Titre		**Catégorie**								**Origine**	**Domaine mathématique**
1	Bonbons à gogo	3								18.II.01	Logique
2	Questions et réponses	3	4							18.I.03	Arithmétique : problème “tout ou partie”
3	Les ballons colorés	3	4							24.I.01	Arithmétique : patern, proportionnalité
4	Les dés	3	4							23.II.01	Géométrie dans l’espace et arithmétique
5	Parties de ping-pong	3	4	5						17.I.03	Combinatoire : Dénombrer combinaison de 2 éléments parmi 5
6	La frise d’Annie		4	5	6					25.II.07	Calcul d’une aire dans une frise périodique.
7	Jeu d’anniversaire		4	5	6	7				17.I.10	Logique
8	Cartable RMT			5	6					16.II.07	Arithmétique : équivalence, addition, multiplication
9	Mousse au chocolat			5	6					20.I.10	Arithmétique : addition, multiplication, proportionnalité
10	Clous et fils élastiques			5	6	7				19.I.10	Géométrie : reconnaissance de rectangles en tenant compte de leurs propriétés
11	La maquette			5	6	7	8			19.II.11	Géométrie : vision dans l’espace, points de vue
12	Sur le mur de l’école				6	7	8			18.II.13	Géométrie
13	Les pots de confiture					7	8	9		06.II.11	Algèbre
14	Le chien et le renard					7	8	9	10	20.F.13	Grandeurs et mesures et algèbres
15	Les carrés d’Alex et de François					7	8	9	10	17.II.16	Géométrie : Aires et périmètres de carrés et rectangles
16	Jeu d’encastrement						8	9	10	17.F.17	Géométrie : patron d’un solide
17	L’artisan						8	9	10	17.II.18	Algèbre : Equations
18	Le marathon de Transalpie							9	10	18.I.17	Numération : valeur positionnelle d’un code
19	Aladin et le trésor d’Ali Baba							9	10	19.I.17	Logique : double négation
20	La saga des carrés								10	18.II.18	Géométrie : Pythagore

1. BONBONS À GOGO (Cat. 3)

Marion a acheté des bonbons qui se ressemblent tous, mais avec trois goûts différents : des bonbons à la menthe, des bonbons à la framboise et des bonbons au citron. Elle a acheté plus de bonbons à la framboise que de bonbons au citron.

Elle met tous les bonbons à la menthe dans un pot, tous les bonbons à la framboise dans un autre et tous les bonbons au citron dans un troisième pot.

Les trois pots sont de tailles différentes : un grand pour les bonbons les plus nombreux, un petit pour les bonbons les moins nombreux et un moyen pour les autres bonbons.

Les bonbons au citron ne sont pas dans le petit pot.

Quelle sorte de bonbons a-t-elle mis dans le grand pot, dans le moyen pot et dans le petit pot ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déduire une information à la lecture d'assertions sur des comparaisons de quantités d'objets et de taille de contenant.

Analyse de la tâche

Procéder par raisonnement :

- Comprendre, d'après l'énoncé, qu'il y a trois quantités de bonbons différentes, trois pots de grandeurs différentes et qu'il y a un lien entre la grandeur des pots et le nombre des bonbons qu'ils contiennent.
- Se rendre compte que le petit pot ne peut contenir les bonbons à la framboise (puisqu'il y en a plus que de bonbons au citron), ni les bonbons au citron (qui ne sont pas dans le petit pot) et donc il doit nécessairement contenir les bonbons à la menthe.
- En déduire que les bonbons à la framboise, plus nombreux que ceux au citron, sont dans le grand pot et les bonbons au citron se trouvent dans le pot moyen.

Ou

- Se rendre compte que les bonbons au citron ne peuvent être ni dans le petit pot (dit explicitement dans l'énoncé) ni dans le grand (puisque ceux à la framboise sont plus nombreux) et qu'ils sont donc dans le moyen et arriver à la même déduction que précédemment.

Ou

- Procéder par essais en vérifiant le respect des contraintes et en réajustant si nécessaire.

Attribution des points

4 Solution complète (framboise dans le grand pot, citron dans le moyen et menthe dans le petit pot) avec gestion claire et correcte des essais ou raisonnement correct

3 Solution complète, avec explications incomplètes ou peu claires

2 Solution complète sans aucune explication

1 Début de recherche cohérente : respect d'une seule condition

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3

Banque de problèmes de l'ARMT 18.II.01

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=ud163-fr&flag=1&langue=fr&w=0

2. QUESTIONS ET RÉPONSES (Cat. 3, 4)

Nicolas a reçu un nouveau jeu.

Dans ce jeu, le joueur doit répondre à des questions et déplacer son pion sur une piste numérotée de 0 à 50.

Au début d'une partie, le pion est placé sur la case 25.

Chaque fois que le joueur donne une bonne réponse, il avance son pion de trois cases.

Chaque fois qu'il donne une mauvaise réponse il recule son pion de deux cases.

À la fin de la partie, le pion de Nicolas se trouve sur la case 40.

Au cours de la partie, Nicolas a donné sept bonnes réponses, toutes les autres étaient mauvaises.

Combien Nicolas a-t-il donné de mauvaises réponses au cours de la partie ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Selon la perception de la situation, trouver le cardinale d'une partie d'un tout d'un problème de composition d'états ou un élément de transformation d'un problème de composition de transformations

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de déplacement : faire éventuellement quelques essais.
- Déterminer que, s'il n'avait jamais répondu faux, Nicolas aurait avancé, pour ses 7 réponses justes, de 21 cases (3 x 7) et qu'il aurait atteint la case 46 (21 + 25) comprendre qu'il y a 6 cases de trop (46 – 40) qui devront être compensées par 3 réponses fausses: (6 : 2 ou 6 - 2 - 2 - 2).

Ou

- Calculer que Nicolas a avancé de 15 cases en tout (de la case 25 à la case 40 ou 40 - 25), et qu'il pourrait y arriver avec 5 réponses justes; il faut alors se rendre compte qu'il a deux autres réponses justes, ce qui lui donnerait 6 cases d'avance. Pour finir sur le 40, il devrait donc répondre faux trois fois, ce qui le ferait reculer de 6 cases.

Ou

- Procéder pas à pas avec des suites de 7 additions et de quelques soustractions pour parvenir à 40, avec ajustements nécessaires (par exemple 25 + 3 + 3 - 2 + 3 + 3 - 2 + 3 + 3 + 3 = 42, 42 - 2 = 40) et dénombrement des soustractions.

Ou

- Dessiner la piste et effectuer 7 déplacements de 3 en 3 à partir de 5 pour arriver à 26 et retourner à 40 en 3 déplacements de 2 en 2.

Attribution des points

4 Réponse correcte (3 mauvaises réponses) avec explication claire (opérations ou repères sur la suite des nombres ou solution graphique…)

3 Réponse correcte, sans explications ou avec explications partielles ou peu compréhensibles

2 Réponse obtenue à partir d'un raisonnement correct comportant une erreur de calcul ou un oubli

1 Début de recherche cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 18.I.03

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op64-fr&flag=1&langue=fr&enonce=07rmtii_fr-4&w=0

3. LES BALLONS COLORÉS (Cat. 3, 4)

Pour la fête de l'école, les enfants de la classe de Fabienne accrochent une rangée de ballons, les uns à côté des autres, sur le mur du préau.

Les trois premiers ballons sont bleus, les deux suivants sont rouges, puis les trois ballons suivants sont bleus, suivis de deux ballons rouges et ainsi de suite. Les enfants continuent à accrocher les ballons jusqu'au bout du mur. Lorsqu'ils ont terminé, ils constatent que les deux derniers ballons sont rouges. Pour réaliser cette rangée de ballons, les enfants ont utilisé 24 ballons bleus.

Au total, combien de ballons sont accrochés sur le mur du préau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer le nombre total de ballons d'une file, selon une séquence périodique de 3 ballons bleus et de 2 ballons rouges, dont 24 ballons sont bleus.

Analyse de la tâche

- Imaginer la rangée de ballons où se répète une période de 3 ballons bleus et 2 ballons rouges et/ou en dessiner le début.
- Poursuivre le dessin jusqu'à ce qu'on ait 24 ballons bleus et en terminant la rangée par deux ballons rouges ; puis compter le nombre total de ballons : 40. (Le non respect de la consigne « la rangée se termine avec 2 ballons rouges » entraînerait la réponse erronée 38).

Ou, utiliser un raisonnement arithmétique, par exemple :

considérer que 24 ballons bleus correspondent à une répétition de 8 fois les 3 ballons bleus d'une séquence (8 = 24 : 3) et calculer le nombre de ballons rouges (16 = 2 × 8).

- Déduire enfin que le total des ballons est 40 = 24 + 16.

Attribution des points

4 Réponse correcte (40 ballons) avec une explication claire et complète (dessin ou calcul)

3 Réponse correcte (40 ballons) avec une représentation peu claire ou incomplète
ou réponse donnant le nombre de ballons de chaque couleur (24 bleus et 16 rouges) sans calcul du total

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul ou à un schéma correct mais incomplet, (par exemple 38 ballons qui représentent les séquences organisées avec les 8 groupes de 3 bleus mais sans les 2 derniers rouges)
ou réponse donnant le nombre de ballons rouges seulement (16 rouges)

1 Début de recherche appropriée, montrant la compréhension de l'alternance des deux sortes de ballons et de la suite numérique, complète ou non, mais sans proposer de réponse

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 24.I.01 modifié

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=pr36-fr&flag=1&langue=fr&enonce=24rmti_fr-1&w=0

4. LES DÉS (Cat. 3, 4)

Cette photo montre quatre dés.

On voit seulement quelques points noirs de ces dés sur la photo.

Mais on ne peut pas voir toutes les faces, certains points sont donc cachés.

Combien y a-t-il de points noirs qui ne sont pas visibles sur la photo ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver le nombre de points noirs qui ne sont pas visibles sur une photo montrant quatre dés empilés.

