

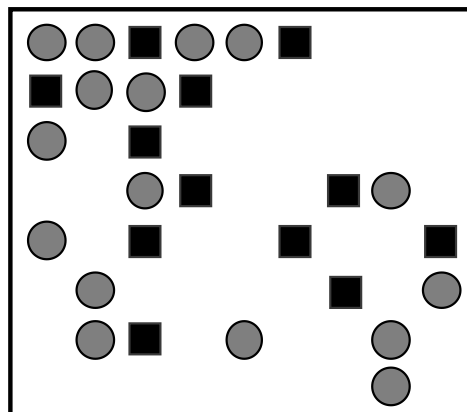
Titre		Niveaux			Origine	Domaines de connaissances			
1	Les bons chocolats	3			14.F.01	Géométrie : disposition régulière d'objets, alignements. Arithmétique			
2	Les pièces d'Émilie	3			15.F.01	Arithmétique : nombres entiers, dénombrements. Organisation d'une recherche			
3	La maison d'Élise	3	4		15.F.04	Arithmétique : sériation, succession de nombres impairs Logique : prise en compte simultanée de plusieurs conditions (conjonction)			
4	Additions codées	3	4		13.F.02	Arithmétique : addition, résolution pré-algébrique			
5	Carrelage en « L »	3	4	5	14.F.04	Arithmétique : comptage, suites numériques Géométrie : carré, pavage, régularités géométriques			
6	Les deux lettres		4	5	14.F.05	Géométrie : calcul de l'aire d'une figure, choix d'une unité de mesure			
7	Chiffres rouges et chiffres noirs		4	5	15.F.06	Arithmétique : numération, distinction chiffre-nombre, nombres pairs et impairs			
8	Le puzzle		4	5	6	21.F.06	Arithmétique : additions et soustractions de multiples de 10 Géométrie : carré et rectangle, mesures de leurs côtés		
9	Pas de gaspillage		5	6	14.F.07	Arithmétique : multiples, addition Géométrie : mesures, rectangle			
10	Garçon, l'addition !		5	6	15.F.10	Arithmétique : addition, soustraction, division			
11	Le défi		5	6	7	14.F.08	Arithmétique : addition/soustraction, numération (dizaines et unités)		
12	Jetons numériques		6	7	14.F.10	Arithmétique : addition et décomposition en termes Logique : organisation et analyse d'informations			
13	L'insomniaque		6	7	8	14.F.12	Arithmétique : numération, nombres pairs et impairs, classes de restes.		
14	Drôle de multiplication		6	7	8	9	10	14.F.15	Arithmétique : tables et algorithme de la multiplication Logique : organisation d'une recherche
15	Le troc		7	8	9	10	15.II.15	Arithmétique : proportionnalité	
16	D'un enclos à l'autre		7	8	9	10	14.F.14	Géométrie : rectangle, périmètre, aire Arithmétique, algèbre : systèmes d'équations	
17	Pile ou face		7	8	9	10	14.F.16	Combinatoire : nombre de quadruplets à 2 valeurs. Logique : principe des tiroirs	
18	Les hexagones de René			8	9	10	15.F.16	Arithmétique (addition, multiplication, carré, suite, proportions, ...) Géométrie : losange, hexagone, pavage	
19	À la recherche du carré			8	9	10	19.II.17	Arithmétique : multiples, moyenne, suites Algèbre : équations du premier degré.	

1. LES BONS CHOCOLATS (Cat. 3)

Les chocolats de cette boîte étaient disposés régulièrement quand elle était pleine :

- dans la première ligne, deux chocolats au lait, ronds, étaient suivis d'un pavé de chocolat noir, puis de deux ronds, puis d'un pavé, puis de deux ronds ...
- la ligne suivante commençait par un pavé suivi de deux ronds, puis d'un pavé, ...
- la troisième ligne était comme la première ligne, la quatrième comme la deuxième, et ainsi de suite.

Certains chocolats ont déjà été mangés et il n'en reste que 28.



Combien de chocolats au lait, ronds, ont déjà été mangés ?

Et combien de pavés de chocolat noir ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dénombrer les objets manquants dans une disposition en 8 lignes et 9 colonnes de deux types d'objets alignés régulièrement selon une période de 2 objets du premier type et un objet du second type pour chaque ligne, avec décalage d'une ligne à l'autre.

Analyse de la tâche

- Comprendre la disposition des chocolats selon le texte ou le dessin : repérer les alignements horizontaux et/ou verticaux et leurs régularités.
- Dessiner les chocolats qui manquent, selon les régularités découvertes et dénombrer les chocolats de chaque type: 32 ronds et 12 carrés.

Ou: compter le nombre de lignes (8) et remarquer que dans chacune d'entre elles il y a 6 ronds et 3 carrés. Calculer alors les nombres initiaux de chocolats de chaque type: $6 \times 8 = 48$ ronds et $3 \times 8 = 24$ carrés. Finalement compter les chocolats restants de chaque type et les soustraire aux nombres initiaux, pour les ronds : $48 - 16 = 32$, pour les carrés; $24 - 12 = 12$.

Attribution des points

- 4 Réponses exactes (32 et 12) avec justification claire (dessin complet ou calculs détaillés)
- 3 Réponses exactes avec dessin peu clair ou calculs incomplets
ou une erreur de comptage avec dessin complet correct ou une erreur de calcul avec le détail des opérations
- 2 Réponses exactes sans aucun dessin ni calcul
ou deux erreurs de comptage ou de calcul sur la base d'un dessin complet correct ou de calculs détaillés
- 1 Une seule réponse correcte, sans dessin ni calcul
ou début de recherche correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 3

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.01

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp38-fr&flag=1&langue=fr&w=0

2. LES PIÈCES D'ÉMILIE (Cat. 3)

Dans sa tirelire, Émilie a vraiment beaucoup, beaucoup de pièces. Mais elle n'a que des pièces de 5, 10, 20 ou 50 centimes. Elle en prend huit et remarque qu'elle a exactement 1 euro.

