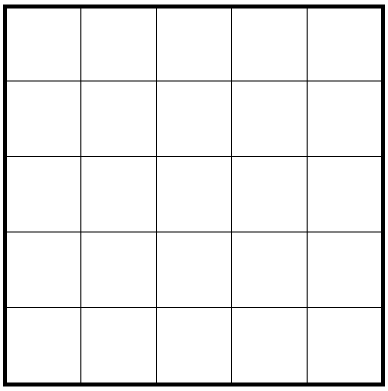
Dessinez les 10 carrés que vous avez trouvés sur la troisième grille et les 13 carrés sur la quatrième grille.

Vous pouvez colorier les carrés de couleurs différentes pour qu'on les distingue bien.

Troisième grille



Quatrième grille



ANALYSE *A PRIORI*

Taches mathématiques

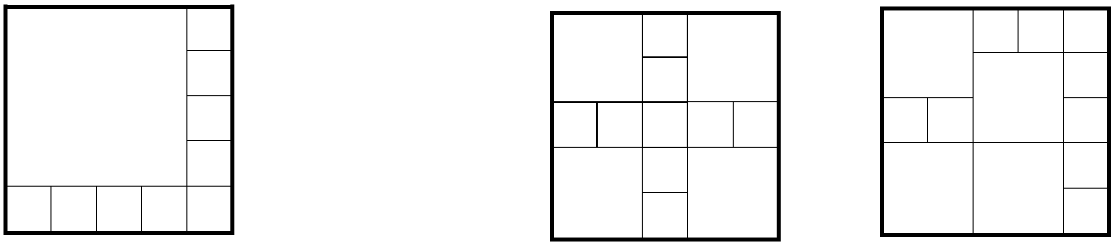
- Géométrie : grouper des carré unités pour atteindre un nombre de carrés défini (pavages)
- Arithmétique : décomposer 25 en somme d'un nombre défini de carrés

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de décomposer la surface totale en utilisant seulement des assemblages de petits carrés ayant eux-mêmes une forme carrée.

- Comprendre que les carrés formés peuvent comporter 1, 4, 9 ou 16 petits carrés.
- Essayer de chercher les combinaisons en partant de la plus grande surface carrée possible : 25 + 0 ; 16 + 9 × 1 ; etc.

Ou faire des essais en dessinant
Exemples de réponses :



Attribution des points

4 Les deux combinaisons trouvées (10 carrés avec 1 carré de 4 × 4 et 9 carrés de 1 × 1 et 13 carrés avec 4 carrés de 2 × 2 et 9 carrés de 1 × 1), les dispositions pouvant varier, avec des dessins clairs
3 Une combinaison trouvée, sans combinaison erronée
2 Une combinaison trouvée et une autre ne respectant pas les contraintes
1 Essais de combinaisons avec des carrés, mais sans aboutir
0 Incompréhension du problème (par exemple, dessins ne comportant pas que des carrés)

Niveaux : 3, 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 19.F.03 « légèrement adapté »

3. CHASSE AU TROIS (Cat. 3, 4, 5)

Isidore est en train d'écrire la suite des nombres, à partir de 1 :

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 …

Après avoir écrit le nombre 13, il observe sa suite et constate qu'il vient d'écrire le chiffre 3 pour la deuxième fois.

Il continue ensuite à écrire la suite des nombres … 14 - 15 - 16 ...

À un certain moment, Isidore constate qu'il est en train d'écrire le chiffre 3 pour la vingt-cinquième fois.

Quel nombre est-il en train d'écrire à ce moment ?

Montrez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Dans l'écriture de la suite des nombres naturels à partir de 1, déterminer quel est le nombre dans lequel apparaît le chiffre 3 pour la vingt-cinquième fois.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on doit compter le nombre d'apparitions du chiffre « 3 » dans la succession des nombres.
- Organiser sa recherche : écrire la suite des nombres en comptant les chiffres « 3 » ou n'écrire que les nombres contenant des chiffres « 3 » ou procéder dizaine par dizaine en examinant chacune d'elles.
- S'arrêter au nombre qui contient le vingt-cinquième « 3 ».

Attribution des points

4 Réponse correcte (131) avec présentation claire de la recherche effectuée

3 Réponse correcte, avec présentation peu claire de la recherche effectuée

2 Réponse « 131 » sans aucune autre explication

Ou erreur de comptage (130 ou 132) avec présentation de la recherche

Ou début organisé de la recherche avec dénombrement d'au moins 20 chiffres « 3 », mais pas aboutie

1 Recherche incomplète et sans organisation

Ou réponse 130 ou 132 sans aucune autre explication

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 10.I.03 « légèrement adapté »

4. CHERCHEZ LA PETITE BÊTE (Cat. 3, 4, 5)

Voici des additions très étranges.

Les nombres ont été remplacés par des petites bêtes : un escargot, une mouche, une coccinelle et un papillon.

Chaque petite bête remplace toujours le même nombre.

Trouvez à quel nombre correspond chaque petite bête.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres qui sont les termes de quatre sommes, chaque somme étant composée de cinq termes

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque petite bête dessinée représente toujours le même nombre.
- Procéder par déduction :
  - Observer les dessins et comprendre qu'il faut commencer par la ligne 3 où figurent seulement 5 mouches et déduire la valeur d'une mouche : 75 / 5 = 15 ou 5 x 15 =75 ;
  - Poursuivre par la ligne 4 et remplacer les 2 mouches par leur valeur (15 x 2 = 30) ; en déduire que 3 coccinelles valent 27 (57 – 30 = 27) et qu'une coccinelle vaut 9 (27 / 3 = 9 ou 3 x 9 = 27) ;
  - Poursuivre par la ligne 2 et remplacer la mouche et la coccinelle par leur valeur ((2 x 9) + 15 = 33) ; en déduire la valeur de deux papillons (73 – 33 = 40) et la valeur d'un seul (40 / 2 = 20 ou 2 x 20 = 40) ;
  - Terminer par la ligne 1 et remplacer la coccinelle, les deux mouches et le papillon par leur valeur (9 + (2 x 15) + 20 = 59) ; en déduire la valeur d'un escargot (80 – 59 = 21).

Ou

- Utiliser une procédure mixte faite de déductions partielles et d'essais, par exemple en commençant par trouver la valeur à donner à une mouche à partir de la troisième égalité…

Attribution des points

4 Réponse correcte (Mouche = 15 ; Coccinelle = 9 ; Escargot = 21 ; Papillon = 20) avec description claire de la démarche (explicitation de l'ordre des phases et calculs ou essais).

3 Réponse correcte avec description peu claire ou avec seulement une vérification.

Ou Procédure correcte et bien expliquée mais réponse incorrecte suite à une erreur de calcul.

2 Réponse correcte sans description de la démarche.

Ou 2 ou 3 valeurs justes avec description peu claire.

1 Valeur de la mouche juste avec indication sur la procédure utilisée.

Ou Début de raisonnement correct (par exemple essais apparents, montrant que la même valeur est attribuée à chaque petite bête au moins dans 2 égalités différentes).

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 24.F.04 « légèrement adapté »

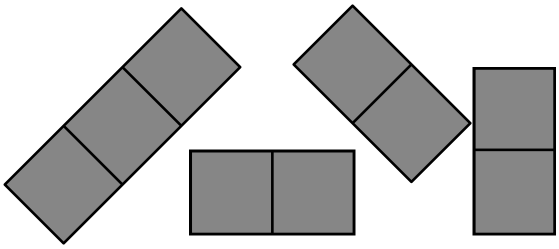
5. PLANCHE À RECOUVRIR (Cat. 3, 4, 5)

Zoé doit recouvrir complètement cette planche de 9 cases carrées :

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Pour ce faire, elle dispose :

- d’une pièce recouvrant exactement 3 cases,
- de trois pièces recouvrant chacune exactement 2 cases.



Comment Zoé peut-elle recouvrir complètement sa planche ? Indiquez toutes les possibilités.

Expliquez votre démarche.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver toutes le manières de recouvrir un carré de 3 x 3 cases par 1 rectangle de 3 cases et 3 rectangles de 2 cases.

Analyse de la tâche

- Entreprendre des essais, puis comprendre qu’il est préférable de commencer par placer la pièce couvrant 3 cases.
- Comprendre qu’on peut disposer les pièces soit horizontalement, soit verticalement, et que la grande pièce ne doit pas recouvrir la case centrale pour éliminer les dispositions où apparaissent des cases isolées.
- Procéder de façon systématique pour trouver toutes les manières possibles d’ajouter les petites pièces.
- En déduire les 12 solutions possibles et les noter au moyen des lettres des cases recouvertes, comme dans le tableau ci-dessous ou par des dessins.