Analyse de la tâche

- Observer les quatre dés sur la photo. Pour chacun d'eux identifier les faces visibles et leurs points et imaginer les autres faces non visibles, en déduire par exclusion les points inscrits sur chacune.
- Par exemple, pour le premier dé en bas à droite, puisque les faces visibles montrent 1, 3 et 5 points, déduire que les points sur les trois faces non visibles sont 2, 4 et 6.
- Pour le décompte des points on peut procéder de plusieurs façons :
  - par exemple, calculer pour chaque dé la somme des points des faces non visibles et ensuite additionner les résultats obtenus (11 + 19+ 12 + 10) ;
  - ou trouver la somme des points sur un dé (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21), la multiplier par quatre (84), enlever ensuite la somme des points sur les faces visibles (32).
- Conclure que le nombre total des points non visibles est 52.

Attribution des points

4 Réponse correcte (52) avec des explications claires

3 Réponse correcte, avec des explications incomplètes ou imprécises

2 Réponse correcte sans explication

Ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou dans la détermination des points sur une ou deux faces cachées, avec une explication claire du déroulement de la recherche

1 Réponse erronée due à plusieurs erreurs de calcul

Ou début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 23.II.01

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op59-fr&flag=1&langue=fr&w=0

5. PARTIES DE PING-PONG (CAT. 3, 4, 5)

Anne, Boris, Carole, Denis et Élisabeth se retrouvent pour jouer au ping-pong après l'école.

Ils n'ont pas beaucoup de temps et il n'y a qu'une table, une balle et deux raquettes.

Ils décident que :

- Chacun jouera une seule partie contre chacun des autres enfants,
- Chaque partie durera cinq minutes.

Combien de temps faudra-t-il pour jouer toutes les parties ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Dénombrer les combinaisons de 2 objets pris parmi 5 dans un contexte d'un tournoi de ping-pong.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a cinq enfants qui vont rencontrer tous les autres deux à deux, en parties successives de 5 minutes et qu'il faudra calculer la durée totale.
- Déterminer le nombre de parties pour constater qu'il y en a 10 (en évitant de compter les symétriques) :
  par exemple :
  - en commençant par A : AB, AC, AD, AE, puis en continuant par B : BC, BD, BE, et ainsi de suite : CD, CE et DE, ou par représentation graphiques de liens entre deux des cinq enfants,

    Ou
  - en considérant que chacun des 5 enfants va rencontrer ses 4 camarades et que parmi les 20 (4 x 5) couples ainsi constitués, une moitié est symétrique de l'autre et que par conséquent l'organisation de 10 parties suffit pour permettre toutes les rencontres.
- Calculer la durée des dix parties successives : 10 x 5 = 50 (en minutes).

Ou

- Comprendre que le premier joueur (A) jouera quatre parties, en 20 minutes ; que le joueur B ne pourra plus jouer que contre trois autres adversaires différents, en 15 minutes, que le joueur C ne jouera que contre deux autres adversaires différents, en 10 minutes, et enfin que le joueur D ne jouera que contre le dernier joueur E, en 5 minutes ; puis calculer la durée totale : 20 + 15 + 10 + 5 = 50 (en minutes).

Attribution des points

4 Réponse exacte, (50 minutes), avec les dix combinaisons sans répétitions, sous forme d'inventaire, de dessin, de tableaux ou diagrammes qui font office d'explication

3 Réponses 40 ou 45 minutes dues à un oubli d'une ou de deux combinaisons, avec détail des combinaisons ou réponse 55 ou 60 minutes dues à la répétition d'une ou deux combinaisons, avec détails

2 Réponse 50 minutes sans explication

Ou seulement les dix combinaisons sans le calcul de la durée

Ou réponses 40 ou 45 minutes / 55 ou 60 minutes, sans explications ni précision des combinaisons

Ou réponse 100 minutes (due à la prise en compte des symétriques) avec ou sans explication

1 Début de recherche cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

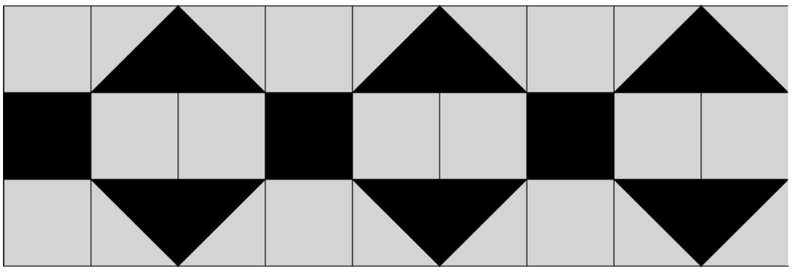
Banque de problèmes de l'ARMT 17.I.03

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd112-fr&flag=1&langue=fr&enonce=17rmti_fr-3&w=0

6. LA FRISE D'ANNIE (Cat. 4, 5, 6)

Sur une feuille de papier quadrillé de son cahier de dessins, Annie a dessiné une frise de deux couleurs, noire et grise.

Voici le début de cette frise :



Annie remarque que dans cette première partie, la zone coloriée en noir correspond à 9 carrés.

Annie continue à dessiner sa frise jusqu'à la fin de sa feuille de papier et quand elle a fini elle remarque que la zone coloriée en noir correspond à 58 carrés.

Sur la frise complète, à combien de carrés correspond la zone coloriée en gris ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer l'aire de la partie grise d'une frise coloriée en noir et gris, dont le début est dessiné sur du papier quadrillé, en connaissant l'aire totale de la partie noire de la frise entière.

Analyse de la tâche

- Observer le dessin du début de la frise et éventuellement chercher à comprendre la règle de construction.
- Remarquer que la zone coloriée en noir est formée de 3 carrés noirs visibles sur la figure, et de 6 triangles noirs formés de deux demis carrés correspondant donc chacun à un carré. Ainsi les 6 triangles « comptent » pour 6 carrés.
- Pour déterminer le nombre total de carrés de la partie grise on peut procéder de plusieurs manières. Reproduire la frise sur une feuille quadrillée et s'arrêter lorsqu'on a compté 58 carrés noirs. Compter ensuite les carrés correspondant à la partie grise et trouver qu'il y en a 116. Cette procédure est longue et demande de l'attention dans le comptage des carrés.

Ou bien,

- se rendre compte qu'il y a un motif qui se répète, constitué d'une bande verticale de trois carrés avec celui du milieu en noir et d'une autre bande verticale de six carrés avec deux triangles noirs, chacun correspondant à un carré. Dans ce motif, la partie noire correspond donc au total à 3 carrés, alors que la partie grise correspond au double, c'est-à-dire à 6 carrés.
- Déterminer le nombre de motifs dans la frise complète, en cherchant le plus grand multiple de 3 inférieur à 58 ou en effectuant la division avec reste de 58 par 3, et obtenir 19. Se rendre compte qu'avec 19 motifs on arrive à 57 carrés noirs et qu'il y a donc à rajouter un autre carré noir. En déduire que la frise complète se termine avec une bande verticale d'un carré noir et 2 carrés gris.
- Calculer enfin le nombre de carrés gris, en considérant qu'il y en a 6 dans chaque motif et 2 dans la bande terminale de la frise, et trouver que ce nombre est 116 ($6 \times 19 + 2$).
- Il y a encore d'autres modalités pour organiser la décomposition de la frise et faire les calculs correspondants (par ex., en partant de la figure de l'énoncé dans laquelle on « compte » 9 carrés noirs, considérer les multiples de 9, arriver à 54 et en déduire que pour avoir les 4 derniers carrés manquants, la frise doit se continuer avec un motif complet de trois carrés noirs et se terminer avec une bande verticale d'un carré noir et deux gris).

Ou bien (procédure qui suppose un raisonnement de proportionnalité),

- observer que dans chaque bande verticale (constituée de 3 carrés), la partie noire correspond toujours à un carré et donc la partie grise toujours au double, c'est-à-dire à 2 carrés. Par conséquent en sachant que dans la frise complète la zone coloriée en noir correspond à 58 carrés, la partie coloriée en gris correspondra à son double, c'est-à-dire à 116 carrés.

Attribution des points

4 Réponse correcte (116 carrés) avec un dessin complet et correctement colorié de la frise
ou une explication claire de la procédure (détermination du motif répété et description de la partie finale de la frise)
ou emploi de la « proportionnalité »,… avec les calculs effectués

3 Réponse correcte avec des explications insuffisantes (dessin incomplet, procédure de calcul peu explicitée, …)

2 Réponse erronée due à une interprétation incorrecte de la fin de la frise
ou bien dessin complet et correctement colorié, mais avec une erreur de comptage
ou bien réponse correcte sans dessin ni explication

1 Réponse erronée due à un mauvais dessin des modules
ou début de recherche avec la détermination correcte de l'aire de la partie en noir d'un module

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 25.II.07

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=fn20-fr&flag=1&langue=fr&enonce=25rmtii_fr-7&w=0

7. JEU D’ANNIVERSAIRE (Cat. 4, 5, 6, 7)

Pour son anniversaire, Corinne invite cinq amies : Amandine, Béatrice, Danielle, Émilie et Francine.

Après le repas, elles décident de former des équipes de deux pour jouer aux cartes. Mais…

- Amandine ne veut être ni avec Francine ni avec Béatrice,
- Béatrice ne veut pas faire équipe avec Émilie,
- Corinne demande de faire équipe avec Francine ou avec Béatrice,
- Danielle n’accepte de faire équipe qu’avec Béatrice ou avec Corinne,
- Francine ne s’entend qu’avec Amandine, avec Corinne et avec Danielle.

Constituez les équipes de deux joueuses respectant les volontés de chacune.

Y a-t-il une seule façon de constituer les équipes ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Former à partir des 6 joueurs des couples de 2 en respectant 5 contraintes.