**Quelles sont les huit pièces qu'Émilie peut avoir prises dans sa tirelire ?
Écrivez toutes vos solutions.**

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Constituer 1 euro à l'aide de 8 pièces prises parmi 5, 10, 20 ou 50 centimes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de combiner des pièces (dont on ne connaît que le nombre total) en multipliant leur nombre par la valeur de la famille dont elles font partie, de manière à obtenir 100 centimes (= 1 euro) par addition des produits partiels.
- Comprendre que seules les valeurs 5, 10, 20 et 50 et leurs multiples interviennent.
- Comprendre que les conditions du problème n'imposent pas d'avoir tous les types de pièces représentés dans chaque combinaison.
- Comprendre qu'il ne peut pas y avoir que des pièces de 5 centimes car avec huit pièces, on n'arriverait qu'à 0,40.
- Comprendre qu'il ne peut pas y avoir que des pièces de 10 centimes car avec huit pièces, on n'arriverait qu'à 0,80.
- Comprendre qu'on ne peut utiliser qu'une seule pièce de 50 centimes.
- Avoir remarqué qu'on peut obtenir 0,30 € avec trois pièces de deux manières : trois pièces de 10 centimes ou une pièce de 20 centimes et deux pièces de 5 centimes.
- Comprendre que les pièces de 5 centimes seront forcément en nombre pair.
- Se rappeler qu'on utilise 8 pièces dans chaque recherche de combinaison.
- Trouver les 5 combinaisons possibles, c'est-à-dire :

a)	5	5	10	10	10	20	20	20
b)	5	5	5	5	10	10	10	50
c)	5	5	5	5	20	20	20	20
d)	10	10	10	10	10	10	20	20
e)	5	5	5	5	5	5	20	50

Attribution des points

- 4 Les 5 solutions exactes sont mentionnées
- 3 4 solutions correctes,
ou les 5 solutions exactes, avec présence de doublons
- 2 Au moins 4 solutions qui font toutes 1 euro sont trouvées, mais dont une ou deux comportent un nombre de pièces supérieur à 8
ou 3 solutions correctes
- 1 Les solutions proposées ont toutes 8 pièces, mais comportent des erreurs de calcul, avec un total différent de 1 €,
ou une ou deux solutions correctes
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 3

Banque de problèmes de l'ARMT 15.F.01

Remarque : toutes les combinaisons sont acceptables sous réserve qu'il y ait assez de pièces pour les faire.

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd139-fr&flag=1&langue=fr&w=0

3. LA MAISON D'ÉLISE (Cat. 3, 4)

Cinq amies, Alice, Blanche, Charlotte, Danièle et Élise habitent la même rue. Leurs maisons se trouvent les unes à côté des autres, toutes du même côté de la rue.

Sur ce côté de la rue, les maisons portent toutes des numéros impairs : la première maison porte le numéro 1, la deuxième le numéro 3, la troisième le numéro 5 et ainsi de suite.

- Blanche habite au numéro 17.
- Charlotte habite la maison qui porte le numéro le plus grand.
- Charlotte n'habite pas à côté de chez Alice ni à côté de chez Danièle.
- Alice habite au numéro 21.

**Quel est le numéro de la maison d'Élise ?
Expliquez votre raisonnement.**

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le numéro de la maison d'une fille connaissant des informations sur les numéros des maisons voisines.

Analyse de la tâche

- Se référer aux pratiques courantes de la numérotation des maisons d'une rue et admettre que, dans le cas présent, il n'y a pas de numéros manquants ni de numéros doubles du type 21A ou 21B.
- Déduire de la deuxième condition que la maison de Charlotte se trouve à l'une des deux extrémités de la file des 5 maisons, selon le sens choisi.
- Déduire de la troisième condition que Blanche ou Élise habitent à côté de chez Charlotte.
- Déduire de la première et de la quatrième condition que c'est Élise qui habite à côté de chez Charlotte.
- Placer chaque enfant au bon numéro : (Blanche; 17) ; (Danièle; 19) ; (Alice; 21) ; (Élise ; 23) ; (Charlotte; 25).

Ou : dessiner cinq maisons et placer le numéro 17, le 19 et le 21. Charlotte ne peut pas être au 19, ni au 23, ni au 15. En déduire qu'elle est au 25 et que la première maison est le numéro 17. Nous savons maintenant que Blanche habite au 17, que Alice habite au 21 et que Charlotte habite au 25. Comme Danièle n'habite pas à côté de chez Charlotte, elle habite donc au 19. Par conséquent, c'est Élise qui habite au 23.

Ou : procéder par essais successifs en éliminant les essais menant à des impossibilités.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (n° 23) avec explication permettant de suivre le raisonnement adopté
- 3 Réponse correcte avec des explications confuses ou la recopie des conditions (qui n'est pas une vraie explication)
- 2 Réponse correcte sans explication
ou une erreur due au non-respect d'une des conditions
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 15.F.04

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd142-fr&flag=1&langue=fr&w=0

4. ADDITIONS CODÉES (Cat. 3, 4)

Dans ce tableau, il y a des additions dans les lignes et dans les colonnes.

Chacune des figures (le rond, le carré, l'étoile, le triangle et le losange) remplace toujours un même nombre.

●	+	★	+	▲	+	★	=	9
+		+		+		+		
●	+	●	+	■	+	●	=	9
+		+		+		+		
■	+	★	+	◆	+	▲	=	13
6		5		12		8		

Trouvez par quels nombres il faut remplacer ces dessins pour que toutes les additions soient justes.

Montrez comment vous avez fait pour trouver ces nombres.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Remplacer les symboles (de 4 types) dans un tableau 4 x 3 de telle manière que les sommes des colonnes et celles des lignes soient égales à des valeurs données.

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux figures différentes représentent deux nombres différents.
- Procéder par essais en attribuant des valeurs aux différentes figures, calculer les sommes et vérifier l'égalité avec les nombres écrits en bout de lignes ou en bas de colonnes.