  (Exemple de présentation de la solution au moyen des lettres des cases où, dans la première colonne, on trouve les 3 variantes avec la grande pièce horizontale en haut, dans la deuxième la grande pièce horizontale en bas, ...)

ABC, DE, GH, FI	GHI, AB, DE, CF	ADG, BE, CF, HI	CFI, BE, AD, HG
ABC, EF, HI, DG	GHI, BC, EF, AD	ADG, EH, FI, BC	CFI, EH, DG, BA
ABC, DG, EH, FI	GHI, AD, BE, CF	ADG, BC, EF, HI	CFI, BA, ED, HG

Attribution des points

4 Réponse correcte (12) avec présentation claire des cas possibles

3 Réponse correcte sans présentation des cas possibles

Ou oubli d’un type de solutions avec présentation claire des solutions énumérées ou plus de 12 solutions présentant des répétitions

2 Énumération de 6 à 9 solutions présentées sans démarche systématique

1 Moins de 6 solutions correctes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Banque de problèmes de l’ARMT 14.I.13

6. LES TROIS FRÈRES GOURMANDS (Cat. 4, 5, 6)

Pierre, Jean et Xavier vont manger ensemble 45 chocolats noirs, 21 chocolats blancs et 5 chocolats pralinés. Voilà comment ils vont faire.

Pierre mangera chaque soir un chocolat noir.

Jean mangera chaque soir un chocolat blanc ou, s'il n'y en a plus, 3 chocolats noirs.

Xavier mangera chaque soir un chocolat praliné ou, s'il n'y en a plus, 3 chocolats blancs ou, s'il n'y en a plus non plus, 5 chocolats noirs.

Pendant combien de jours vont-ils pouvoir manger des chocolats tous les trois ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver le nombre de jours pendant lesquels trois frères vont pouvoir manger des chocolats suivant une répartition particulière.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les 5 premiers jours, les nombres de chocolats diminueront de 1 chaque jour. Puis, dès le 6e jour, le nombre de chocolats noirs diminuera de 1 par jour, mais celui des chocolats blancs diminuera de 4 par jour. Enfin, lorsqu'il n'y aura plus de chocolats blancs, les frères mangeront, à eux trois, 9 chocolats noirs par jour.
- Effectuer les opérations correspondantes : alternance de soustraction et de division pour chaque sorte de chocolats.
- La démarche la plus probable et la plus efficace est de faire un inventaire jour après jour, ou par tranches de temps jusqu'à épuisement d'une des sortes de chocolat, en tableau ou du genre :

Jours	1	…	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Chocolats noirs	44	…	40	39	38	37	36	27	18	9	0
Chocolats blancs	20	…	16	12	8	4	0	0	0	0	0
Chocolats pralinés	4	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La réponse attendue est donc 13 jours.

Attribution des points

4 Réponse 13, avec explications sous forme d'un texte et/ou d'un tableau

3 Réponse 13, avec explications peu claires ou tableau difficile à interpréter
Ou réponse 12 ou 14, avec tableau et/ou texte témoignant d'une réflexion par ailleurs correcte

2 Démarche correcte avec l'état du stock jusqu'au 9e jour, suivie d'erreurs dans la suite
Ou réponse 13 sans explications

1 Début de résolution correct, avec l'état du stock jusqu'au 5e jour

0 Incompréhension du problème

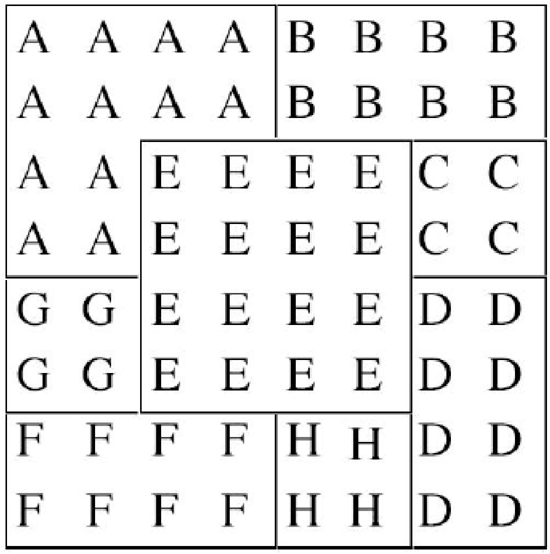
Niveaux : 4, 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 13.I.06 « légèrement adapté »

7. DES CARRÉS EMPILÉS (Cat. 5, 6, 7)

Huit carrés de 10 cm de côté, chacun recouvert par 16 fois la même lettre A, B, C, D, E, F, G ou H, ont été collés dans un certain ordre, l'un après l'autre, sur un carton carré de 20 cm de côté.

Les voici dessinés :



Retrouvez dans quel ordre les carrés ont été collés.

Expliquez votre démarche.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer l'ordre d'empilement de 8 carrés de 10 cm de côté, chacun orné d'un motif différent, connaissant la figure finale obtenue, un carrée de 20 cm de côté.

Analyse de la tâche

- Constater que les huit carrés ne sont pas exactement superposés et qu'ils sont disposés bien précisément sur le grand carton : certains dans un angle (A, B, D, F), d'autres avec un seul côté commun avec le grand carré (C, G, H) et l'un d'entre eux au centre (E).
- Différentes démarches peuvent être envisagées pour déterminer l'ordre de leur placement, soit en partant du premier carré posé (méthode montante) soit en partant du dernier posé (méthode descendante). La décomposition de la plaque carrée en carrés plus petits peut aider à la résolution.

  Pour la méthode montante, par essais successifs, trouver le premier carré et procéder de la même manière pour les carrés suivants.

  Pour la méthode descendante, comprendre que le carré E est le premier à enlever puisqu'on le voit entièrement. Ensuite, comprendre que le carré A doit être enlevé puisqu'il apparaît entièrement lorsque E est retiré.

  Ensuite, trouver des relations partielles dans la sériation : G est sur F (sinon la case G serait couverte par F), H est sur D (sinon la case H serait recouverte par D), C sur B, (sinon la case C serait recouverte par B), et aussi : D est sur C, F est sur H ... D'où l'ordre suivant pour empiler les carrés : B-C-D-H-F-G-A-E.
- Une autre démarche envisageable est de découper des carrés isométriques, de les distinguer (lettre, couleur…), de reconstituer le montage et ensuite de le démonter pour découvrir l'ordre de construction.

Attribution des points

4 L'ordre correct (B-C-D-H-F-G-A-E) avec explications

3 L'ordre inverse (E-A-G-F-H-D-C-B) avec explications

Ou ordre correct sans explication

2 Ordre inverse sans explication

Ou réponse avec une inversion mais avec explications

1 Plus d'une inversion

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 14.I.09

8. LES CADEAUX (Cat. 5, 6, 7)

Le Père Noël prépare des milliers de cadeaux en boîtes de mêmes dimensions : 20 cm, 40 cm et 60 cm.

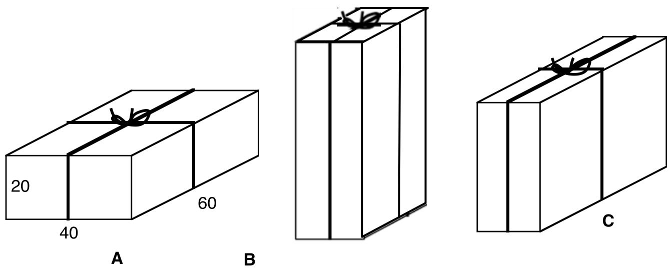
Ses trois assistants ont des façons différentes de placer les rubans.

Anastasie fait le nœud au milieu de la grande face (méthode A),

Balthazar le fait sur une petite face placée en haut (méthode B),

Célestine choisit une face moyenne pour son nœud (méthode C).

Les trois nœuds sont les mêmes et nécessitent 30 cm de ruban.



Le père Noël n'est pas content car il estime que deux de ses assistants gaspillent son ruban avec leurs méthodes.

Si le Père Noël a raison, quel est l'assistant qui utilise le moins de ruban ?

Sinon, quelle est la longueur de ruban utilisée par les assistants ?

Expliquez comment vous avez procédé et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE *A PRIORI*

Résumé

Comparer les longueurs de rubans qui fixent l'emballage d'un cadeau en forme de parallélépipède rectangle de 20 x 40x 60 avec un nœud de 30 cm, selon son emplacement au milieu d'une des trois faces différentes.

Analyse de la tâche.