Analyse de la tâche

- Utiliser les indices et dresser des listes d’équipes possibles au fur et à mesure de la lecture, soit sous forme d’une liste soit sous la forme de listes distinctes selon les amies, soit sous forme de tableau à double entrée.
- 1er indice : les équipes possibles pour Amandine sont A-E ; A-C; A-D
- 2e indice : les équipes possibles pour Béatrice sont B-C ; B-D ; B-F (pas B-A puisque Amandine ne veut pas être avec Béatrice).
- 3e indice : les équipes pour Corinne sont C-F ou C-B. Donc Amandine ne peut être avec Corinne (A-C).
- 4e indice : les équipes pour Danielle sont D-B ou D-C. Donc Amandine ne peut être avec Danielle (A-D). Donc Amandine est avec Émilie, et Corinne ne peut être avec Danielle, Danielle est donc avec Béatrice. Et Corinne est donc avec Francine.
- 5e indice (non indispensable): Francine fait équipe avec Corinne car Amandine est déjà avec Émilie et Danielle n’a pas choisi Francine. Donc Béatrice fait équipe avec Danielle.

Ou : on choisit un couple, on regarde s’il est compatible avec les indices ; si oui on en choisit un autre et l’on continue. Sinon on teste un autre couple, etc…

Ou encore en écrivant toutes les possibilités (combinatoire) et en éliminant celles qui ne sont pas réalisables à partir de l’énoncé

A-B ;	A-C ;	A-D ;	A-E ;	A-F
	B-C ;	B-D ;	B-E ;	B-F
		C-D ;	C-E ;	C-F
			D-E ;	D-F
				E-F

Ou encore par représentations graphiques (flèches, ...)

Attribution des points

4 Réponse correcte (Amandine et Émilie, Béatrice et Danielle, Corinne et Francine) avec explications de la démarche. (tableau, illustration) permettant de conclure qu'il n'y a qu'une seule solution.

3 Réponse correcte, avec explications insuffisantes, ne permettant pas de s'assurer de l'unicité de la solution (juste une vérification par exemple).

2 Réponse correcte sans aucune explication ou du genre : « nous avons fait des essais et nous avons trouvé »

ou deux équipes correctes avec explications de la démarche.

1 Début de démarche correcte avec détermination d'une seule équipe correcte

ou une ou deux équipes, sans explication...

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 4, 5, 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 17.I.10

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd118-fr&flag=1&langue=fr&enonce=17rmti_fr-10&w=0

8. CARTABLE RMT (Cat. 5, 6)

Philippe et Pierre ont acheté le même cartable de la marque RMT. Dans son cartable, Philippe a mis 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres de classe. Pierre a déposé dans son cartable, 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres.

Pierre et Philippe savent que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers mais est aussi égal au poids de 2 livres.

Qui a le cartable le plus lourd ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer le cartable le plus lourd entre celui composé de 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres et celui composé de 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres sachant que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers ou au poids de 2 livres.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le poids du cartable vide n'intervient pas dans la comparaison puisque les deux amis possèdent le même cartable.
- Dresser la liste du matériel de Philippe et Pierre, par exemple sous la forme d'un tableau :

Philippe	Pierre
2 classeurs	1 classeur
6 cahiers	8 cahiers
3 livres	2 livres

- Déduire des informations de l'énoncé (poids d'un classeur = poids de 2 livres = poids de 4 cahiers) que le poids d'un livre est égal au poids de 2 cahiers.
- Rechercher les équivalences, choisir une unité de mesure et exprimer chaque matériel avec cette unité, par exemple en cahiers (la plus petite unité commune). Additionner les cahiers pour chaque ami. Exprimer ce travail par exemple sous la forme d'un tableau :

Philippe		Pierre	
2 classeurs	8 cahiers	1 classeur	4 cahiers
6 cahiers	6 cahiers	8 cahiers	8 cahiers
3 livres	6 cahiers	2 livres	4 cahiers
Total	20 cahiers	Total	16 cahiers

Ou : repérer des équivalences, et ôter ce qui est commun (mise en évidence).

Philippe		Pierre	
~~2 classeurs~~	1 classeur	~~1 classeur~~	0 classeur
~~6 cahiers~~	0 cahier	~~8 cahiers~~	2 cahiers
~~3 livres~~	1 livre	~~2 livres~~	0 livre

- Déduire que le cartable de Philippe est plus lourd que celui de Pierre puisqu'un classeur (soit 4 cahiers) est plus lourd que 2 cahiers.

- Chercher les équivalences et les exprimer dans la plus petite unité, par exemple sous forme de tableau.

Philippe		Pierre	
1 classeur	4 cahiers	0 classeur	
0 cahier		2 cahiers	2 cahiers
1 livre	2 cahiers	0 livre	
Total	6 cahiers	Total	2 cahiers

Ou : attribuer un poids à un des éléments et déterminer le poids des deux autres. Par exemple 200 g pour un classeur ; 50 g pour un cahier ; 100 g pour un livre. Ensuite calculer le poids de chaque cartable :

- pour Philippe : 2 x 200 + 6 x 50 + 3 x 100 = 1000 (en g)
- pour Pierre : 200 + 8 x 50 + 2 x 100 = 800 (en g)

Conclure que le cartable le plus lourd est celui de Philippe.

Attribution des points

4 Solution correcte (Philippe possède le cartable le plus lourd) avec explications complètes de la démarche et justification

3 Solution correcte avec uniquement des équivalences comme justification, sans aller jusqu'au bout du raisonnement (par exemple comme décrit dans le tableau 3 : « Il reste dans le cartable de Philippe 1 classeur et 1 livre et dans le sac de Pierre 2 cahiers, donc le cartable de Philippe est plus lourd. »)

2 Solution correcte : « Philippe possède le cartable le plus lourd », avec démarche ou explications incomplètes

1 Démarche correcte mais comportant une erreur de calcul ou d'équivalence
ou début de raisonnement correct
ou uniquement la phrase : « Philippe possède le cartable le plus lourd », sans explications ni justification

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 16.II.07

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd66-fr&flag=1&langue=fr&enonce=16rmtii_fr-7&w=0

9. MOUSSE AU CHOCOLAT (Cat. 5, 6)

Céline, Jeanne et Sophie utilisent la même recette pour préparer chacune une mousse au chocolat. Pour bien réussir la mousse au chocolat, il ne faut pas se tromper dans les quantités d'œufs et de chocolat.

Céline a utilisé 4 œufs et 200 grammes de chocolat.

Jeanne a utilisé 6 œufs et 250 grammes de chocolat.

Sophie a utilisé 10 œufs et 500 grammes de chocolat.

L'une des trois filles n'a pas utilisé la bonne quantité de chocolat.

Qui n'a pas utilisé la bonne quantité de chocolat ? Expliquez pourquoi.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Parmi les trois couples (4;200), (6;250) et (10;500) trouver celui qui n'est pas proportionnel aux deux autres, dans un contexte de recette de mousse au chocolat.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les proportions doivent être respectées.
- Remarquer que les quantités de Jeanne et de Sophie sont incompatibles (le double de chocolat ne correspond pas au double d'œufs).

  En déduire que c'est Jeanne ou Sophie qui s'est trompée et donc que Céline ne s'est pas trompée.

  Comparer les données de l'une des deux avec celles de Céline, par exemple en remarquant que pour Céline il faut 2 œufs pour 100 grammes de chocolat, ce qui n'est pas compatible avec les données de Sophie. Conclure que c'est Jeanne qui s'est trompée.

Ou, partir directement des données pour Sophie pour en déduire que, selon ces données, pour 2 œufs, il faut 100 g de chocolat ou encore 1 œuf pour 50 g de chocolat et vérifier si les données de Jeanne et Céline sont compatibles.

Ou, calculer directement les quantités de chocolat de chacune pour le même nombre d'œufs (rapport). Par exemple le rapport « masse de chocolat pour un œuf » s'obtient en calculant 200 : 4, puis 250 : 6 et 500 : 10. On trouve alors que Céline et Sophie obtiennent le même résultat : 50 g de chocolat pour un œuf, différent de celui de Jeanne.

Ou, utiliser les propriétés additives et multiplicatives de la proportionnalité. Par exemple, considérer que si, pour 4 œufs il faut 200 g de chocolat, pour 2 œufs il faut 100 g, puis pour 6 œufs (4 + 2), il en faut 300 g (200 + 100). De même, pour 10 œufs (4 + 4 + 2 ou 6 + 4), il en faut 500 g (200 + 200 + 100 ou 300 + 200). Il s'ensuit que Jeanne s'est trompée.

Une procédure attendue des élèves qui n'envisagent que des relations additives est la suivante : à partir des deux premières données, considérer que si on ajoute 2 œufs, il faut ajouter 50 g de chocolat ; en déduire que pour 8 œufs, il faut 300 g de chocolat et pour 10 œufs 350 g ; et conclure, de façon cohérente (mais évidemment erronée pour celui qui maîtrise les concepts de rapport ou de proportionnalité), que c'est Sophie qui s'est trompée.

Attribution des points

4 Réponse exacte (Jeanne s'est trompée) avec une explication complète

3 Réponse exacte (Jeanne s'est trompée) avec une explication peu claire

2 Réponse exacte sans explication
ou réponse fausse suite à une erreur de calcul, mais le raisonnement est entièrement correct

1 Réponse fausse ou absente, mais la proportionnalité est prise en compte dans une partie des calculs

0 Incompréhension du problème
ou réponse fausse (Sophie s'est trompée) à la suite d'un raisonnement seulement additif

Niveaux : 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 20.I.10

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=pr18-fr&flag=1&langue=fr&w=0

10. CLOUS ET FILS ÉLASTIQUES (CAT. 5, 6, 7)

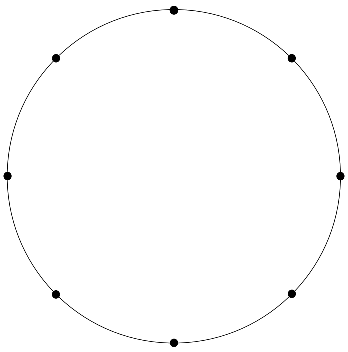


figure 1

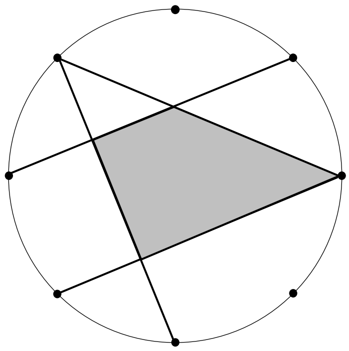


figure 2

Sur le bord d'un disque on a planté 8 clous très régulièrement. Entre deux clous qui se suivent, il y a toujours la même distance (voir figure 1).