Ou

- Remarquer que pour passer de la première colonne à la deuxième ligne, on ajoute le rond, d'où sa valeur : $9 - 6 = 3$. De même on trouve le triangle comme différence entre la première ligne et la deuxième colonne, donc 4. Et on trouve l'étoile en comparant la troisième ligne et la troisième colonne. Ensuite le carré s'obtient en soustrayant trois ronds à la deuxième ligne. Pour finir, le losange sera calculé dans la troisième colonne par exemple.

Ou

- Procéder par hypothèses et déductions. Par exemple, attribuer la valeur 1 au rond et déduire en utilisant la première colonne que le carré vaut alors 4. Remplacer le rond par 1 et le carré par 4 à la seconde ligne et constater que la somme est différente de 9. Recommencer avec une autre valeur pour le rond.
- Arriver enfin à la solution : rond : 3 , carré : 0 , étoile : 1 , triangle : 4 , losange : 8.

Attribution des points

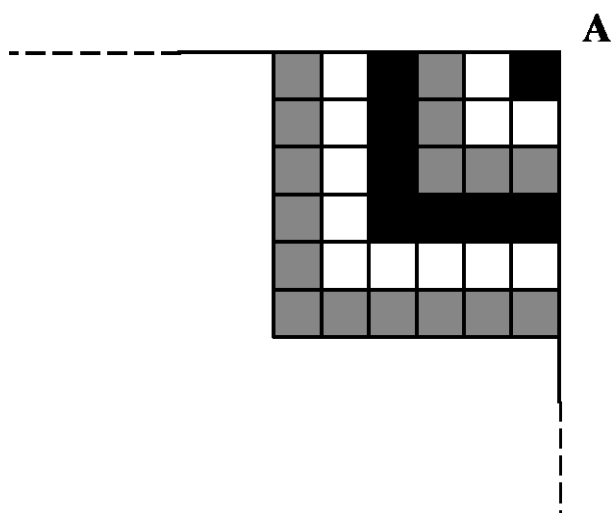
- 4 Réponse correcte « rond : 3 , carré : 0 , étoile : 1 , triangle : 4 , losange : 8 » avec description de la procédure
- 3 Réponse correcte (les 5 valeurs exactes) sans description ou quatre valeurs exactes avec description
- 2 Quatre valeurs exactes sans description ou trois valeurs exactes avec description
- 1 Trois valeurs exactes sans description ou deux valeurs exactes avec description
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Banque de problèmes de l'ARMT 13.F.02

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd267-fr&flag=1&langue=fr&w=0

5. CARRELAGE EN « L » (Cat. 3, 4, 5)



La chambre de Rita est carrée. Elle veut y poser un carrelage. Elle souhaite utiliser des carreaux carrés de trois couleurs différentes.

Elle commence par disposer les carreaux comme sur le dessin (qui représente le début du carrelage) :

- Elle place d'abord un carreau noir dans un des coins de sa chambre, le coin A.
- Elle entoure ce carreau noir avec des carrés blancs.
- Elle dispose alors un autre rang en forme de « L » avec des carreaux gris.
- Elle décide ensuite de continuer avec la même régularité, pour arriver à 20 carreaux par côté, achevant ainsi de carrelé toute sa chambre.

Combien de carreaux de chaque couleur doit-elle utiliser pour le carrelage de toute sa chambre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Un carré est recouvert de petits carrés à partir du coin supérieur droit en entourant chaque fois la partie recouverte par une nouvelle couche en L en alternant les couleurs d'une couche à l'autre selon l'ordre noir, blanc, gris. Déterminer le nombre de petits carrés de chaque teinte sachant qu'il y a 20 couches.

Analyse de la tâche

- Observer dans la figure la disposition des diverses couleurs et déterminer les critères de succession permettant, à chaque fois qu'on ajoute un rang de carreaux en « L », de former des carrés de plus en plus grands jusqu'à arriver à celui du carrelage complet de (20 x 20).
- Trouver le nombre total des carreaux de chaque couleur en dessinant le carrelage et par comptage.

Ou : découvrir que, à partir du premier carreau, les autres sont disposés selon une suite de nombres impairs :

Noir	Blanc	Gris	
1	3	5	+2
7	9	11	⇒
13	15	17	
19	21	23	⇓+6
25	27	29	
31	33	35	
37	39		

- Observer, à partir du carré au coin A (position 1) et de la droite vers la gauche, la suite de « L » (« L » blanc, puis « L » gris, puis « L » noir...) Les carreaux de chaque « L » (position 2, 3, 4, 5, 6) peuvent être comptés verticalement et horizontalement. Ces nombres sont les suivants :

Position	nb. carreaux en verticale	nb. carreaux restant horizontalement.
1	1	0
2	2	1
3	3	2
4	4	3
...

le calcul peut ainsi se faire, couleur par couleur :

$$\text{Noir : } 1 + (4 + 3) + (7 + 6) + (10 + 9) + (13 + 12) + (16 + 15) + 19 + 18 = 133$$

$$\text{Blanc : } (2 + 1) + (5 + 4) + (8 + 7) + (11 + 10) + (14 + 13) + (17 + 16) + 20 + 19 = 147$$

$$\text{Gris : } (3 + 2) + (6 + 5) + (9 + 8) + (12 + 11) + (15 + 14) + 18 + 17 = 120$$

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (N = 133 ; B = 147 ; G = 120) avec explications ou avec dessin adéquat
- 3 Réponse correcte avec explications ou dessin peu clair
ou réponse complète avec une erreur dans le comptage ou le calcul, mais avec explications ou avec dessin adéquat
- 2 Réponse incomplète avec compréhension de la succession des couleurs des carreaux et comptage correct pour une seule couleur
ou réponse correcte sans explication ni calcul ni dessin
ou réponse complète avec deux erreurs dans le comptage mais avec explications ou avec dessin adéquat
- 1 Début correct de recherche, avec explicitation de la succession correcte des couleurs des carreaux mais sans comptage
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.04

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd220-fr&flag=1&langue=fr&w=0

6. LES DEUX LETTRES (Cat. 4, 5)

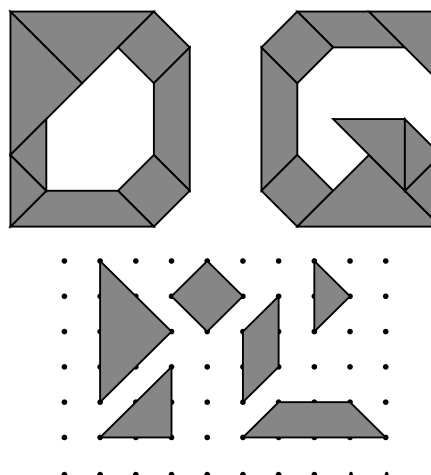
Danielle et Gabrielle ont marqué la première lettre de leur nom sur leur cahier en y collant des triangles, des carrés et d'autres figures.