- Visualiser les trois figures dans l'espace et comprendre, que le ruban suit deux segments perpendiculaires de la face (supérieure) où se situe le nœud, puis « descend » en traversant les quatre faces latérales, dont deux visibles et deux invisibles, puis reproduit la même figure sur la face inférieure invisible.
- Repérer les dimensions des faces et effectuer les additions nécessaires :
  - pour le premier cadeau, la face supérieure est un rectangle de 40 sur 60 cm et la hauteur mesure 20 cm, ce qui fait que la longueur du ruban est $2 \times (40 + 60) + 4 \times 20 + 30 = 310$ cm ;
  - pour le deuxième cadeau, il faut imaginer que les longueurs indiquées sur le premier doivent être déplacées (la hauteur est 60 cm et les faces supérieures et inférieures sont des rectangles de 20 su4 40 cm, ce qui conduit à une longueur de ruban de $2 \times (40 + 20) + 4 \times 60 + 30 = 390$ cm
  - de même pour le troisième dont la longueur du ruban est $2 \times (20 + 60) + 4 \times 40 + 30 = 350$ cm.
- Répondre : le Père Noël a raison. Anastasie utilise le moins de ruban, 310 cm, alors que les deux autres en gaspillent 350 et 390 cm

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète "Le Père Noël a raison, Anastasie utilise le moins de ruban" avec des explications claires et le détail des calculs qui mènent à cette réponse

3 Réponse correcte comme précédemment, mais avec des explications peu claires ou incomplètes

Ou le calcul des 3 longueurs de ruban avec des explications claires mais sans la conclusion "Le Père Noël a raison, Anastasie utilise le moins de ruban"

2 Réponse erronée à cause d'une erreur de calcul mais procédure correcte avec des explications claires

Ou réponse correcte comme en 4 malgré une faute de calcul

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

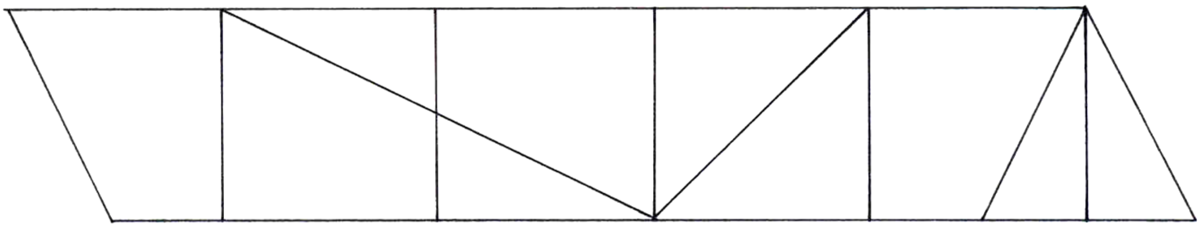
Niveaux : 5, 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 08.II.10 « légèrement adapté »

9. LE CARRÉ DE LÉA (Cat. 6, 7, 8)

Léa a trouvé dans le grenier de sa maison une vieille boîte contenant 10 figures géométriques en bois : 4 triangles rectangles non isocèles, 2 triangles rectangles isocèles et 4 trapèzes rectangles.

Avec toutes ces figures Léa a formé ce parallélogramme :



Léa se demande si elle peut former d’autres figures géométriques.

Aidez-là à reconstituer :

- 1 losange en utilisant 8 pièces bien choisies parmi les 10.

- 1 trapèze rectangle en utilisant 8 pièces bien choisies parmi les 10.

- 1 carré en utilisant l’ensemble des 10 pièces.

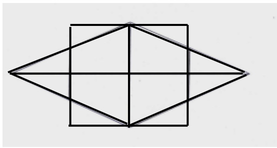
ANALYSE *A PRIORI*

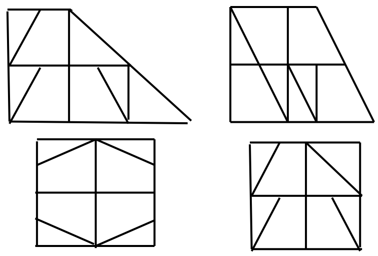
Domaines de connaissances

- Géométrie : décomposition et recomposition d’une surface plane en triangles et trapèzes. Comparaisons de longueurs et d’angles. Rotation et symétrie axiale.

Analyse de la tâche

- Comprendre quelles sont les figures à découper.
- Découper les figures et essayer de les accoler en faisant coïncider les côtés égaux.
- Se rendre compte qu’avec 8 figures :
  - on peut obtenir le losange en construisant, par exemple, d'abord un triangle rectangle (avec un trapèze et un triangle rectangle non isocèle) et en procédant ensuite par symétrie ; ou bien, en partant d'un hexagone convexe (obtenu avec les quatre trapèzes rectangles) et en ajoutant ensuite, convenablement, les quatre triangles rectangles non isocèles ;
  - on peut construire deux trapèzes rectangles différents, par exemple, en fixant son attention sur le moyen d’obtenir son côté oblique (par alignement des côtés obliques de deux trapèzes ou des hypoténuses de deux triangles rectangles du même type) et en complétant convenablement.

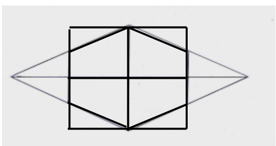




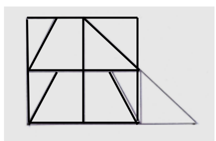
a *b*

Ou bien : remarquer qu'en réunissant correctement deux à deux les figures données, on obtient cinq carrés (l'un formé de deux triangles rectangles isocèles, les quatre autres formés d'un triangle rectangle non isocèle et d'un trapèze). Avec quatre de ceux-ci, on forme deux types de puzzles carrés de 8 pièces, le second utilisant les deux triangles rectangles isocèles (cf. *a* et *b*)

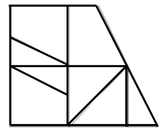
- Dans le cas *a*, on peut former le losange en disposant correctement les quatre triangles rectangles non isocèles, comme sur la figure (le quadrilatère obtenu est bien un losange, car il a deux axes de symétrie orthogonaux, et 4 côtés de même longueur).



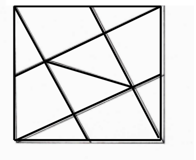
- Dans le cas *b*, on peut former le grand trapèze rectangle en disposant correctement un des deux triangles rectangles isocèles, comme sur la figure (le parallélisme et les angles droits sont assurés par la configuration des 4 carrés initiaux).



- ou bien obtenir un autre trapèze en assemblant deux trapèzes rectangles avec deux triangles rectangles non isocèles, complétés par un trapèze et les deux triangles rectangles isocèles formant un carré comme sur la figure.



- Se rendre compte qu'avec les 10 figures, on peut obtenir le grand carré en disposant en « position centrale » un petit carré formé des deux triangles rectangles isocèles et en le complétant par les quatre trapèzes rectangles « en tournant » autour du carré central et en terminant avec les quatre triangles rectangles restants, comme sur la figure.



Attribution des points

4 Réponse complète, avec les figures recomposées avec précision (dessins ou collages) avec au moins un des deux trapèzes

3 Deux figures bien recomposées

2 Une figure correctement recomposée

1 Construction avec précision d'au moins une des figures demandées (losange, trapèze rectangle, carré), en utilisant un nombre de pièces différent de la réponse attendue, mais supérieur à 2

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 17.II.11

10. LE RELAIS DE TRANSALPIE (Cat. 6, 7, 8)

En Transalpie, chaque année a lieu une course de relais de 99 km.

Chaque équipe est composée d'au moins deux coureurs.

Dans chaque équipe, un coureur parcourt un nombre entier de kilomètres avant de passer le témoin au suivant.

Le coureur qui reçoit le témoin doit courir exactement 1 km de plus que celui qui l'a précédé.

On peut constituer des équipes, avec un nombre différent de coureurs. Les 99 km du parcours sont répartis selon le nombre de coureurs de l'équipe.

Par exemple on peut former une équipe de trois coureurs : le premier parcourt 32 km, le deuxième 33 et le troisième 34, ce qui donne bien 32 + 33 + 34 = 99.

Combien peut-il y avoir de coureurs dans une équipe ?