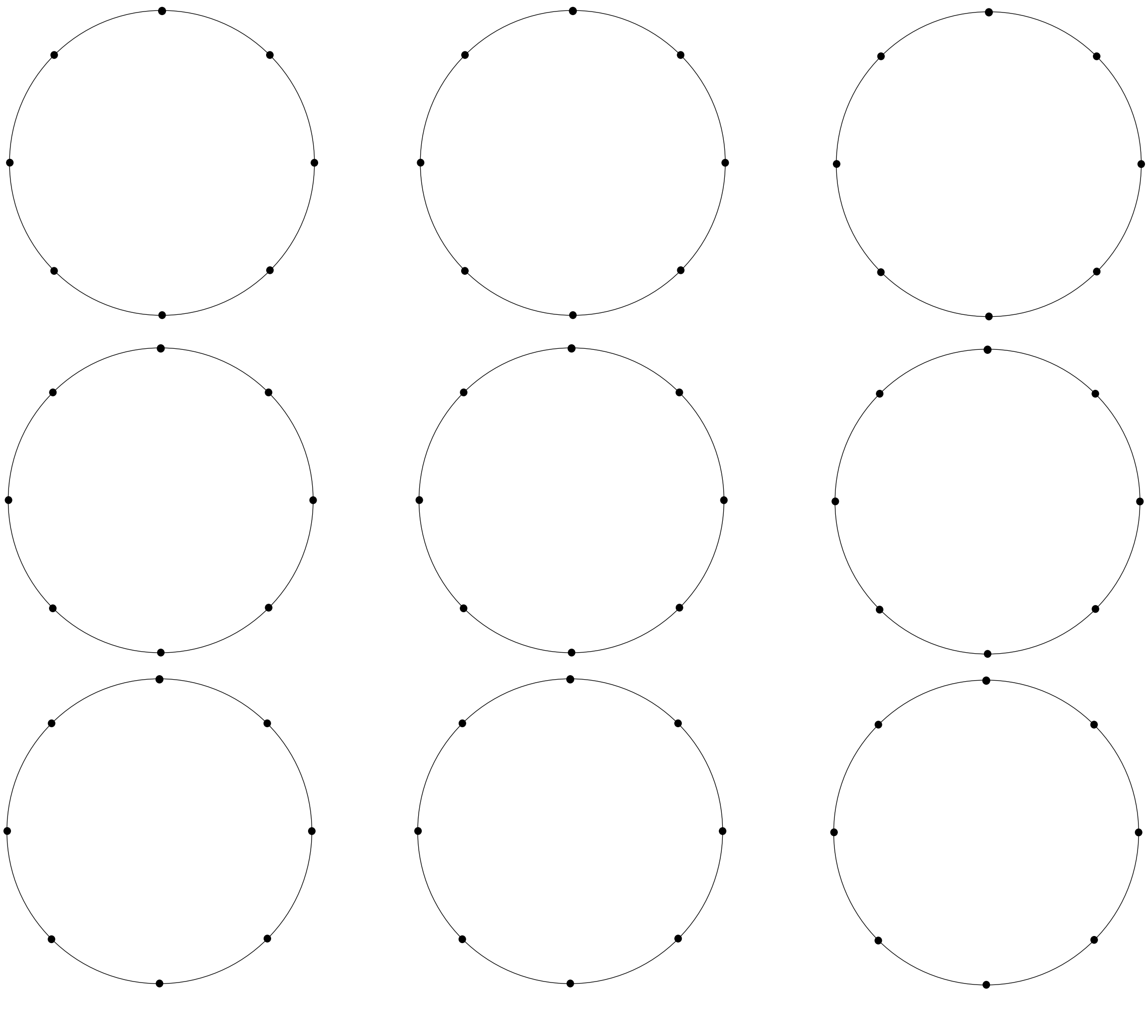
On dispose de quatre fils élastiques qu'on peut tendre entre deux clous.

Le but est de former des rectangles (ou des carrés) ayant leurs côtés sur les quatre fils.

Jules a tendu les quatre fils (voir figure 2), mais il n'a pas atteint son but : il a obtenu un trapèze !

Trouvez tous les rectangles ou carrés différents que les quatre fils peuvent former.

Dessinez toutes les figures que vous avez trouvées. Si vous avez deux figures de mêmes dimensions, n'en dessinez qu'une seule !
(Utilisez les cercles ci-dessous pour dessiner vos rectangles ou carrés différents.)



ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Construire des rectangles dont les côtés sont portés par des droites qui passent par des points d'un cercle parmi 8 répartis régulièrement.

Analyse de la tâche

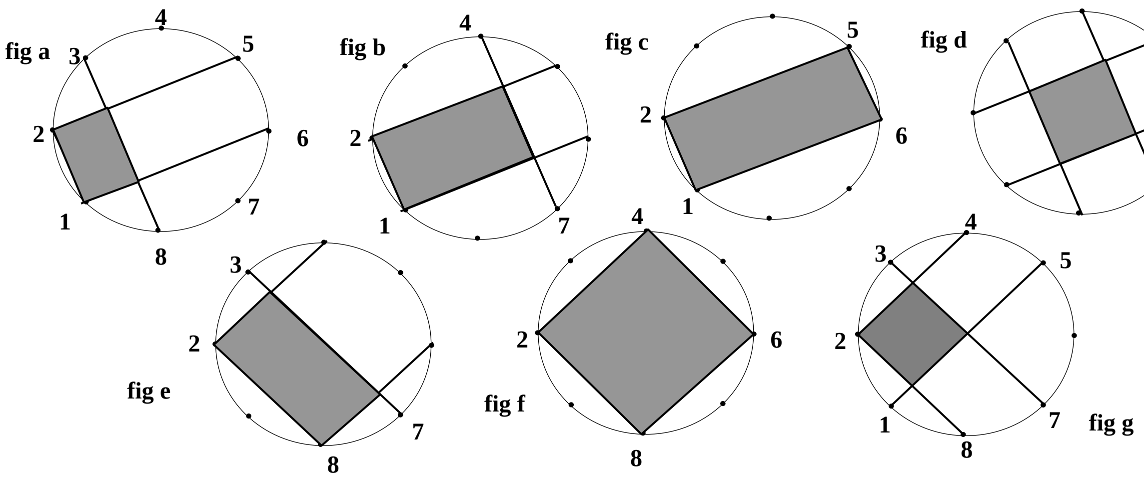
- Percevoir les positions des clous sur le cercle et imaginer les isométries qui déterminent les positions relatives des clous et des fils qui les relient. Par exemple un fil tendu entre deux clous voisins se retrouve sur un fil tendu sur les deux clous opposés après une rotation d'un demi-tour, ce qui permet de savoir que ces fils sont parallèles, des rotations d'un quart de tour font apparaître des côtés perpendiculaires, …
- Comprendre que pour construire les rectangles possibles, il est nécessaire de faire intervenir le parallélisme et l'isométrie des côtés opposés et la perpendicularité des côtés adjacents.
- Procéder par essais non organisés, avec le risque de ne pas trouver toutes les solutions.

Ou chercher une méthode systématique. Par exemple, un inventaire des clous supportant des fils parallèles :

- pour deux clous voisins de la figure a (1 et 2), il y a trois autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 8), (4 et 7), (5 et 6), ce qui permet de déterminer les quatre rectangles des figures a, b, c et d, dont la longueur d'un côté est la distance de 1 à 2.
- pour deux clous séparés par un autre, (8 et 2) de la figure e, il y a deux autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 7), (4 et 6), ce qui permet de déterminer les deux rectangles des figures e et f, dont la longueur d'un côté est la distance de 2 à 8. Avec une paire de côtés de cette direction, la combinaison avec les paires de perpendiculaires fait apparaître encore un autre rectangle (carré de la figure g) dont le côté vaut la moitié de la distance de 2 à 8.

Contrôler que les rectangles ainsi formés n'ont pas les mêmes dimensions. En particulier les carrés des figures d et g (car la distance de 1 à 2 est supérieure à la moitié de la distance de 8 à 2.)

Dessiner les sept solutions (dont trois sont des carrés).



Attribution des points

4 Les sept solutions correctes sans autre solution isométrique

3 Six solutions correctes sans autre solution isométrique

ou les sept solutions correctes avec une solution isométrique à l'une des précédentes

2 Quatre ou cinq solutions correctes sans autre solution isométrique

ou cinq ou six solutions correctes plus une solution isométrique à l'une des précédentes

ou les sept solutions correctes plus un quadrilatère qui n'est pas un rectangle

1 De une à trois solutions avec ou sans solutions isométriques

ou quelques solutions correctes et un quadrilatère qui n'est pas un rectangle.

0 Quadrilatères non rectangles ou incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 19.I.10

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp56-fr&flag=1&langue=fr&enonce=19rmti_fr-10&w=0

11. LA MAQUETTE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Dans la classe de Fabio, les élèves ont fait une maquette d'un petit village. Les maisons étaient construites avec des cubes de bois, tous les mêmes, qui ont été collés sur une base divisée en carrés. Pour obtenir des maisons à plusieurs étages, ils ont collé des cubes les uns sur les autres.

La maquette est maintenant sur le bureau. La figure A montre le dessin de la maquette vue du dessus. La figure B, au contraire, montre le dessin de la maquette comme la voit Fabio qui est assis sur son banc.