Voici les deux lettres D et G qu'elles ont obtenues :

Toutes les figures qu'elles ont utilisées ont été découpées dans du papier à points, selon ces six modèles :

Qui a utilisé le plus de papier à points pour composer la première lettre de son nom ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire des lettres D et G composées de figures données par ailleurs dans un quadrillage.

Analyse de la tâche

- Observer les deux lettres D et G et vérifier qu'elles sont bien composées des six figures modèles.
- Comprendre que, pour comparer la quantité de papier utilisé, il s'agit de comparer les aires des figures et non leur nombre ou leur périmètre et, par conséquent, qu'il faut soit chercher une unité de mesure d'aire commune, soit travailler par compensations ou par superpositions.
- Constater que les six figures modèles (dont il n'est pas nécessaire de connaître les noms) peuvent se décomposer en petits triangles : 2 pour le carré, le parallélogramme, le triangle moyen, 3 pour le trapèze et 4 pour le grand triangle. Compter alors les unités dans les deux lettres et obtenir 20 pour D et 19 pour G. (Le comptage peut s'effectuer par additions des aires de chaque figure ou par dessin préalable des petits triangles sur chaque figure et par comptage un à un).

Pour simplifier le comptage, il est aussi possible de retirer les pièces égales qui figurent dans les deux lettres : un grand triangle, deux carrés, un trapèze, deux petits triangles et ne comparer que l'aire des pièces restantes.

Ou : découper les pièces de chaque figure et les disposer en « puzzle » plus compacts pour pouvoir les superposer et constater que celui de D a un petit triangle de plus que celui de G.

Ou : découper une figure (G) et avec les pièces essayer de recouvrir D

Attribution des points

- 4 Réponse correcte : «Danielle a utilisé plus de papier » avec une explication claire reposant sur une comparaison des aires avec le nombre d'unités (20 et 19 petits triangles) ou sur de compensations ou par superpositions
- 3 Réponse correcte, avec des explications incomplètes mais qui témoignent d'une bonne compréhension du problème
- 2 Réponse correcte, avec seulement une esquisse d'explication (par exemple : « on a compté » ou « on les a mises l'une sur l'autre, ... ») ou réponse erronée, mais avec des explications qui font apparaître une procédure correcte où il y a une erreur de calcul
- 1 Réponse : «Danielle», qui pourrait être donnée au hasard, sans aucune explication ou début de recherche cohérent
- 0 Réponse : « Gabrielle utilise le plus de papier » qui se réfère au nombre de pièces : 9, contre 8 pour Danielle ou réponse fondée sur la mesure du périmètre de la figure, ou incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.05

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd221-fr&flag=1&langue=fr&w=0

7. CHIFFRES ROUGES ET CHIFFRES NOIRS (Cat. 4, 5)

Julien a écrit chacun des nombres de 0 à 99 sur des billets en utilisant un stylo noir pour les chiffres « 1 », « 3 », « 5 », « 7 » et « 9 » et un stylo rouge pour les chiffres « 0 », « 2 », « 4 », « 6 » et « 8 ».

Il répartit les billets dans quatre boîtes sur lesquelles il écrit N, R, NR et RN :

- dans la boîte N, il met les nombres qui sont écrits entièrement en noir, comme 37 ou 7
- dans la boîte R, il met les nombres qui sont écrits entièrement en rouge, comme 6 ou 24
- dans la boîte NR, il met les nombres dont le chiffre des dizaines est noir et le chiffre des unités est rouge, comme 58
- et dans la boîte RN, il met les nombres qui restent, comme 85.

Dans quelle boîte y aura-t-il le plus de nombres ?

Dans quelle boîte y aura-t-il le moins de nombres ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Dénombrer les nombres naturels de 1 à 99 : dont les deux chiffres sont "pairs"; dont les deux chiffres sont "impairs"; formés d'un chiffre "pair" suivi d'un chiffre "impair"; formés d'un chiffre "impair" suivi d'un chiffre "pair".

Analyse de la tâche

- Constater ou se rappeler que les nombres de 0 à 99, sont composés d'un ou deux chiffres, qu'il faut ici observer selon le critère « noir » ou « rouge » (impair ou pair si on considère ces chiffres comme des nombres naturels d'un seul chiffre).
- Se rappeler qu'il y a 100 nombres de 0 à 99, en vue des vérifications ou pour une première estimation. Imaginer que, en cas de répartition équitable, chaque boîte contiendrait 25 billets.
- Analyser plus en détail l'écriture des nombres composés de chiffres noirs et constater qu'il y en a 5 d'un seul chiffre (1, 3, 5, 7, 9) puis pour les nombres de deux chiffres trouver les 25 (5×5) possibilités en combinant les chiffres des dizaines et ceux des unités. Conclure qu'il y aura 30 nombres ($25 + 5$) dans la boîte N.
- Le cas des chiffres « rouges » est différent du précédent. Il y a bien 5 nombres d'un seul chiffre rouge sur le (0, 2, 4, 6, 8) mais il n'y en a que 20 (4×5) de deux chiffres rouges en combinant les quatre possibilités restantes pour les chiffres des dizaines (2, 4, 6, 8) et les cinq possibilités pour les chiffres des unités. On arrive ainsi à 25 ($5 + 20$) nombres qui s'écrivent avec des chiffres rouges seulement. Il y aura 25 nombres dans la boîte R.
- Les nombres bicolores sont de deux chiffres. Il y a cinq possibilités de commencer par un chiffre noir : chiffre des dizaines 1, 3, 5, 7, 9 combinés avec les cinq cas d'un deuxième chiffre rouge, des unités, 0, 2, 4, 6, 8, ce qui conduit à 25 nombres dans NR.
- Pour les autres nombres bicolores, il n'y aura que 20 combinaisons des quatre chiffres rouges des dizaines 2, 4, 6, 8 avec les cinq chiffres noirs des unités, 1, 3, 5, 7, 9. Il y aura 20 nombres dans RN.