Trouvez toutes les possibilités et indiquez les distances parcourues par chacun des coureurs de chaque équipe possible.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, décomposition d'un nombre en somme de nombres naturels consécutifs

Analyse de la tâche

- Transcrire la situation au niveau mathématique : il s'agit de trouver des décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et de se demander pour quels nombres de termes elles existent.
- La solution en deux termes, 49 + 50 = 99, est possible et facile à trouver, par exemple à partir de 50 (moitié de 100),

  la solution en trois termes, 32 + 33 + 34 est donnée,

  pour quatre termes, on peut travailler par approximations successives ou en partant directement de nombres proches de 25 (quart de 100) : 23 + 24 + 25 + 26 = 98 est trop petit, 24 + 25 + 26 + 27 = 102 est trop grand et il faut conclure qu'il ne peut pas y avoir d'équipes de quatre coureurs d'équipes, ,

  pour cinq termes, il n'y a pas non plus de solution ; on trouve en revanche une solution en six termes, en neuf termes et en onze termes. Au total, il y a 5 décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et donc **5 possibilités pour la formation des équipes :**

  2 coureurs : 49 + 50 = 99 **6 coureurs : 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 99**

  3 coureurs : 32 + 33 + 34 = 99 **9 coureurs : 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 99**

  11 coureurs : 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 99
- De nombreuses autres procédures permettent de trouver les cinq décompositions, mais font appel à une maîtrise plus élevée des propriétés des opérations. Par exemple : partir des sommes des premiers nombres naturels 1 + 2 = 3 ; 1 + 2 + 3 = 6 ; 1 + 2 + 3 + 4 = 10, etc, les soustraire de 99 et voir si la différence est un multiple de 2, de 3, de 4, etc ; ou constater que tous les nombres impairs sont la somme de deux nombres consécutifs, que les multiples de 3, 5, 7, … sont la somme respectivement de 3, 5, 7, … nombres consécutifs, etc.

Attribution des points

4 Les 5 compositions d'équipes différentes (ou 4 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

3 4 compositions d'équipes différentes (ou 3 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

2 3 compositions d'équipes différentes (ou 2 sans mentionner celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

Ou les 5 compositions d'équipes différentes mais avec au maximum deux autres incorrectes

1 1 ou 2 compositions d'équipes différentes (autres que celle de l'énoncé) avec les distances parcourues par chaque coureur et aucune composition incorrecte

Ou 3 ou 4 compositions d'équipes différentes mais avec au maximum trois autres incorrectes

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 20.F.11

11. UNE ANNÉE PARTICULIÈRE (Cat. 6, 7, 8)

2021

En 2021 les personnes nées en 19**47** fêtent leurs **74** ans : elles peuvent écrire leur âge en inversant les deux derniers chiffres de leur année de naissance.

En 2021 ce phénomène se produit aussi pour des personnes nées en d'autres années.

Indiquez quel âge ont toutes ces personnes en 2021.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver tous les âges des personnes dont les deux derniers chiffres de l'année de naissance forment, dans l'ordre inverse, l'âge qu'elles ont en 2021 Avec exemple d'une personne de 74 ans en 2021 née en 1947

Analyse de la tâche

- Procéder par essais plus ou moins organisés en faisant une hypothèse sur l'année de naissance, puis calculer l'âge correspondant en 2021 et valider ou non la réponse en contrôlant si le nombre donnant l'âge calculé correspond au nombre obtenu en inversant les deux derniers chiffres de l'année de naissance.

Ou : Procéder de même en faisant une hypothèse sur l'âge en 2021 et en calculant les années de naissances correspondantes.

Ou : Remarquer, après quelques essais, que la somme des chiffres des âges qui conviennent est 11. Lister alors tous les nombres de deux chiffres dont la somme des chiffres est 11. Vérifier la cohérence entre âges et années ainsi déterminés.

Ou : Remarquer que le chiffre des dizaines (ou celui des unités) du nombre désignant l'âge est nécessairement le complément à 11du chiffre des dizaines (ou respectivement de celui des unités) du nombre indiquant l'année de naissance. (Car la somme de l'âge et de l'année de naissance, 2021, se termine par 0). En déduire, qu'à cause de la condition sur l'inversion des chiffres, ce complément est le chiffre des dizaines (respectivement des unités) correspondant. Lister, alors tous les nombres de deux chiffres dont la somme des chiffres est 11pour déterminer tous les âges qui conviennent.

Attribution des points

4 Réponses correctes (29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92), avec explication claire

3 Réponses correctes et complètes sans explications
Ou réponse correcte avec un oubli (différent de 74)

2 Réponse incomplète (de 2 à 4 oublis), mais qui montre une bonne compréhension d'un problème et témoigne de la mise en place d'une stratégie pour essayer de lister les réponses possibles

1 Début de recherche, une année de naissance au moins a été correctement déterminée (différente de 74)

0 Incompréhension du problème.

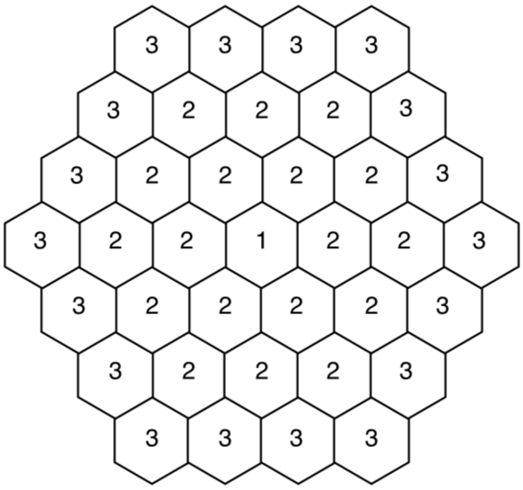
Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 20.I.13 « adapté »

12. LE RÉSEAU HEXAGONAL DE ROSALIE (Cat. 6, 7, 8)

Dans ce réseau hexagonal, on se déplace d'une alvéole à une alvéole voisine (deux alvéoles sont voisines si elles ont un côté commun).

Rosalie part de l'alvéole du centre (1) et rejoint une alvéole de l'extérieur (3) en passant par deux autres alvéoles (2).



En se déplaçant de cette manière, Rosalie doit donc faire toujours quatre étapes : 1, 2, 2, 3.

Combien de chemins différents Rosalie peut-elle emprunter ?

Expliquez comment vous avez compté ces chemins.

ANALYSE *A PRIORI*

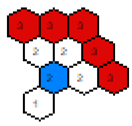
Domaine des connaissances

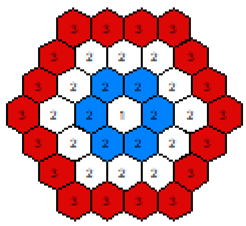
Logique et combinatoire : dénombrement

Analyse de la tâche

- Observer la structure de la grille : une alvéole centrale (1), et trois « ceintures » d'hexagones concentriques d'alvéoles 2, 2 et 3
- Observer que les des deux alvéoles 2 d'un chemin ne peuvent pas être sur le même hexagone.
- Compter qu'il y a six choix pour la première alvéole 2 (du premier hexagone)
- Compter qu'il y a pour chacune de ces premières alvéoles 2, trois possibilités de prendre une deuxième alvéole 2 du deuxième hexagone (voir le motif partiel ci-dessous).
- Compter qu'il y a, pour ces dernières alvéoles 2, selon leur position, deux ou trois possibilités d'aboutir à une alvéole 3. (Si l'alvéole 2 est au sommet de l'hexagone, elle est voisine de trois alvéoles 3, si l'alvéole 2 est au milieu d'un des dôtés de l'heagone, elle n'est voisine que de deux alvéoles 3.
- En déduire que le nombre de chemins 1-2-2-3 possibles correspond se calcule par $(6 \times 2 \times 2) + (6 \times 1 \times 3) = 42$

Ou compter qu'il y a 7 chemins 1-2-2-3 dans le motif ci-contre et remarquer qu'il se répète radialement six fois pour donner la grille





Ou observer que les alvéoles 3 des sommets de l'hexagone du bord ne peuvent être atteintes que par un seul chemin (en ligne droite) alors que les alvéoles 3 qui ne sont pas sur les sommets peuvent être atteintes par trois chemins et que, par conséquent il y a $42 = (6 \times 1) + (12 \times 3)$ chemins possibles.