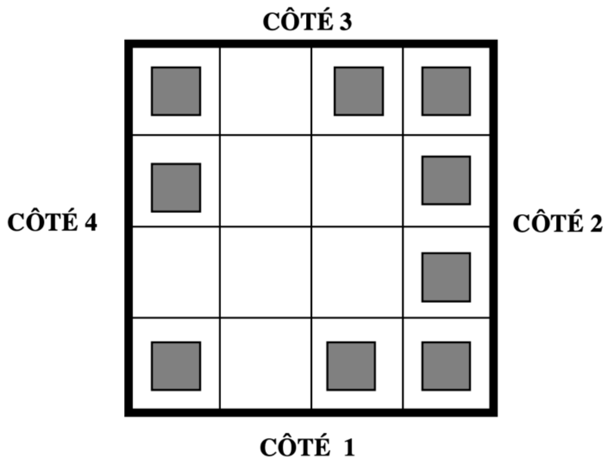


Fig. A. la maquette vue du dessus

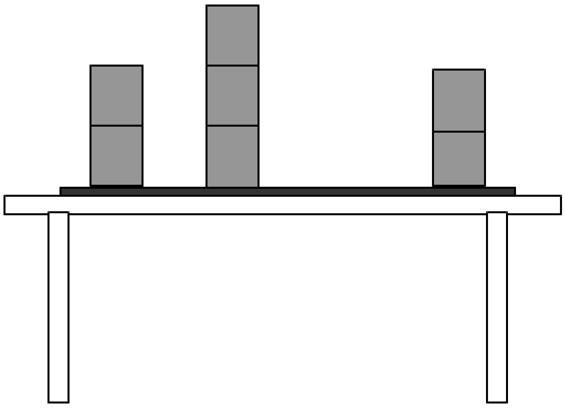


Fig B. la maquette vue par Fabio

Quel côté de la maquette est en face de Fabio ?

Quel est le nombre maximum de cubes qui ont été utilisés pour construire les maisons de la maquette ?

Donnez vos réponses et expliquez le raisonnement que vous avez fait.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Une construction avec des cubes est donnée par une vue « de dessus » et une de profil. Déterminer le point de vue et donner le nombre maximum de cubes qui ont été utilisés.

Analyse de la tâche

- Pour comprendre quel côté de la maquette est devant Fabio, il faut considérer la figure A et observer la maquette par la pensée en la regardant par chacun de ses côtés. On doit alors comparer ce que l'on imagine avec ce qui est montré dans la figure B. L'opération est plus facile si on tourne la feuille pour regarder la figure A successivement par chacun de ses côtés.
- En déduire que Fabio ne peut pas voir le CÔTÉ 1 de la maquette, sinon d'après la figure B, la maison isolée devrait être à droite et non à gauche. Il ne peut pas voir la maquette par le CÔTÉ 4 ni par le CÔTÉ 2, sinon il verrait aussi une maison dans l'espace vide de la figure B. Conclure que Fabio ne peut voir la maquette telle qu'elle apparaît dans la figure B que par le CÔTÉ 3.
- Pour estimer le nombre maximum de cubes utilisés dans la construction des maisons, il faut partir de la figure B. - Remarquer qu'à gauche on voit deux cubes, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante sur la figure A, vue du côté 3 (il y a 4 maisons, car toutes les cases sur cette colonne dans la figure A sont occupées).
    - En se déplaçant vers la droite dans la figure B, on peut voir ensuite 3 cubes, donc 3 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 2 maisons, car 2 cases sont occupées dans cette colonne de la fig. A).

- Enfin on peut encore voir deux cubes à droite, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 3 maisons, car trois cases sont occupées dans cette colonne de la figure A).

- En déduire que le nombre maximum de cubes est alors (2 x 4) + (3 x 2) + (2 x 3) = 20.

Attribution des points

4 Réponses correctes (CÔTÉ 3, nombre maximum de cubes : 20) avec l'explication du raisonnement

3 Réponses correctes avec explication peu claire

ou indication correcte du nombre maximal de cubes avec l'explication de la procédure

2 Réponses correctes sans explications

1 Seule la détermination du point de vue (CÔTÉ 3) est correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 19.II.11

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=3d3-fr&flag=1&langue=fr&w=0

12. SUR LE MUR DE L'ÉCOLE (Cat. 6, 7, 8)

Pour décorer un mur de l'école, quelques élèves ont préparé un modèle, formé de 10 quadrilatères sur papier quadrillé, comme sur la figure ci-dessous.

Luc dit :

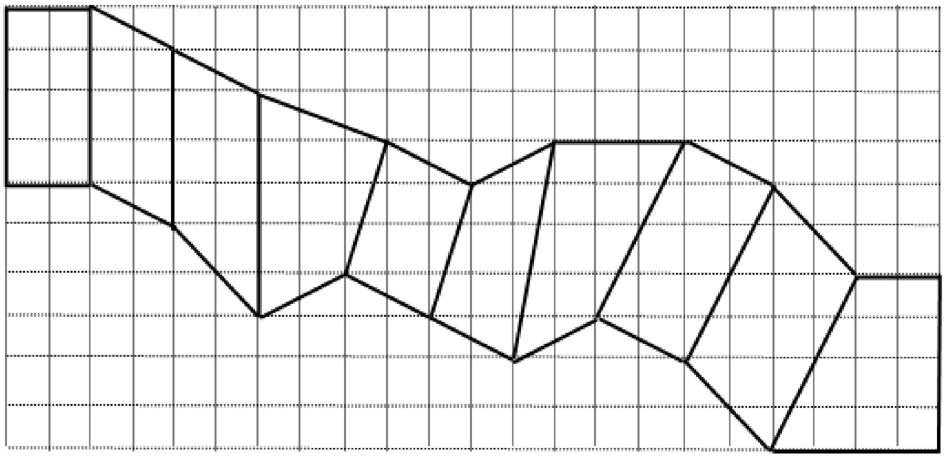
> « Pour le colorier, nous pourrions employer de la peinture rouge pour les rectangles, de la peinture verte pour les parallélogrammes qui ne sont pas rectangles et de la peinture jaune pour tous les autres quadrilatères. »

Les élèves d'une classe se répartissent les quadrilatères à colorier et Louis remarque :

> « J'ai à peindre le plus grand quadrilatère de tous ! »

Lucie rétorque :

> « Le mien est de la même grandeur que le tien ».



Coloriez le modèle comme Luc l'a proposé.

Quels sont les quadrilatères que Louis et Lucie ont à peindre ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine conceptuel

Géométrie : distinction entre rectangle, parallélogramme non rectangle, trapèze et quadrilatère par leurs propriétés caractéristiques. Comparaison d'aires.

Tâche mathématique

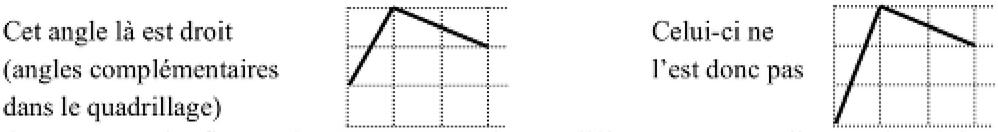
Identifier les rectangles, parallélogrammes non rectangles et autres parmi une chaîne de dix quadrilatères dont les sommets sont sur les nœuds d'un quadrillage et ayant des côtés communs puis déterminer les aires des deux plus grands.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

La tâche sur la reconnaissance des formes consiste à chaque fois, à vérifier la présence de côtés parallèles ou perpendiculaires.

Elle est simple pour le parallélisme, qu'on peut évaluer visuellement puis confirmer par un examen des côtés qui sont soit des segments du quadrillage ou des diagonales de rectangles du quadrillage, soit de 1 × 2, soit de 2 × 2 ou soit de 1 × 3.

Pour la perpendicularité la question ne se pose que pour les côtés adjacents qui sont des diagonales de rectangles. Dans la cinquième figure (numérotée de gauche à droite), il s'agit de rectangles différents, 1 × 2 et 1 × 3 dont les diagonales sont aussi différentes qui ne peuvent dont pas former un carré aux angles droits.



Dans la huitième figure, il s'agit de rectangles de 1 × 2 avec une rotation d'un quart de tour ou 90 degrés permettant de passer de l'un à l'autre, dont les diagonales sont donc perpendiculaires, comme les côtés correspondants. Dans la neuvième figure, il s'agit de rectangles différents 2 × 2 et 1 × 3 dont les diagonales ne peuvent être perpendiculaires.

Cette reconnaissance de perpendiculaires mobilise donc des savoirs sur les rotations de segments repérés dans le quadrillage.

La tâche du calcul des aires sur quadrillage est simple pour les figures décomposables en rectangles et demi-rectangles dont il suffit d'additionner les aires (exemple figure 4). D'autres ne permettent pas cette décomposition mais s'inscrivent dans un rectangle dont la partie extérieure à la figure se décompose en rectangles ou demi-rectangles; l'aire de la figure se calcule alors par soustractions successives à partir de celle du rectangle circonscrit (exemple figure 7).

Conclure que les figure 1 et 8 seront peintes en rouge car ce sont des rectangles, les trois parallélogrammes non rectangles 2, 5 et 9 en vert, les figures 3, 4, 6, 7 et 10 en jaune. Louis et Lucie peindront les quadrilatères 9 et 10, dont les aires mesurent 12 (en carrés du quadrillage)

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (1 et 8 en rouge, 2, 5 et 9 en vert, 3, 4, 6, 7 et 10 en jaune, 9 et 10 à peindre par Louis et Lucie) avec des explications claires pour les couleurs à partir des propriétés du rectangle et du parallélogramme, et une comparaison correcte des aires de 9 et 10

3 Réponse correcte avec explications complètes pour les couleurs et l'aire de 12 carreaux pour l'une des deux figures : le trapèze 10 ou le quadrilatère 9 (Louis ou Lucie)

ou réponse correcte pour les couleurs avec des explications incomplètes notamment pour les quadrilatères 6, 7 et 9 et avec réponse correcte pour les aires de Louis et Lucie

2 Réponse correcte pour les couleurs avec des explications claires

ou réponse correcte pour les couleurs avec des explications incomplètes notamment pour les quadrilatères 6, 7 et 9 et l'aire de 12 carreaux pour l'une des deux figures

ou erreur dans les couleurs rouge ou vert mais avec réponse correcte pour les aires de Louis et Lucie