Ou, écrire les cent nombres en utilisant les deux couleurs et procéder par comptage un à un des nombres de chaque catégorie.

- Formuler la réponse : La boîte N en aura le plus : 30 et la boîte RN en aura le moins : 20. Puis rédiger les « explications » pouvant aller de dispositions ordonnées où les combinaisons sont bien visibles à un simple inventaire des nombres de chaque type, écrits en couleur. Valider éventuellement les réponses en calculant les nombres de R et de NR et vérifier que la somme des nombres répartis est 100

Attribution des points

- 4 Réponses correctes et complètes (N le plus, 30 et RN le moins, 20) avec explications (par exemple la liste des nombres de chaque boîte, le type de comptage effectué, ...)
- 3 Réponses correctes et complètes (N le plus, 30 et RN le moins, 20) avec une justification partielle ou démarche correcte mais réponse erronée du fait d'une erreur de comptage
- 2 Réponses correctes et complètes, sans aucune explication ou une seule des deux réponses avec explications
- 1 Une seule réponse correcte, sans explication
- 0 Incompréhension du problème

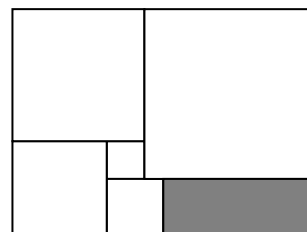
Niveaux : 4, 5

Banque de problèmes de l'ARMT 15.F.06

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd144-fr&flag=1&langue=fr&w=0

8. LE PUZZLE (Cat. 4, 5, 6)

Marie a formé le puzzle ci-contre avec six pièces.
Cinq de ces pièces sont des carrés blancs, le sixième est un rectangle gris.
Les côtés des deux plus petits carrés mesurent 20 mm et 30 mm.



Combien mesure le plus grand côté de la pièce rectangulaire grise ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

D'après le dessin d'un rectangle composé de six pièces : cinq carrés et un rectangle, trouver les dimensions de chacune des pièces sachant que les côtés de deux des carrés adjacents mesurent 20 et 30 mm.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut utiliser les mesures des côtés des deux petits carrés pour trouver les autres par déductions successives.
- Procéder ainsi :
 - le côté du carré en bas à gauche mesure 50 mm ($20 + 30$)
 - le côté du carré en haut à gauche mesure 70 mm ($50 + 20$)
 - le côté du carré en haut à droite mesure 90 mm ($70 + 20$)
 - la différence entre la longueur du côté du carré blanc et celle du carré noir est de 10 mm ($30 - 20$)
 - le grand côté du rectangle mesure donc 80 mm ($90 - 10$)

Ou faire un dessin à l'échelle, mesurer et calculer en utilisant l'échelle choisie.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (80 mm) avec explications claires (déductions ou dessin et utilisation d'une échelle)
- 3 Réponse correcte, avec explications peu claires (déductions mal expliquées ou dessin approximatif)
- 2 Réponse correcte sans explication
ou réponse incorrecte due à une seule erreur de calcul, avec explications cohérentes
ou calcul correct des mesures des côtés des trois autres carrés seulement
- 1 Début de recherche correct
- 0 Incompréhension du problème

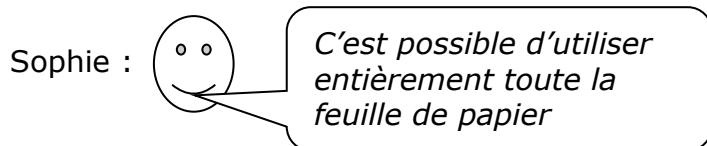
Niveaux : 4, 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 21.F.06

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gm5-fr&flag=1&langue=fr&w=0

9. PAS DE GASPILLAGE (Cat. 5, 6)

La maman de Sophie a acheté une feuille de papier de 24 cm sur 34 cm. Elle veut y découper le plus possible d'étiquettes rectangulaires de 6 cm de large sur 8 cm de long.



Sophie a-t-elle raison ? Combien d'étiquettes sa maman peut-elle découper dans la feuille qu'elle a achetée ? Dessinez un découpage possible avec les détails des dimensions.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Trouver la manière de découper entièrement une feuille de dimension 24 x 34 cm en rectangle de 6 x 8 cm.

Analyse de la tâche

- Comprendre que tout le papier doit être utilisé
- Penser à s'aider d'un schéma du rectangle initial.
- Remarquer que 24 est multiple de 6 et de 8 et qu'il est donc possible de découper entièrement la largeur en un nombre entier de fois 6 cm ou 8 cm, mais sans pouvoir combiner les deux dimensions.

À partir de là, essayer en découpant d'abord des bandes de 8 cm sur la longueur et 6 cm sur la largeur, pour arriver à un rectangle de 24 sur 18 cm (Fig. 1)

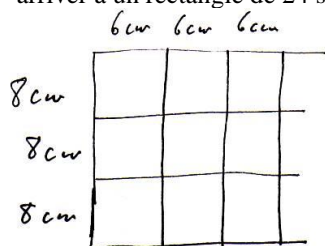


Fig. 1

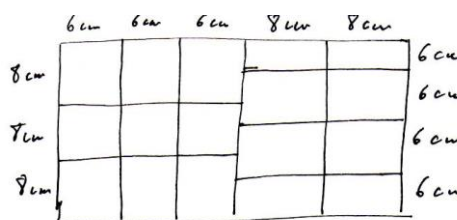


Fig. 2

-Se demander ensuite combien de fois on peut reporter 6 cm sur la longueur du rectangle de façon à avoir la possibilité de compléter avec un multiple de 8 cm. La seule possibilité est 2 fois, ce qui conduit à $3 \times 6 \text{ cm} + 2 \times 8 \text{ cm}$. Le nombre des étiquettes devient ainsi $9 + 8 = 17$ (Fig. 2). Remarquer qu'en commençant par 4 étiquettes de 6 cm sur la largeur on arriverait au même résultat.