Attribution des points

4 Réponse correcte (42) et le dénombrement est expliqué ou montré

3 Réponse correcte et les explications sont partiellement données

Ou réponse 36 qui correspond à l'oubli d'un chemin passant par une des alvéoles 2 située sur un sommet du deuxième hexagone (deux chemins pour aller sur une alvéole 3 au lieu des trois possibles)

2 Réponse correcte sans explication
Ou une réponse de 37 à 41

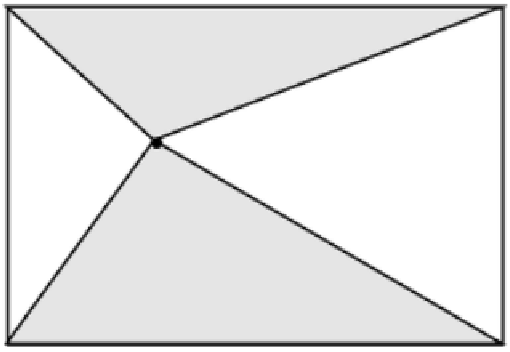
1 De 30 à 35 chemins
Ou absence de réponses mais début d'organisation cohérente du comptage
Ou une réponse supérieure à 42, justifiée par des calculs basés sur une confusion de chemins (par exemple $6 \times\cdot 3 \times\cdot 3 = 54$ en faisant l'erreur que pour chaque deuxième 2 on a trois possibilités d'arriver à une alvéole 3)

0 Moins de 30 chemins ou incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 19.F.12

13. L'HÉRITAGE (Cat. 7, 8)



Deux frères héritent d'un terrain de forme rectangulaire.
Pour le diviser en deux parties de même aire, un voisin leur suggère de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de le relier avec des piquets plantés aux quatre sommets du terrain.

Un des frères prendra la partie en gris sur la figure, l'autre la partie restante.

Les deux parties seront-elles vraiment égales ?

Justifiez votre raisonnement.

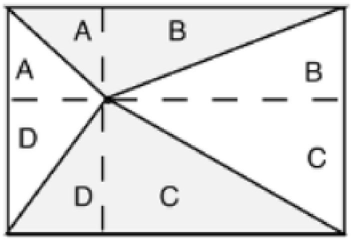
ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Observer un rectangle découpé en quatre triangles par quatre segments reliant un point à l'intérieur du rectangle à chacun des quatre sommets. Montrer que la superficie totale des deux triangles dont la base est une longueur du rectangle est équivalente à celle des deux autres triangles (dont la base est une largeur du rectangle).

Analyse de la tâche

- Comprendre que, si on trace les parallèles aux côtés par le point où est planté le piquet, indépendamment de son emplacement, la partie grise et la blanche sont toutes deux composées des quatre mêmes triangles A, B, C, D.



Ou : Comprendre que pour tout point du rectangle, quatre triangles sont déterminés, ayant deux a deux comme base une des deux dimensions du rectangle et comme somme des hauteurs, l'autre dimension, et que la somme des aires (de deux triangles qui ont bases et hauteurs égales) ne change pas.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec procédé démonstratif (du type indiqué dans l'analyse de la tâche)
3 Réponse correcte à la question avec une erreur logique dans les explications
2 Réponse correcte avec recours à des exemples (le piquet au centre ou dans d'autres positions)
1 Réponse correcte avec recours à la mesure ou réponse correcte à la question sans aucune explication
0 Explications complètement erronées ou incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 08.I.16

14. LES BISCUITS D'ÉMILIE (Cat. 8, 9, 10)

Émilie a confectionné des petits biscuits, entre 300 et 500.

Elle réfléchit à la façon dont elle pourrait les emballer dans plusieurs sachets contenant tous le même nombre de biscuits :

- si elle met 8 biscuits par sachet, il lui en restera 7,
- si elle met 9 biscuits par sachet, il lui en restera 5,
- si elle met 12 biscuits par sachet, il lui en restera 11,
- si elle met 16 biscuits par sachet, il lui en restera 15.

Combien de biscuits Émilie a-t-elle faits ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer un nombre compris entre 300 et 500 dont on connaît les restes, 5, 7, 11, 15 des divisions par 9, 8, 12 et 16.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour chacune des conditions, il y a plusieurs nombres possibles, obtenus à partir des multiples respectifs de 9, 8, 12, et 16 par addition de, respectivement, 5, 7, 11 et 15.
- Écrire les quatre listes de nombres ainsi obtenues et faire ressortir les nombres communs à une ou plusieurs listes (en couleur, par des marques, etc.) :

  liste des multiples de 8 plus 7 : 7, 15, 23, 31, 39, 47, 55, 63, 71, 79, 87, 95, 103, 111, 119, 127, 135, 143, 151, 159, 167, ...

  liste des multiples de 9 plus 5 : 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77, 86, 95, 104, 113, 122, 131, 140, 149, 158, 167, 176, ...

  liste des multiples de 12 plus 11 : 11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, 107, 119, 131, 143, 155, 167, 179, ...

  liste des multiples de 16 plus 15 : 15, 31, 47, 63, 79, 95, 111, 127, 143, 159, 175, 191, ...
- Constater que 95 est le premier nombre commun dans les quatre suites et les compléter par des calculs analogues jusqu'à 383.

Ou bien :

Voir d'autres propriétés : les nombres communs aux trois listes "8", "9","12"qui apparaissent en 23, 95, 167, ..., vont de 72 en 72, (plus petit multiple commun de 8, 9, 12), ou comme les nombres communs aux trois listes "8", "12" et "16" qui apparaissent en 47, 95, 143, ... vont de 48 en 48 (plus petit multiple commun de 8, 12 et 16), etc.

et poursuivre par des raisonnements analogues jusqu'à 383.

Ou bien :

- Chercher directement le plus petit multiple commun de 8, 9, 12, 16, qui est 144, puis écrire la liste des multiples de 144 auxquels on ajoute 95 : 95, 239, 383, 527 et choisir le 383, qui se situe entre 300 et 500.

Ou bien :

- Se rendre compte que x+1 est multiple de 8, 12 et 16, c'est-à-dire de 48. Chercher, parmi les multiples de 48 compris entre 300 et 500 (336, 384, 432, 480) celui qui, lorsqu'on retranche 1, donne un reste de 5 par une division par 9 (335:9 = 37 r=2, 383:9 = 42 r=5, 431:9 = 47 r=8, 479:9 = 53 r=2) et trouver ainsi 383.

Attribution des points

4 Réponse 383 biscuits, avec explications détaillées montrant une méthode rigoureuse (experte ou par listes)

3 Réponse 383 biscuits, avec explications moins fouillées ou pas très claires

2 Réponse 383 biscuits sans explications

Ou démarche correcte avec une erreur de calcul dans la recherche des multiples

1 Autre réponse, mais avec des listes partiellement justes ou explications témoignant d'une partie de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes 13.I.12

15. LA CUEILLETTE DES CHAMPIGNONS (Cat. 8, 9, 10)

C'est la saison des champignons. Antonio, Patricia, Michel et Fabienne vont dans les bois à leur recherche. À la fin de la journée ils en ont ramassé 57. Les quatre amis comparent le contenu de leurs paniers et se rendent compte que :

- si Antonio avait ramassé un champignon de plus,
- si Patricia en avait ramassé 4 de moins,
- si Michel en avait ramassé le double,
- si Fabienne en avait ramassé la moitié,

chacun d'eux aurait alors le même nombre de champignons dans son panier.

Combien de champignons chacun de ces quatre amis a-t-il ramassés ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Décomposer 57 en quatre termes a, b, c, d sachant que a+1 = b-4 = 2 x c = d/2.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut faire un raisonnement par hypothèses.
- Procéder par essais organisés (considérant par exemple que le nombre de champignons de Fabienne doit être pair et multiple de 4 et vérifier chaque fois que toutes les conditions sont respectées

Ou

- Partir de 14 (proche de 57 : 4) comme nombre de champignons cueillis par chacun et vérifier qu'on obtiendrait ainsi plus de champignons que 57 ((14 - 1) + (14 + 4) + 7 + 28 = 66); procéder ensuite par ajustements successifs à partir de nombres pairs (le double de ceux ramassés par Michel) et trouver qu'avec 12 toutes les conditions sont respectées. ((12 - 1) + (12 + 4) + 12 :2 + 12 x 2 = 57).

Ou

- Procéder par voie algébrique. Il y a alors plusieurs choix possibles de l'inconnue mais on aboutit à des équations du premier degré de même difficulté.

  Par exemple si x est le nombre de champignons que chacun aurait trouvé on a alors (x - 1) + (x + 4) + 2x + (1/2) x = 57. On peut aussi désigner par x le nombre de champignons ramassés par l'un des amis pour arriver à une équation du genre : (2x - 1) + (2x + 4) + x + 4x = 57 où x est le nombre de champignons ramassés par Michel, etc.

  (On peut aussi arriver à ces équations à partir des égalités: a + 1 = p - 4 = 2m = f/2, où a, p, m, f sont les nombres de champignons ramassés par Antonio, Patricia, Michel et Fabienne.)