1 Deux ou trois erreurs dans les couleurs avec au moins une réponse pour Louis ou Lucie

0 Incompréhension du problème

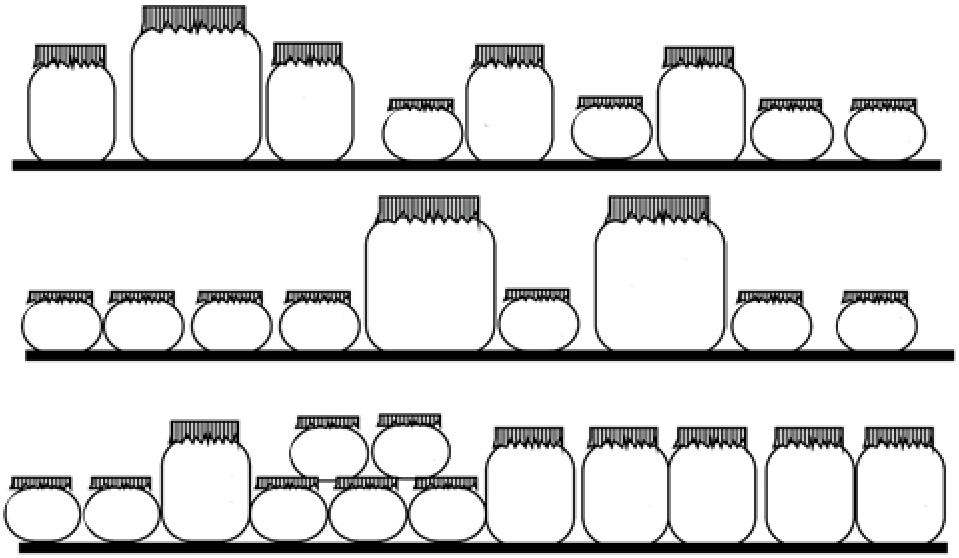
Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 18.II.13

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp29-fr&flag=1&langue=fr&enonce=18rmtii_fr-13&w=0

13. LES POTS DE CONFITURE (Cat. 7, 8, 9)

Maria a fait des confitures et a rempli des pots, petits, moyens et grands. Elle les a placés sur trois rayons :



Il y a exactement 5 kg de confiture sur chaque rayon.

Quels sont les poids des confitures dans un grand pot, un moyen et un petit ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver trois nombres inconnus combinés en trois relations linéaires dont les valeurs sont données

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'avec la disposition donnée des pots sur les trois rayons, des substitutions peuvent être opérées pour faciliter les comparaisons.
- Retirer 7 petits pots de chacun des deux rayons inférieurs pour arriver à constater que 2 grands pots contiennent autant de confiture que 6 moyens, d'où 1 grand pot autant que 3 moyens.
- Par comparaison entre les deux rayons du haut et en remplaçant trois pots moyens par un grand dans le rayon supérieur, trouver qu'un pot moyen contient autant de confiture que 3 petits.
- Exprimer le contenu de chaque rayon avec 25 petits pots et en déduire qu'un petit pot contient 0,2 kg de confiture.
- En déduite qu'un pot moyen contient 3 x 0,2 = 0,6 kg de confiture et qu'un grand pot contient 3 x 0,6 = 1,8 kg de confiture.

Ou bien par une procédure algébrique (résolution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues) :

- Écrire les équations algébriques représentées par la figure donnée :
- $G + 4M + 4P = 5$; $2G + 7P = 5$; $6M + 7P = 5$.
- Résoudre ce système : les deux dernières donnent $2G = 6M$ d'où $M + 4P = 7P$ avec les deux premières donc $25P = 5$.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : 0,2 kg ; 0,6 kg ; 1,8 kg avec explications cohérentes

3 Réponse correcte et complète sans explications ou résolution partielle arrivant à l'une des équivalences :
1 moyen = 3 petits ou 1 grand = 3 moyens, avec explications.

2 Réponse avec une seule erreur de calcul et explications.

1 Début de recherche cohérente.

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 7, 8, 9

Banque de problèmes de l'ARMT 06.II.11 « légèrement adapté »

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd30-fr&flag=1&langue=fr&enonce=06rmtii_fr-11&w=0

14. LE CHIEN ET LE RENARD (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le chien Toby poursuit Red le renard dans les bois. Il parcourt 85 mètres en 5 secondes tandis que Red parcourt 104 mètres en 8 secondes.

Quand la poursuite a commencé, la distance entre les deux était de 320 mètres.

Combien de temps faudra-t-il à Toby pour rattraper Red ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Calcul de la distance à parcourir pour un mobile poursuivant un autre mobile parti devant, les vitesses respectives étant données.

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui ne maîtrisent pas le concept de vitesse, la procédure doit suivre l'écoulement du temps, seconde par seconde, après avoir transformé les données « 85 mètres en 5 secondes » et « 104 mètres en 8 secondes », respectivement en 17 et 13 mètres en une seconde, (ou de 40 secondes en 40 secondes, 40 étant le ppmc de 8 et 5). On peut alors élaborer une progression comparée des animaux et de leur écart. Par exemple dans un tableau :

temps (en secondes)	0	1	2	…	10	20	…	40	…	80
distance parcourue par le chien	0	17	34	…	170	340	…	680	…	1360
distance parcourue par le renard	0	13	26	…	130	260	…	520	…	1040
distance rattrapée par le chien	0	4	8	…	40	80	…	160	…	320

- Ou, se rendre compte, après avoir transformé les vitesses en m/s, que le chien rattrape 4 mètres par seconde et qu'il lui faudra 80 secondes (320 : 4) pour rattraper le renard, c'est-à-dire 1 minute et 20 secondes.
- Ou, algébriquement, les distances en mètres parcourues en x secondes par le chien ($17\,x$) et le renard ($13\,x$) conduisent à l'équation $320 = 17\,x - 13\,x$ et à sa solution $x = 80$ (en secondes) soit 1 minute et 20 secondes (les trois distances peuvent être représentés graphiquement).
- Solution plus experte : la relation entre vitesse, distance et temps sous la forme d = v t, permet de transcrire directement la différence des distances parcourues par le chien et le renard par l'équation :

  $(85/5)\,t - (104/8)\,t = 320)$

Attribution des points

4 Réponse correcte (80 s ou 1 min 20 s) avec des explications détaillées.

3 Réponse correcte avec des explications peu claires.

2 Réponse correcte sans explication.

1 Début de raisonnement correct (comparaison des deux vitesses soit par calcul soit par le début d'un tableau).

0 Incompréhension du problème.

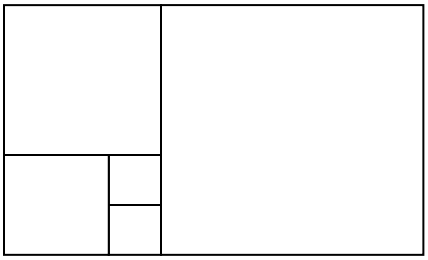
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 20.F.13

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=ud335-fr&flag=1&langue=fr&w=0

15. LES CARRÉS D'ALEX ET FRANÇOIS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un grand rectangle formé de 5 carrés.



Alex affirme que s'il connaît le périmètre du rectangle, il peut calculer son aire et il donne un exemple avec un périmètre de 130 cm.

François prétend qu'il peut calculer le périmètre du rectangle à partir de son aire et il donne un exemple avec une aire de 1 440 cm^2.

Quelle est l'aire calculée par Alex et quel est le périmètre obtenu par François ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Tâche mathématique

Calculer l'aire d'un rectangle formé de cinq carrés (de côtés dans les rapports 1, 1, 2, 3, 5) connaissant son périmètre (130 cm), puis calculer le périmètre d'un rectangle semblable connaissant son aire (1 440 cm^2).

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre $2 \times (5 + 8) = 26$ (en unités) et qu'il contient $2 + 4 + 9 + 25 = 40$ carrés unité.
- Puisque le périmètre d'Alex vaut 130 cm, il a pris 130/26 = 5 (en cm) pour côté d'un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm^2) et dans l'exemple d'Alex, le rectangle a une aire de $25 \times 40 = 1\,000$ (en cm^2).
- Puisque l'aire de François vaut 1 440 (en cm^2), il a pris dans son exemple 1 440/40 = 36(en cm^2) pour aire d'un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu'il doit donner est donc $26 \times 6 = 156$ cm.

Attribution des points

4 Les deux réponses (1 000 cm^2 et 156 cm) justifiées
3 Les deux réponses correctes sans explications ou explications confuses
2 Une réponse correcte et l'autre manquante ou erronée à cause d'une erreur de calcul
1 Début de raisonnement cohérent
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 17.II.16

[BP- ARMT bel affichage d'une fiche (projet-ermitage.org)]

16. JEU D'ENCASTREMENT (Cat. 8, 9, 10)

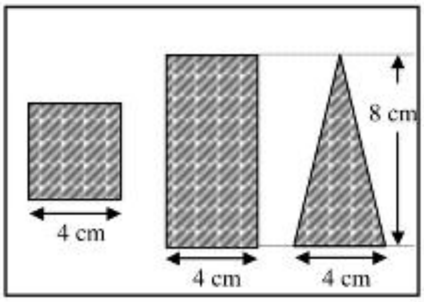
Dimitri a reçu un jeu d'encastrement constitué de quelques pièces de bois : cubes, parallélépipèdes rectangles, pyramides, prismes qu'il faut entrer dans une grande boîte en bois par un des trous percés dans son couvercle.

On considère que chaque pièce bouche exactement le trou par lequel elle entre dans la boîte, sans laisser d'espace entre elle et les parois du trou.

Il y a des pièces qui ne peuvent entrer que par l'un des trous, il y en a qui peuvent entrer par deux des trous et il y en a une qui peut entrer par les trois trous.

Cette figure montre le couvercle, avec les trois trous :

- un carré de 4 cm de côté,
- un rectangle de 4 cm sur 8 cm,
- un triangle isocèle de 4 cm de base et 8 cm de hauteur.



Quelle est la forme de la pièce qui peut entrer par chacun des trois trous, en admettant qu'elle le bouche exactement lorsqu'elle y passe ?