Ou : mettre en place une démarche par essais, en reportant des dimensions sur un schéma ou un dessin à l'échelle.

Ou : découper des étiquettes et procéder par essais de pavage.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (17 étiquettes – avec ou sans le « oui ») avec schéma correct et détaillé
- 3 Réponse correcte avec schéma mais sans détail des dimensions
- 2 Réponse erronée (16 étiquettes) avec seulement des étiquettes réalisées avec 6 cm découpée sur la largeur de la feuille
- 1 Réponse erronée (moins de 16) avec seulement des étiquettes réalisées avec 8 cm découpée sur la largeur de la feuille
ou autre réponse erronée avec un schéma respectant les dimensions des étiquettes
ou réponse 17 trouvée par un calcul d'aire : $(24 \times 34) : (6 \times 8)$, sans dessin
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.07

10. GARÇON, L'ADDITION ! (Cat. 5, 6)

Dans un restaurant, Luc, Marie, Nathalie, Olivier et Patricia, demandent l'addition après avoir bien mangé. Les cinq amis doivent payer un total de 128 euros. Ils décident de partager ce montant en parts égales, mais pour ne pas faire attendre le serveur, chacun met 25 euros sur la table. Luc ajoute 1 euro et Olivier ajoute 2 euros.

Ils sortent du restaurant. Avant de se quitter, ils cherchent une manière d'équilibrer les comptes pour que tous aient payé la même somme.

- Marie propose : « Je donne 1 euro à Luc. Nathalie et Patricia donnent chacune 1 euro à Olivier. »
- Nathalie propose : « Je donne 60 centimes à Luc. Marie et Patricia donnent chacune 60 centimes à Olivier. »
- Patricia affirme que la distribution ne serait pas correcte ni dans un cas, ni dans l'autre.

Qui a raison ? Comment peuvent-ils faire pour se partager correctement le montant lorsqu'ils sortent du restaurant ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Trouver une manière de partager équitablement une addition de 128 euros entre 5 amis après que chacun ait payé 25 euros et que deux d'entre eux aient ajouté respectivement 1 et 2 euros.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les 3 euros versés en plus par Luc et Olivier auraient dû être divisés en cinq : $3/5 = 0,60$ (ou calculer $128/5 = 25,60$) et que par conséquent, Marie, Nathalie et Patricia doivent encore verser chacune 60 centimes.
- En suivant la proposition de Marie, Luc et Olivier auraient payé 25 euros chacun, alors que Marie, Patricia et Nathalie auraient payé 26 euros chacune, ce qui n'est pas équitable.
- En suivant la proposition de Nathalie, Luc n'aurait payé que 25,40 euro et Olivier 25,80 euro. par conséquent, Luc devrait encore donner 20 centimes à Olivier. La proposition de Nathalie n'est pas équitable non plus.
- Par conséquent, c'est Patricia qui a raison.
- Trouver alors comment se répartir le solde du montant :
Vu que les trois filles doivent donner 60 centimes chacune, l'une d'entre elles (Marie, Nathalie ou Patricia) pourrait donner 40 centimes à Luc et 20 centimes à Olivier et les deux autres donner 60 centimes à Olivier. On peut aussi imaginer rassembler les 60 centimes que Marie, Nathalie et Patricia doivent payer en un total de 1,80 euro. Puis, donner 40 centimes de ce montant à Luc et 1,40 euro de ce montant à Olivier.

Attribution des points

- 4 Réponses correctes (Patricia a raison. Marie, Nathalie et Patricia doivent donner 60 centimes chacune. Luc recevra 40 centimes et Olivier recevra 1,40 euro) avec les explications permettant de suivre le raisonnement adopté et de dire que les propositions de Nathalie et Marie sont inéquitables
- 3 Réponses correctes, avec une justification confuse ou partielle (calculs seuls par exemple)
- 2 Réponses correctes sans explication ou avec seulement des calculs incomplets ou raisonnement correct mais qui contient une erreur de calcul.
- 1 Réponse « Patricia a raison », seule, sans aucune explication ou début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Banque de problèmes de l'ARMT 15.F.10

11. LE DÉFI (Cat. 5, 6, 7)

Paul, Marie et Luc écrivent des additions en utilisant, pour chacune d'elle, une fois et une seule chacun des six chiffres : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Les trois amis se lancent un défi : ils cherchent à obtenir, par une de ces additions, le plus grand nombre inférieur à 100.

Paul a obtenu 39 : **$6 + 5 + 23 + 4 + 1$** .

Marie a obtenu 97, mais ce n'est pas valable car elle n'utilise pas le « 5 » : **$64 + 32 + 1$** .

Luc a obtenu 95, mais ce n'est pas valable car il a utilisé deux fois le « 2 » : **$22 + 56 + 14 + 3$** .

Trouvez le plus grand nombre inférieur à 100, qui est le résultat d'une addition écrite avec les six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, et 6, pris chacun une seule fois.

Indiquez tous vos calculs pour expliquer votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Écrire une addition en utilisant une et une seule fois les chiffres de 1 à 6 de telle façon à obtenir une somme maximum inférieure à 100.