- Trouver dans chaque cas que Antonio a ramassé 11 champignons, Patricia 16, Michel 6 et Fabienne 24.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Antonio 11, Patricia 16, Michel 6 et Fabienne 24) avec explication claire et cohérente

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire

2 Réponse qui respecte les quatre hypothèses mais pas le total de 57 ; par exemple 13, 18, 7, 28 (où chacun aurait cueilli 14 champignons)

Ou réponse correcte sans aucune explication ou avec seulement une vérification

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes 19.I.15

16. LE RECTANGLE À DESSINER (Cat. 9, 10)

Est-il possible de dessiner un rectangle de 12 cm sur 2 cm dans une feuille carrée de 10 cm de côté ?

Et un rectangle de 13 cm sur 2 cm ?

Justifiez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

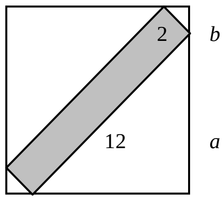
Domaine de connaissances

- Géométrie et mesures : aires, Pythagore, relation entre les longueurs de la diagonale et du côté d'un carré

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'on ne peut pas placer les côtés du rectangle parallèlement à ceux du carré.
- Observer que la disposition d'un rectangle ayant la plus grande longueur possible est de placer ses quatre sommets sur les côtés du carré, avec ses axes de symétrie sur les diagonales du carré.
- Effectuer les calculs pour vérifier si un rectangle 2 x 12 peut être entièrement à l'intérieur du carré 10 x 10. Il y a plusieurs méthodes.

  Par exemple considérer le plus petit carré dans lequel on peut inscrire le rectangle le long d'une diagonale (dessin 1). Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer $2a^2 = 144 \Rightarrow a = \sqrt{72}$ et $2b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

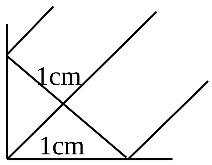
  

  et en déduire la somme $a + b \approx 9{,}9$, ce qui signifie que le rectangle 2 x 12 est inscrit dans un carré d'environ 9,9 cm de côté. Conclure que le dessin est possible.

  Par contre avec un rectangle 2 x 13, $a = \sqrt{\frac{169}{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$ et $b = \sqrt{2}$, d'où $a + b > 10{,}6$.

  Le dessin est impossible.

Ou bien, remarquer que le contact de la largeur du rectangle avec deux côtés adjacents du carré forme un triangle rectangle isocèle et donne les mesures du dessin 2.



- En déduire que la diagonale du carré minimal a pour longueur
  1 + 12 + 1 = 14 cm pour le rectangle 2 x 12 et 15 cm pour le rectangle 2 x 13.
- Comparer avec la diagonale du carré 10 x 10. Sa longueur est $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm.
- Conclure que le dessin est possible pour le premier et impossible pour le deuxième.

Ou bien, calculer la longueur de la diagonale du carré 10 x 10 en utilisant le théorème de Pythagore : 14,14 cm (environ), et ensuite enlever les 2 segments de diagonale aux extrémités, de longueur 1 cm pour chacun comme indiqué ci-dessus, il reste donc 12,14 cm, ce qui permet de placer le rectangle 12 x 2, mais pas le rectangle 13 x 2.

Attribution des points

4 Réponses correctes « oui et non » avec les dessins et des calculs justifiés analogues aux exemples donnés

3 Réponses « oui et non », avec les dessins mais avec des lacunes dans l'explication ou des calculs non justifiés

2 Réponse correcte pour une seule des deux questions qui témoignent de calculs corrects ou avec un dessin très soigné

1 Réponses sur la base de mesures seulement
ou une seule réponse avec une erreur de calcul mais avec un dessin correct

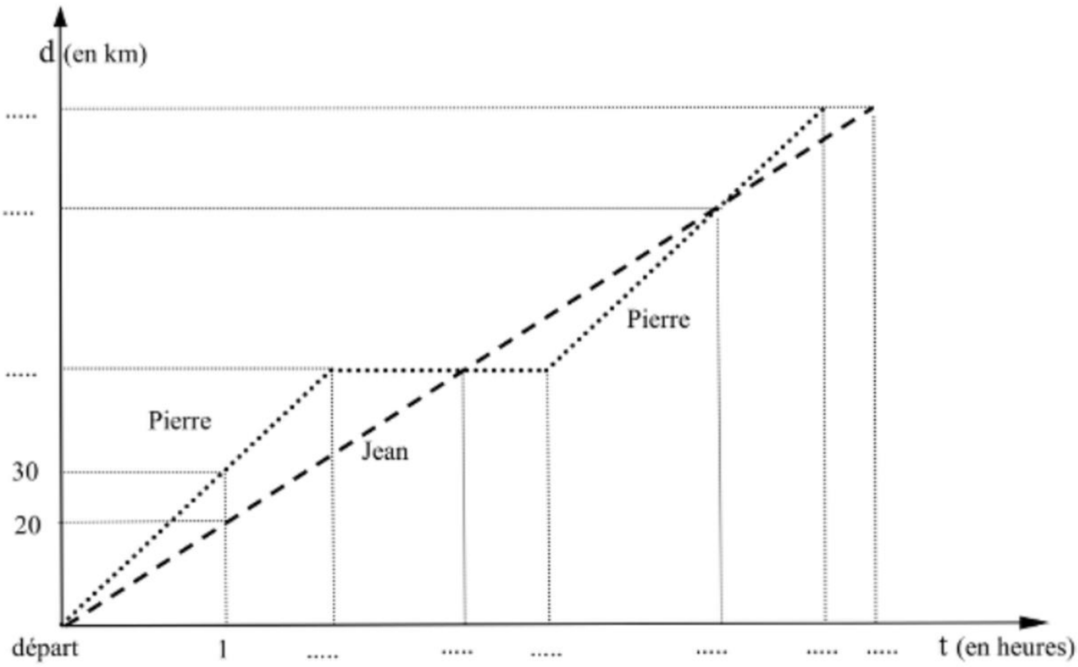
0 Réponse « oui » basée sur les aires, ou réponse « non » basée sur les longueurs des côtés, ou incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes 19.II.19

17. LA RANDONNÉE CYCLISTE (Cat. 9, 10)

Deux amis, Jean et Pierre, partent ensemble un dimanche à 8 heures pour une randonnée de 100 km. Jean roule à 20 km/h et Pierre à 30 km/h. Pierre crève au 50e km et doit trouver un pneu pour réparer.
En tout, cette réparation lui prend 1 h 20 min puis il repart. À la fin de la randonnée, les deux amis se retrouvent à l'arrivée.
La situation est représentée par le graphique ci-dessous :



À quelle heure Pierre a-t-il dépassé Jean après sa crevaison ?
Quelle est alors la distance parcourue par les deux cyclistes ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine conceptuel

- Mesures : temps et vitesses, calculs horaires.
- Représentation graphique : représentation cartésienne d'un déplacement en fonction du temps.

Analyse de la tâche

- Remarquer que toutes les questions portent sur la chronologie de l'histoire. Il faut donc la décrire entièrement en termes d'horaires.
- A la vitesse constante de 30 km/h, Pierre a parcouru 50 km en 1 h 40 mn (30 km en une heure et 20 km en 2/3 d'heure). Il a mis 1 h 20 min pour trouver un pneu et réparer. Il est donc reparti 3 h après le départ de la randonnée, à 11 h.
- Quand Pierre est reparti à 11 heures, Jean avait fait 60 km (3 heures à 20 km/h). Pierre avait donc un handicap de 10 km. En une heure il parcourt 30 km, alors que Jean ne fait que 20 km. Pierre a donc dépassé Jean une heure après être reparti, à midi. Jean avait alors fait 80 km.

On peut calculer l'heure où Pierre a dépassé Jean en utilisant les équations horaires de leurs déplacements.

- Pour Jean : $d_J = 20\ t$.

- Pour Pierre, après 50 km, 3 heures après leur départ matinal : $d_P = 30 (t – 3) + 50$.
- L'heure où Pierre dépasse Jean est alors donnée par l'équation $20 t = 30 (t – 3) + 50$, d'où $t = 4$ heures. Pierre a dépassé Jean à midi. Ils avaient alors parcouru 80 km.

Ou : remarquer que le graphique est à l'échelle et en déduire les coordonnées du point d'intersection I(4 ; 80).

Erreurs possibles :

- L'heure à laquelle Pierre rattrape Jean n'a pas été précise (réponse 4h au lieu de 12h).
- Détermination des coordonnées de l'autre point d'intersection, celui où Jean rattrape Pierre (2,5h et 50 km).