Dessinez un patron précis de cette pièce.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Géométrie : polyèdres et développements, carré rectangle et triangle

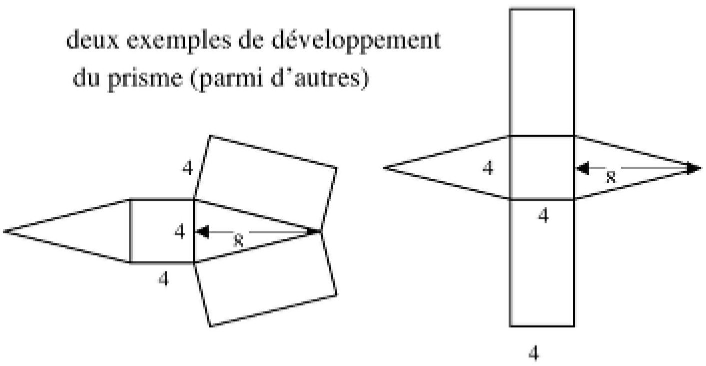
Tâche mathématique

Déterminer un solide dont on connaît les dimensions des trois vues planes : un carré, un rectangle, un triangle isocèle

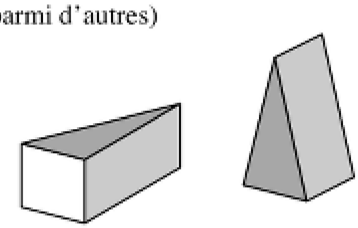
Analyse de la tâche

- Concevoir un polyèdre passant exactement par chacun des trous et penser par exemple au cube de 4 cm d'arête, à un parallélépipède dont une face est le rectangle donné et à un prisme droit dont la base est le triangle donné
- Imaginer ensuite un polyèdre passant par deux des trous, par exemple un prisme droit de base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le rectangle, une pyramide régulière à base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le triangle, ...
- Adapter mentalement un polyèdre passant par deux trous pour qu'il passe par le troisième. Par exemple, le prisme droit précédent peut être taillé sur deux faces rectangulaires opposées pour que les deux autres faces rectangulaires deviennent des triangles afin d'obtenir un prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm ; ou la pyramide précédente peut être complétée sur deux faces opposées pour devenir le prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm.
- Dessiner le développement, et construire éventuellement le polyèdre, dont une face est un carré de 4 cm, deux faces sont des triangles isocèles de 8 cm de hauteur et les deux autres faces des rectangles de 4 cm et dont la largeur correspond à l'un des côtés isométriques du triangle ($\sqrt{68} \cong 8,2$ cm dont l'indication n'est pas nécessaire)

deux exemples de développement du prisme (parmi d'autres)



deux vues (photos) du prisme (parmi d'autres)



Attribution des points

4 Dessin correct du patron montrant l'isométrie des longueurs des rectangles et des côtés du triangle isocèle (on n'exige pas la vraie grandeur, un dessin à l'échelle convient aussi)

3 Le polyèdre est reconnu mais le patron n'est pas correct (par exemple : les côtés des rectangles et les côtés du triangle ne sont pas isométriques)

ou le polyèdre est reconnu mais il est dessiné par une vue (photo) reconnaissable ou désigné par son nom précis et complet : prisme droit dont la base est le triangle isocèle et de hauteur 4 cm

2 Le polyèdre est reconnu mais avec un patron incomplet (faces manquantes ou se superposant) ou dessiné par une vue (photo)

ou dessin correct d'un développement de polyèdre qui ne bouche que deux trous (parallélépipède- ou prisme droit - de 4 x 4 x 8, ou pyramide régulière de base carrée et de 8 cm de hauteur, etc.)

1 Dessin correct du développement d'un polyèdre qui ne bouche qu'un seul trou

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 17.7.17 « légèrement adapté »

[BP- ARMT bel affichage d'une fiche (projet-ermitage.org)]

17. L'ARTISAN (Cat. 8, 9, 10)

Un artisan fabrique des objets en céramique dans son atelier. Aujourd'hui, il a préparé 13 vases qu'il désire vendre chacun à 24 €. Malheureusement, certains d'entre eux se sont fendus au cours de la cuisson. L'artisan décide alors de vendre ceux qui restent en augmentant le prix de chaque vase d'autant de fois 3 € qu'il y a de vases fendus.

En procédant ainsi, la vente des vases qui restent lui procurera le même montant qu'il aurait obtenu en vendant les 13 vases prévus à 24 €.

Combien y a-t-il de vases fendus ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine conceptuel

- Arithmétique : multiplication et division
- Algèbre : règle d'Arithmétique : multiplication et division
- Algèbre : règle d'annulation d'un produit ; équation du second degré ; système

Tâche mathématique

Trouver un nombre tel que le produit de la différence entre 13 et ce nombre par la somme de 24 et du triple de ce nombre soit égal au produit de 13 et de 24, dans un contexte de compensation d'un manque à gagner.

Analyse de la tâche

- Comprendre que 312 € (= 13 × 24 €) est ce que l'artisan aurait gagné avec la vente de tous ses vases. C'est donc la somme qu'il veut tirer de la vente des vases qui restent non fendus.
- Se rendre compte que le nombre de vases non fendus est un diviseur de 312 inférieur à 13 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.
- Effectuer la division de 312 par chacun d'eux et considérer les cas dans lesquels les quotients sont des multiples de 24 augmentés d'un multiple de 3. C'est le cas des divisions par 1, 4 et 8. Écarter 1 parce que 312 : 1 = 312 et 312 – 24 = 288 = 3 × 96, mais 96 ne, peut pas être le nombre des vases fendus.

Écarter de même 4 parce que 312 : 4 = 78 et 78 – 24 = 54 = 3 × 18, mais ce cas n'est pas non plus acceptable car 18 > 13. Trouver enfin que 312 : 8 = 39 et que 39 – 24 = 15 = 3 × 5, 8 est donc le nombre des vases restés en bon état.

- En déduire que le nombre de vases fendus est 5 (13 – 8).

Ou : construire un tableau comme le suivant :

Vases fendus	Vases en bon état	Produit de la vente
1	12	12 (24 + 3) = 324
2	11	11 (24 + 3 × 2) = 330
3	10	10 (24 + 3 × 3) = 330
4	9	9 (24 + 3 × 4) = 324
5	8	8 (24 + 3 × 5) = **312**
6	7	7 (24 + 3 × 6) = 294
7	6	6 (24 + 3 × 7) = 270

- Observer que le produit de la vente diminue quand le nombre de vases fendus augmente et arrêter la construction du tableau. Conclure que le produit de la vente de 312 € est obtenu avec 5 vases fendus.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et écrire l'équation $(13 – x)(24 + 3x) = 312$. Cette équation du second degré s'écrit : $3x^2 – 15x = 0$, d'où $3x(x – 5) = 0$ qui, par la règle d'annulation d'un produit, donne $x = 0$ ou $x = 5$. Éliminant la solution $x = 0$, conclure que le nombre de vases fendus est 5.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et y celui des vases en bon état. Obtenir le système des deux équations : $x + y = 13$ et $y(24 + 3x) = 13 \times 24$. Par substitution, en déduire l'équation à deux inconnues : $y(24 + 3x) = (x + y) \times 24$, d'où $3xy = 24x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $y = 8$ et comme $x + y = 13$, on a $x = 5$.

Attribution des points

4 Solution correcte (5) avec explication claire montrant l'unicité de la solution

3 Solution correcte avec explication sans référence à l'unicité de la solution

2 Solution erronée à cause d'une erreur de calcul, mais procédure correcte

1 Début de raisonnement correct (par exemple écriture de l'équation ou explication que le nombre des vases restés en bon état doit être un diviseur de 312)

ou réponse (5) sans aucune explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 17.II.18

BP- ARMT bel affichage d'une fiche (projet-ermitage.org)

18. LE MARATHON DE TRANSALPIE (Cat. 9, 10)

Michel et Philippe sont au départ du célèbre Marathon de Transalpie qui, cette année encore, se déroule à Transalpinia. Ils arborent fièrement leurs numéros de dossard.

- le numéro de Michel est un nombre de quatre chiffres, tous différents,
- le numéro de Philippe est aussi un nombre de quatre chiffres, les mêmes que ceux du numéro de Michel,
- la somme des nombres sur les dossards de Michel et de Philippe est 10 000.

Quels peuvent être les numéros des dossards de Michel et de Philippe ?

Donnez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : chiffre, nombre, notation positionnelle, décomposition d'un nombre en sommes de deux termes, algorithme de l'addition
- Logique : hypothèses et déductions à partir de l'analyse des cas possibles

Tâche mathématique

Trouver deux nombres formés des mêmes quatre chiffres, tous différents, tels que leur somme soit égale à 10 000

Analyse de la tâche

- Comprendre que la détermination des nombres de Michel et Philippe, qui ne se distinguent que par l'ordre de leurs quatre chiffres, nécessite de passer par l'addition des deux dont la somme est 10 000.
- Procéder systématiquement à partir de la colonne des unités et se rendre compte que les deux chiffres des unités ont pour somme, soit 10, soit 0 (0 + 0)
- Constater par quelques essais que les couples des chiffres des unités dont la somme est 10 : 1-9, 2-8, 3-7, 4-6, 5-5 entraînent un report de 1 sur les colonnes suivantes et que les chiffres des dizaines, centaines, milliers devraient être des couples dont la somme vaut 9. Mais ceci ne permet pas de trouver deux nombres avec les quatre mêmes chiffres dont la somme est 10 000.

Quelques exemples sont présentés ci-dessous : les deux premiers proposent le couple 6-4 pour les unités, qui exigent nécessairement dans deux autres colonnes les couples 4-5 et 3-6. On constate ainsi qu'on ne peut pas continuer sans enfreindre les consignes. Dans le troisième exemple, on part du couple 5-5 : il faut alors dans les colonnes des dizaines et des centaines le même couple de chiffre en ordre inversé dont la somme est 9 (ici 8 et 1, qui pourraient être remplacés par 7 et 2 ou 6 et 3). À ce point la seule possibilité pour la colonne des milliers est d'utiliser le couple 0-0, ce qui ne convient pas car les nombres sont de quatre chiffres, de somme 10 000.