Analyse de la tâche

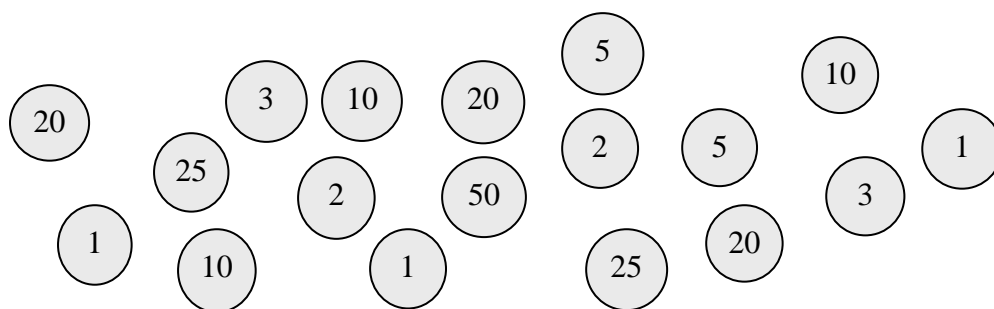
- Lire l'énoncé, vérifier les exemples et prendre en compte le but et les contraintes.
- Comprendre que pour trouver l'addition donnant le plus grand nombre inférieur à 100, il faut utiliser des nombres de deux chiffres et de un chiffre et travailler par essais organisés en choisissant les dizaines de manière opportune :
par exemple, la somme des trois nombres formés par les trois couples de chiffres : $12 + 34 + 56 = 102$ est **trop grande** ; en conservant les deux « grands nombres » 34 et 56 on obtient : $1 + 2 + 34 + 56 = 93$ qui respecte les contraintes, mais est-ce vraiment le plus grand ?
- Comprendre qu'on peut former d'autres nombres de deux chiffres avec des combinaisons différentes :
par exemple : $13 + 24 + 65 = 110$ **trop grand**, mais $1 + 3 + 24 + 65 = 93$! Et encore $13 + 2 + 4 + 65 = 84$ (dans le passage de $1 + 3$ à 13 il y a 9 unités en plus, mais dans le passage de 24 à $2 + 4$, il y a 18 unités en moins) ou, toujours avec 65, $14 + 23 + 65 = 102$ **trop grand**.
ou : $14 + 23 + 56 = 93$! ou encore : $15 + 23 + 46 = 84$ **trop petit** ; et rien ne change si l'on utilise une unité de plus dans le premier nombre et une de moins dans le troisième : $16 + 23 + 45 = 84$
ou : $12 + 45 + 36 = 93$! ou : $12 + 54 + 36 = 102$ (en fait, en passant de 45 à 54, on augmente de 9 unités)
- La liste (la plus exhaustive) des combinaisons possibles conduit toujours à 21, 30, ... 75, 84, 93, 102 ... (Il est aussi possible de comprendre à ce moment que chaque changement de position des chiffres augmente ou diminue la somme de 9 ou d'un de ses multiples). Le plus grand nombre inférieur à 100 est donc 93.

Attribution des points

- 4 La réponse correcte (93) et 5 calculs/égalités différent(e)s respectant les contraintes de l'énoncé (tous les chiffres, seulement ceux-là, sans doublon de chiffres) dont au moins un donne 102 et au moins un autre donne 93 et qui montrent que « 93 » est le plus grand nombre possible inférieur à cent (parmi ... 75, 84, 93, 102, 115, 147, 156...)
- 3 Avec au moins un calcul donnant 93. Par exemple, s'il y a 5 calculs différents (résultats identiques ou non) mais si aucun ne donne 102.
Ou bien, s'il y a au moins de 5 calculs différents (résultats identiques ou non) dont l'un donnant 102.
Ou La réponse correcte, (93) avec au moins une décomposition additive selon les contraintes de « 93 »
- 2 La réponse correcte (93) sans autre détail
ou seulement une addition correcte qui donne la réponse 84, comme plus grand nombre
- 1 Une addition correcte qui donne une somme inférieure à 84
ou la réponse 102
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.08

12. JETONS NUMÉRIQUES (Cat. 6, 7)

Paul, André et Jean se sont partagé ces 18 jetons de la manière suivante :

- chacun a pris le même nombre de jetons,
- chacun a obtenu la même somme en additionnant les nombres de ses jetons,
- en additionnant les nombres de deux de ses jetons, Paul obtient 22,
- André a pris un des jetons sur lequel est écrit le nombre 3.

Qui a le jeton sur lequel est écrit 50 ?

Qui a pris l'autre jeton sur lequel est écrit 3 ?

Justifiez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Décider qui a pris deux jetons particuliers lors du partage de 18 jetons, portant un des nombres : 1 (3x), 2 (2x), 3 (2x), 5 (2x), 10 (3x), 20 (3x), 25 (2x), 50 entre 3 amis. On sait que chacun a pris le même nombre de jetons et que leurs sommes sont identiques. Le 3 figure sur les jetons de l'un des amis et la somme de deux jetons d'une autre collection vaut 22. Les jetons particuliers sont l'autre 3 et le 50.

Analyse de la tâche

- Après avoir vérifié qu'il y a bien 18 jetons, calculer la somme des nombres (213) et la diviser par 3 pour trouver la somme ($71 = 213 : 3$) obtenue par chacun et organiser les 18 nombres donnés pour trouver comment on peut obtenir 71 comme somme de six d'entre eux :

50, 25, 25, 20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1.

- Constater qu'il n'y a qu'une seule somme dont 50 est l'un des six termes (25 ou 20 sont trop grands, il faut un terme 10 et un seul, un terme 5 et un seul, ...), la décomposition (I) : $50 + 10 + 5 + 3 + 2 + 1$, qui pourrait être celle d'André car elle contient un terme 3.

Avec les nombres qui restent, constater qu'il n'y a plus que deux décompositions de 71 (les deux 25 ne peuvent être pris ensemble, avec 25 il faut un 20 et un seul, ...) :

décomposition (II) : $25 + 20 + 20 + 3 + 2 + 1$ décomposition (III) : $25 + 20 + 10 + 10 + 5 + 1$.

En conclure que les jetons de Paul sont ceux de la décomposition (II) car ce sont les seuls où l'on trouve une somme partielle de deux termes valant 22 ($20 + 2$). Donner la réponse : c'est André qui a le jeton 50 (et l'un des 3) et Paul qui a l'autre jeton sur lequel est écrit le nombre 3.