Attribution des points

4 Réponse correcte (12 h 00 et 80 km), avec explications claires.
3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou réponse (4h et 80km) avec explications claires.
2 Réponse correcte sans explications ou réponse (4h et 80km) avec explications peu claires.
1 Début de recherche ou réponse (2,5h et 50km) avec explications.
0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes 18.II.20 « adapté »

18. ALIGNEZ-VOUS PAR TROIS ! (Cat. 9, 10)

Il est facile de choisir, dans le plan, 6 points distincts sur 2 droites distinctes de façon que chacune de ces droites passe par exactement 3 de ces 6 points ; comme sur la *Figure 1*.

Il est également possible de choisir 6 points distincts sur 3 droites distinctes de façon que chacune de ces droites passe par exactement 3 de ces 6 points, comme sur la *Figure 2*.

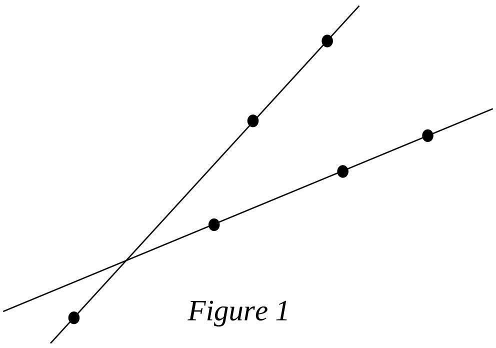


Figure 1

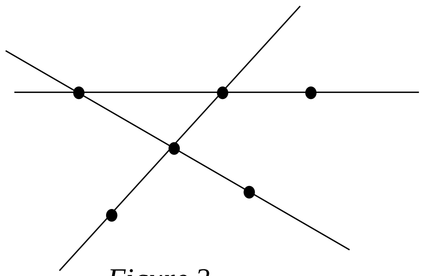


Figure 2

Est-il possible de choisir 6 points sur plus de 3 droites, de façon que chacune de ces droites, passe par exactement 3 de ces 6 points?

Dans ce cas, dites combien il peut y avoir de droites au maximum et dessinez-les en y notant les 6 points.

Et si l'on choisit 9 points distincts du plan, combien peut-il y avoir de droites, au maximum, de façon que chacune de ces droites passe par exactement 3 de ces 9 points ?

Indiquez le nombre maximum de droites que vous avez trouvé et dessinez-les, avec les 9 points.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Géométrie : droites et points alignés

Analyse de la tâche

- En observant les deux exemples, prendre conscience qu'on obtient davantage d'alignements de 3 points lorsque certains points appartiennent à plus d'une droite.
- Avec 6 points, pour trouver un quatrième alignement, par rapport à la figure 2, il suffit par exemple de déplacer l'un des 3 points qui sont encore sur une seule droite (par exemple E de la *figure 2*) sur sa droite pour former un nouvel alignement :(*Figure 3*)

  On obtient ainsi une figure où chacun des 6 points appartient à deux alignements de 3 points.

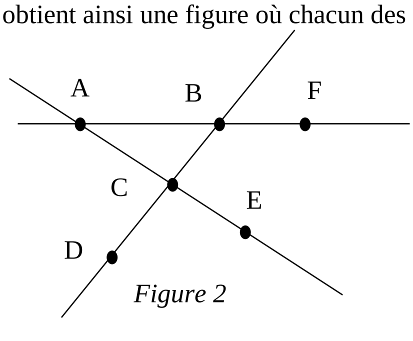


Figure 2

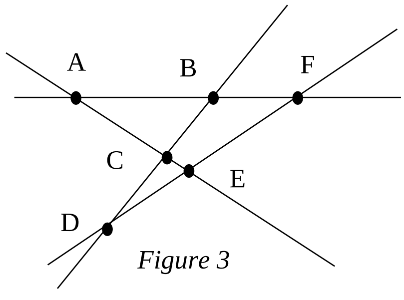


Figure 3

- Pour placer 9 points, commencer par chercher quel est le plus grand nombre de droites qu'on peut obtenir avec 7 points, puis 8 points.
- Pour 7 points, partir du placement de 6 points, chercher où placer un 7^e^ point de façon à faire apparaître un maximum d'alignements de 3 points. Pour cela, repérer des couples de points qui ne sont pas déjà alignésavec un troisième, par exemple (A, D) et (C, F) et placer G à l'intersection de ces deux droites. On obtient 6 alignements de 3 points. (*Figure 4*)
- Pour 8 points, continuer à partir du placement obtenu de 7 points en suivant la même démarche. Constater que les seuls couples de points qui ne sont pas sur un alignement de 3 points sont sur l'exemple (B, E), (B, G) et (E, G), que la seule possibilité est de placer un 8^e^ point, par exemple H, sur l'une de ces droites. (*Figure 5*). On arrive ainsi à 8 points en 7 alignements de trois.

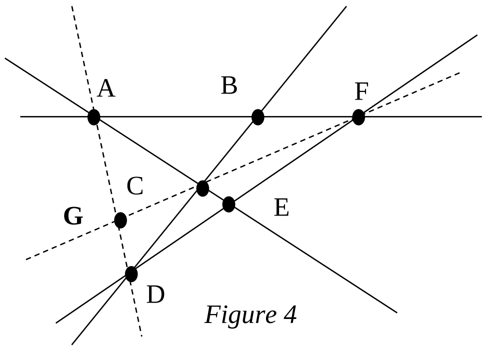


Figure 4

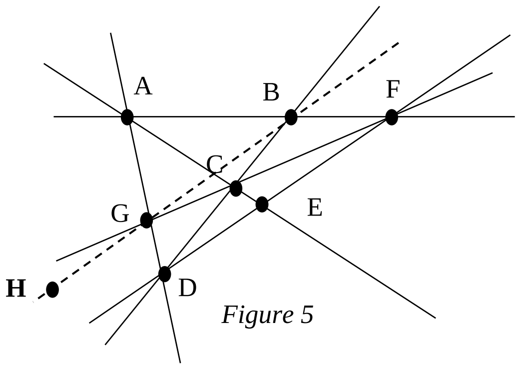
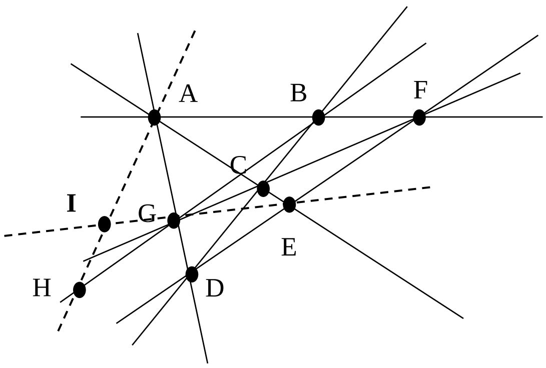


Figure 5

- Pour les 9 points, on peut tracer les deux autres droites passant par deux couples de points par lesquels ne passent pas encore de droites : (E; G) et (A ; H) sur l'exemple ci-dessous (*Figure 6*). On arrive ainsi au maximum : 9 points et 9 droites.

Figure 6



Ou : succession d'essais de placements inorganisés de 6 points d'une part, et de 9 points d'autre part, de façon à faire apparaître le plus possible de droites passant par 3 de ces points.

Attribution des points

4 Réponse complète et optimale (oui, 4 droites pour 6 points et 9 droites pour 9 points), avec les deux dessins correspondants

3 Réponse non optimale (oui, 4 droites pour 6 points et 8 droites pour 9 points), avec les deux dessins correspondants

2 Réponse non optimale (oui, 4 droites pour 6 points et 6 ou 7 droites pour 9 points), avec les deux dessins correspondants

1 Réponse non optimale avec erreurs dans le placement des points (plus de 3 sur un alignement) ou le comptage des alignements

ou seulement une réponse correcte pour 6 points avec dessin

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes 21.I.18

19. AMIS SUPPORTERS (Cat. 9, 10)

Deux amis, Jean et Pierre sont passionnés de football, mais supportent deux équipes différentes. Ils confrontent les résultats obtenus par leurs équipes dans le dernier championnat.

Jean affirme : « *Si mon équipe avait gagné quatre matchs de plus et la tienne quatre matchs de moins, mon équipe en aurait gagné le double de la tienne* ».

Pierre ajoute : « *Oui, c'est juste. Mais il est aussi vrai que si ton équipe avait gagné quatre matchs de moins et la mienne quatre matchs de plus, nos deux équipes auraient gagné le même nombre de matchs* ».