/	3	**4**		**6**	+
/	**6**	5		**4**	=
1	0	0	0	0	

/		3	**4**	**6**	+
/		**6**	5	**4**	=
1	0	0	0	0	

/	0	1	8	**5**	+
/	0	8	1	**5**	=
	1	0	0	0	

- Se rendre compte que, dans le cas où les deux chiffres des unités sont « 0 », la seule manière de procéder, ainsi que nous l'avons observé ci-dessus, est de placer les « 5 » dans la colonne des dizaines et d'utiliser pour les colonnes des centaines et des milliers un même couple de chiffres dont la somme est 9, en ordre inversé : 8-1, 7-2, 6-3 (les seuls qui ne contiennent ni le « 0 » ni le «5 »).
- Dresser finalement l'inventaire des possibilités : **1850 - 8150** ; **2750 - 7250**, **3650 - 6350**.

Attribution des points

4 Solution complète (les trois couples de nombres : 1850 - 8150 ; 2750 – 7250 ; 3650 - 6350) avec explication claire

3 Solution complète avec explication peu claire ou incomplète

2 Un ou deux des couples corrects trouvés avec explication claire
ou les trois couples sans aucune explication

1 Une des solutions au moins, mais avec d’autres couples qui ne respectent pas une des conditions

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Banque de problèmes de l’ARMT 18.I.17

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/result-fiche2.php?fiche=ud202-fr&flag=1&lang-req=fr&enonce=18rmti_fr-17

19. ALADIN ET LE TRÉSOR D'ALI BABA (Cat. 9, 10)

Aladin est sur les traces du trésor d'Ali Baba.
À un certain moment, il se trouve devant une bifurcation d'où partent deux sentiers dont l'un conduit à la grotte au trésor et l'autre dans le désert.

Chacun des deux sentiers est surveillé par un gardien dont on sait que l'un dit toujours la vérité et l'autre ment toujours et que chacun ne répond que par oui ou par non aux questions qu'on lui pose

Aladin s'engage dans un des sentiers et demande à son gardien :

« Si je demandais à votre ami qui surveille l'autre sentier si c'est son sentier qui conduit au trésor, que me répondrait-il ? »

Le gardien lui répond.

Aladin réfléchit un moment puis il s'engage dans le sentier dont il est absolument sûr qu'il conduit au trésor.

Selon la réponse du gardien, Aladin doit il poursuivre son chemin dans le sentier où il s'est déjà engagé ou doit-il revenir à la bifurcation et s'engager dans l'autre sentier ?

Expliquez le raisonnement d'Aladin de manière détaillée.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Logique, raisonnement hypothético-déductif

Tâche Mathématique

Pour chacune des deux réponses possibles à une question, oui ou non, faire un raisonnement par disjonction de cas selon que la réponse est fausse ou correcte.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faudra tenir compte des deux réponses possibles du gardien
- Raisonner à partir d'hypothèses sur la réponse obtenue (oui ou non) et constater que l'on peut conclure en fonction de cette réponse :
    - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune est menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « non ». Il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
    - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « oui ». Ce gardien ne serait donc pas sur le sentier du trésor et il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
    - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est le menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « oui », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
    - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est celui qui dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « non », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
- Se rendre compte que pour chacune des réponses « oui », Aladin doit continuer sur le sentier jaune et que, en cas de réponse « non, il doit changer de sentier.

Ou, comprendre que la réponse obtenue est le résultat d'un mensonge et d'une vérité, quel que soit leur ordre. Elle est donc un mensonge. Si c'est « oui », il faut comprendre « non » et rester sur le sentier jaune, si c'est « non », il faut comprendre « oui » et changer de sentier.

Attribution des points

4 Réponse correcte (oui : rester sur le sentier jaune, non : changer de sentier), avec une explication claire et complète.

3 Réponse correcte avec explications confuses.

2 Un raisonnement basé sur une hypothèse, seulement pour le « oui » ou seulement pour le « non » mais qui ne conclut pas.

1 Un début de raisonnement hypothético-déductif basé sur d'autres hypothèses.

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 9, 10

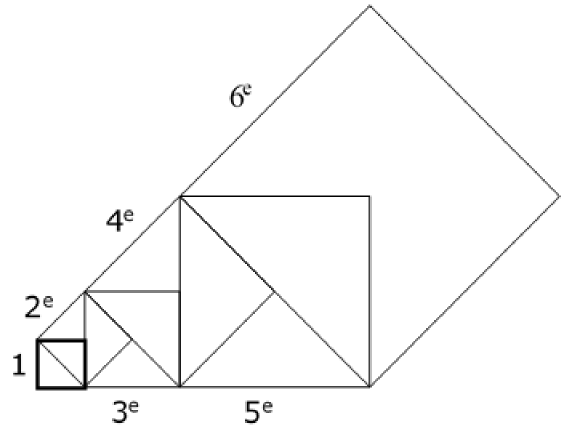
Banque de problèmes de l'ARMT 19.I.17 « légèrement adapté »

BP- ARMT bel affichage d'une fiche (projet-ermitage.org)

20. LA SAGA DES CARRÉS (Cat. 10)

Charles s'amuse à dessiner des carrés.

À partir d'un carré de 1 cm de côté, il dessine un deuxième carré dont un côté est confondu avec une des diagonales du précédent, un troisième avec un côté confondu avec la diagonale du deuxième, et ainsi de suite. Cette figure montre les six premiers carrés dessinés par Charles.



Quelle est la longueur du côté du onzième carré que Charles a pu dessiner ?

Quelle serait la longueur du côté du centième carré, s'il pouvait le dessiner ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Dans une succession de carrés, trouver une régularité dans la suite des longueurs des côtés et calculer les longueurs du onzième et du centième carré.

Analyse de la tâche

- Observer comment sont formés les carrés successifs : le premier, le troisième, le cinquième ..., ceux d'ordre impair, sont disposés l'un à côté de l'autre « horizontalement » comme le deuxième, le quatrième ... ceux d'ordre pair, qui eux disposés l'un à côté de l'autre mais en « obliquement »
- Calculer la longueur de la diagonale du premier carré – qui est la longueur du côté du 2e carré et trouver $\sqrt{2}$ (en cm) par le théorème de Pythagore ou en se rappelant la relation entre côté (c) et diagonale (d) d'un carré : $d = c\sqrt{2}$.
- Calculer la longueur du côté du troisième carré, soit par Pythagore, soit par la relation $d = c\sqrt{2}$ (qui conduit à $c_2 = d_1 = c_1\sqrt{2}$ et $c_3 = d_2 = c_2\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, soit par un quadrillage de la figure, dont l'unité est le premier carré, pour s'apercevoir que le troisième carré est constitué de 4 carrés de côté 1 cm et par conséquent a un côté qui est le double du premier carré : 2.
- Calculer (éventuellement) la longueur du côté du quatrième carré comme précédemment soit en multipliant le côté du précédent par $\sqrt{2}$, soit par quadrillage en constatant qu'il est composé de 8 carrés unités et que son côté est, en cm, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, soit en doublant celui du deuxième carré.
- Organiser ensuite les résultats jusqu'au 11e carré et constater que son côté mesure 32, en cm. Par exemple :

carré nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
côté, en cm	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32

- Se rendre compte que, pour aller au-delà du 11e carré, il devient nécessaire de faire un lien entre le numéro du carré et les exposants des mesures des côtés écrits sous forme de puissances de 2. (3e ligne dans l'exemple suivant) :

carré n°	...	7	8	9	10	11	12	13	…	99	100
côté, en cm	…	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32	$32\sqrt{2}$	64	…	2^{49}	$2^{49}\sqrt{2}$
côtés « exp »	…	2^3	$2^3\sqrt{2}$	2^4	$2^4\sqrt{2}$	2^5	$2^5\sqrt{2}$	2^6	…	2^{49}	$2^{49}\sqrt{2}$

on y remarque que ces exposants valent la moitié du « numéro d'ordre du carré – 1 » : pour 11, (11 - 1)/2 = 5, pour 99, (99 - 1)/2 = 49.

- Obtenir ainsi la valeur du côté du 99^e carré : 2^{49} **et celle de 100^e** carré : $2^{49}\sqrt{2}$

Ou : comprendre que les mesures des côtés des carrés d'ordre « impair » sont en progression géométrique de raison 2, avec 1 comme premier terme (et que le côté d'un carré « impair » de rang 2k + 1 est une puissance de 2 d'exposant k). Le côté du onzième carré, cinquième terme de la progression sera donc $2^5 = 32$.

- Comprendre, de même, que les mesures des côtés des carrés d'ordre « pair » sont en progression géométrique de raison 2, avec $\sqrt{2}$ (diagonale du carré de côté 1) comme premier terme (et que le côté d'un carré « pair » de rang 2k est le produit de $\sqrt{2}$ par une puissance de 2 d'exposant k - 1) et calculer la longueur du côté du centième carré : $\sqrt{2} \times 2^{49} \approx 7{,}960 \times 10^{14}$ cm, soit environ 7 milliards 960 millions de kilomètres (ce dernier calcul n'est pas attendu des élèves de niveaux 8, 9 ou 10 qui ne disposeraient pas d'une calculatrice scientifique).

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (32 cm et $\sqrt{2} \times 2^{49}$ cm) avec des explications claires (description de la procédure, tableau…). On admettra comme réponse correcte pour la 100e figure l'écriture : $\approx 7{,}960 \times 10^{14}$ ou du genre $7{,}961... \times 10^{14}$)

3 Les deux réponses correctes sans explication ou sans l'explicitation des diverses étapes qui conduisent à la solution

ou réponse correcte (32 ou 25) pour le 11^e carré et la réponse 7,961...E14 (copie de l'affichage d'une calculatrice) pour le 100^e carré ou encore la réponse 2

2 La première réponse correcte sans explication

ou la première réponse correcte avec explications incomplètes et un début de recherche pour la deuxième question

1 La première réponse correcte sans aucune explication

0 Incompréhension du problème.

Niveau : 10

Banque de problèmes de l'ARMT 18.II.18

[BP- ARMT bel affichage d'une fiche (projet-ermitage.org)]