Dans ce dernier championnat, combien de matchs l'équipe de Jean et l'équipe de Pierre ont-elles gagnés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

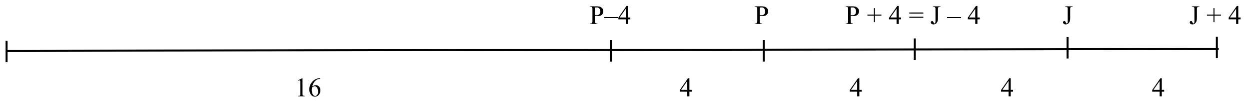
- Arithmétique : nombres pairs et impairs, opérations avec les entiers naturels
- Algèbre : introduction de lettres pour représenter des relations entre nombres, équations et systèmes linéaires

Analyse de la tâche

- Comprendre, d'après l'affirmation de Pierre, que l'équipe de Jean a gagné 8 matchs de plus que celle de Pierre.
- Comprendre, d'après l'affirmation de Jean, que l'équipe de Pierre a gagné au moins 4 matchs et que l'équipe de Jean a gagné un nombre pair de matchs (parce que ce nombre augmenté de 4 est pair étant le double d'un autre nombre). En déduire de même que le nombre de matchs perdus par l'équipe de Pierre est pair (parce qu'additionné à 8 il donne un nombre pair).
- Procéder par essais organisées, éventuellement en se servant d'un tableau. Supposer que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Pierre est 6, 8, 10, 12…, considérer par conséquent que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Jean est 14, 16, 18… et vérifier si les conditions de l'énoncé sont respectées. Conclure qu'avec 20 matchs gagnés par l'équipe de Pierre et 28 matchs gagnés par l'équipe de Jean, les deux affirmations sont vérifiées.

Ou bien : en langage algébrique, introduire des lettres pour représenter le nombre des matchs gagnés par les deux équipes. Par exemple, P pour l'équipe de Pierre et J pour l'équipe de Jean. Exprimer la seconde affirmation en écrivant $J = P + 8$. Chercher ensuite la valeur de P qui rend $J + 4$, c'est-à-dire $P + 12$, égal à $2\,(P – 4)$. En déduire que $12 = P – 8$, d'où $P = 20$. Conclure que $J = 28$.

Ou bien : construire un schéma du type suivant, considérant que $J + 4$ est le double de $P – 4$ et qu'il y a 16 matchs de différence entre $J + 4$ et $P – 4$, du fait que $J – 4 = P + 4$:



En déduire que $J + 4 = 2 \times 16 = 32$, d'où $J = 28$ et $P = 20$.

Ou bien, au niveau 10, noter par exemple par a le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Pierre et par b le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Jean et traduire les conditions de l'énoncé par le système linéaire suivant :

En soustrayant les deux équations membre à membre, on a : $8 = a – 12$, d'où $a = 20$ et $b = 28$.

Attribution des points

4 Réponse correcte (20 matchs pour l'équipe de Pierre et 28 pour l'équipe de Jean) avec des explications qui montrent clairement la procédure suivie, de manière arithmétique ou algébrique

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Réponse claire, mais erronée à cause d'une erreur de calcul
ou mise en équation correcte avec une erreur dans la résolution du système,
ou réponse correcte sans explication

1 Réponse erronée qui ne tient compte que d'une affirmation sur les deux,
ou début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes 20.II.16

20. CARTES ROUGES ET CARTES NOIRES (Cat. 9, 10)

Mario joue à un jeu de solitaire avec un paquet de cartes rouges et de cartes noires. Les règles qui suivent sont relatives à un jeu de solitaire pour lequel on dispose d'un paquet de cartes rouges et de cartes noires :

- on commence par disposer sur la table 12 cartes dont au moins deux cartes rouges et deux cartes noires,
- à chaque coup, on peut enlever de la table soit une carte, soit deux cartes ensemble en respectant les conditions suivantes :
  - si on retire une carte rouge, on doit en remettre deux autres rouges sur la table, tirées du paquet,
  - si on retire deux cartes rouges ensemble, on doit remettre sur la table une carte noire tirée du paquet,
  - si on retire une carte noire, on doit remettre une autre carte noire sur la table, tirée du paquet,
  - si on retire deux cartes noires ensemble on ne doit rien remettre sur la table.
- La partie se termine quand il ne reste plus de carte sur la table.

Pour sa première partie, Mario décide de disposer sur la table 6 cartes rouges et 6 cartes noires.

Indiquez le nombre et la suite des coups à jouer pour faire cette partie avec le moins de coups possibles.

Mario est convaincu qu'il existe une meilleure disposition des cartes pour finir plus rapidement son solitaire.

Selon vous, combien de cartes rouges et de cartes noires doit-on mettre sur la table au départ pour terminer le solitaire en un minimum de coups ?

Donnez la combinaison que vous proposez et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaines de connaissances

- Logique : contrôle de plusieurs conditions en même temps ; raisonnement hypothético-déductif ; développement d'une stratégie qui minimise le nombre de coups

Analyse de la tâche

- Essayer de jouer une partie, réelle ou virtuelle, pour comprendre les règles du jeu et les appliquer, éventuellement en s'aidant d'une représentation des coups autorisés, du type :

R→RR	N→N
RR→N	NN→//

- Se rendre compte que, pour pouvoir finir le solitaire, il faut éliminer les cartes rouges de telle sorte qu'il ne reste qu'un nombre pair de cartes noires sur la table.

Pour la partie 6 cartes rouges et 6 cartes noires

- Considérer qu'en partant de 6 cartes noires et 6 cartes rouges, les six cartes noires peuvent être éliminées en **trois coups** (NN→//, NN→// et NN→//).
- Pour les cartes rouges, comprendre qu'en les éliminant deux par deux, on devrait prendre en échange trois cartes noires dont deux pourraient ensuite être éliminées en un coup, mais il resterait une carte noire qui ne permettrait plus de finir le solitaire.
- Changer alors de stratégie et considérer que quatre cartes rouges peuvent être éliminées en **trois coups**. En effet, en deux coups (RR→N et RR→N) on obtient deux cartes noires qui, avec un troisième coup, s'éliminent ensemble (NN →//). Il reste alors deux cartes rouges. Pour chacune d'elles, on obtient une carte noire en deux coups (R→RR et RR→ N) et l'on élimine enfin les deux cartes noires avec un dernier coup (NN→//), ce qui ajoute au total **cinq autres coups**.
- En déduire que le nombre minimum de coups qui permettent de terminer ce premier solitaire est 11.

Partie optimale

- Comprendre qu'avec quatre cartes rouges on obtient deux cartes noires en 2 coups (RR→N et RR→N), et que deux cartes rouges donnent deux cartes noires en 4 coups (R→RR et RR→N ; R→RR et RR→N). Si on a une carte rouge, celle-ci donne deux cartes noires en 5 coups (le premier coup est R→RR puis on procède avec les deux cartes rouges comme ci-dessus) ou bien une unique carte noire en 2 coups (R→RR et RR→N).
- Déterminer les répartitions possibles entre les cartes rouges et noires dans le cas présent de 12 cartes dont 2 rouges et 2 noires :

  10R-2N ; 9R-3N ; 8R-4N ; 7R-5N ; 6R-6N ; 5R-7N ; 4R-8N ; 3R-9N ; 2R-10N
- Comprendre que la répartition qui limite le plus le nombre de coups à effectuer est celle dans laquelle on a un nombre pair de cartes noires et un nombre de cartes rouges divisible par quatre, ce qui donne les cas 8R-4N et 4R-8N. En déduire que la situation la plus favorable est celle dans laquelle on a le maximum de cartes noires, c'est-à-dire 4R-8N, qui permet de finir le solitaire en 7 coups (2 pour changer en noir les cartes rouges et 5 pour éliminer les cartes noires), alors que l'autre situation, 8R-4N, permet seulement de conclure le solitaire en 8 coups.

Ou considérer tous les cas de répartition des 12 cartes entre les rouges et les noires et, dans tous les cas, jouer en minimisant le nombre de coups et en les comptant. Compléter alors un tableau du type :

Nombre de cartes rouges	10	9	8	7	6	5	***4***	3	2
Nombre de cartes noires	2	3	4	5	6	7	***8***	9	10
Nombre de coups	12	10	8	13	11	9	***7***	12	10

Attribution des points

4 Réponses correctes (11 coups et 4 cartes rouges et 8 cartes noires) avec explications claires et complètes

3 Réponse correctes sans prouver que c'est la disposition optimale

2 Réponse correcte à la première question (11 coups) et une autre disposition permettant d'atteindre moins de 11 coups, mais qui n'est pas la disposition optimale

1 Réponse correcte à la première question (11 coups)

0 Incompréhension du problème ou autre réponse

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes 17.II.13 et 17.II.21 « réunis »