- Ou : Voir que Paul, ayant 22 avec les deux seuls jetons qui le permettent : 2 et 20, il doit avoir 49 avec ses quatre autres jetons. Constater alors qu'il n'y a qu'une façon d'obtenir 49 avec quatre des autres jetons (50 est exclu ainsi que les deux 25, les deux 20 ne conviennent pas, il faut un 25 et un 20, ...) ce qui conduit à la décomposition déjà rencontrée (II) : $20 + 2 + 25 + 20 + 3 + 1$. On sait ainsi que, André ayant pris un jeton 3, c'est Paul qui a l'autre.

Chercher ensuite la décomposition avec le terme 50 comme précédemment (I), constater qu'elle contient l'autre 3 et que c'est donc celle d'André.

- Ou : Calculer qu'il faut encore 68 points à André, en cinq jetons (un des 3 étant déjà pris). Découvrir les quatre décompositions correspondantes : $50 + 10 + 5 + 2 + 1$; $25 + 25 + 10 + 5 + 3$; $25 + 20 + 20 + 2 + 1$; $25 + 20 + 10 + 10 + 3$; $20 + 20 + 20 + 5 + 3$ et constater que, si l'on choisit l'une des trois dernières (celles qui ne contiennent pas 50) il n'est plus possible de répartir les 12 jetons qui restent en deux groupes dont la somme est 71 (Car, comme nous l'avons vu précédemment, il n'y a qu'une seule décomposition (I) qui contient 50). Continuer comme précédemment.

Attribution des points

- 4 Réponses correctes (André a le 50 et Paul a l'autre 3) avec justification complète : unicité des trois séries de termes dont la somme est 71
- 3 Réponses correctes et détermination des points qui constituent les jetons de Paul et d'André, sans autre justification
- 2 Une seule réponse correcte avec justifications
- 1 Réponses correctes sans aucune justification ou début de recherche avec au moins le calcul du nombre de points réalisé par chacun (71)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.10

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd226-fr&flag=1&langue=fr&w=0

13. L'INSOMNIAQUE (Cat. 6, 7, 8)

Le grand-père de Julie souffre d'insomnie. Au lieu de « compter les moutons », il a mis au point un système original pour s'endormir : il compte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... en tapant sur le bord du lit avec les doigts de la main droite dans cet ordre : « pouce, index, majeur, annulaire, auriculaire, annulaire, majeur, index, pouce, index, majeur... »

Quel doigt correspondra au nombre 152 ? Et lequel correspondra au nombre 3 251 ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

En comptant sur les doigts d'une main de la manière suivante (en "aller et retour"): pouce: 1; index: 2; majeur: 3; annulaire: 4; auriculaire: 5; annulaire: 6; majeur: 7; index: 8; pouce: 9; index: 10; majeur: 11; ... trouver le doigt qui correspond à 152 et celui qui correspond à 3 251.

Analyse de la tâche

- Comprendre la façon avec laquelle le grand-père compte sur ses doigts.
- Se rendre compte que, si l'on part du pouce, celui-ci revient tous les 8 coups et indiquera donc les nombres 1, 9, 17, 25 ... qui sont tous des multiples de 8 augmentés de 1. Pour trouver le doigt correspondant au nombre 152, on peut s'en approcher, par exemple, en repérant $160 + 1 = 161$ (pouce), en revenant vers l'arrière de 8, pour 153 et trouver alors que **152** est donné par l'**index**.
- pour 3 251, parmi les multiples de 8 augmentés de 1 proches de 3 251, il y a par exemple $3\ 201 = (8 \times 400) + 1$, à 50 de la cible. Pour retrouver encore le pouce il faut ajouter encore un multiple de 8, dans ce cas 48 pour arriver à 3249, et la différence de 2 fait passer du pouce au **majeur**.

Ou : par une procédure plus générale, ayant déterminé que les multiples de 8 augmentés de 1 sont sur le pouce, diviser 152 et 3 251 par 8 et, en fonction des restes, trouver le doigt correspondant.

Ou : construire un tableau, comme le suivant par exemple, pour découvrir les régularités dans la correspondance doigt-nombre, en s'intéressant aux différentes colonnes :

POUCE	INDEX	MAJEUR	ANNULAIRE	AURICULAIRE
1	2	3	4	5
	8	7	6	
9	10	11	12	13
	16	15	14	
17	18	19	20	21
	24	23	22	
25	26	27	28	29
	32	31	30	

dans la colonne de l'index et de l'annulaire, les nombres sont pairs (et les multiples de 8 sont tous sur l'index), alors qu'ils sont impairs dans les autres, dans la colonne du pouce apparaissent les multiples de 8 augmentés de 1 (c'est-à-dire les nombres qui, divisés par 8, donnent un reste de 1) ; et l'on retrouve les considérations faites précédemment : en divisant 152 par 8, le reste est 0, et ce nombre est donc un multiple de 8 de la colonne de l'**index**, en divisant 3 251 par 8, le reste est 3, par conséquent 3 251 est dans la colonne du **majeur**.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte pour les deux associations (152 - index, 3 251 - majeur) avec explications complètes (description de la procédure ou détails à partir d'un tableau, ...)
- 3 Réponses correctes avec explications peu claires ou seulement la seconde réponse (3 251 - majeur) avec explications claires
- 2 Les deux réponses correctes sans aucune explication ni détail ou seulement la première réponse avec explications claires
- 1 Réponse correcte seulement pour la première question sans explication ou début de recherche correcte
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.12

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd228-fr&flag=1&langue=fr&w=0

14. DRÔLE DE MULTIPLICATION (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Dany a reçu de sa cousine une drôle de devinette ! Il s'agit de reconstruire la multiplication « mystérieuse » de cette figure en sachant que les seuls chiffres qu'il peut écrire dans les cases sont 2, 3, 5 et 7.

Dany trouve cette devinette trop difficile, mais sa cousine l'encourage et lui dit qu'il n'y a qu'une manière de disposer les chiffres.

Reconstruisez la multiplication

Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \quad \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \square
 \end{array}$$

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Compléter une multiplication en colonne de deux nombres de 2 et 3 chiffres en utilisant exclusivement les chiffres 2, 3, 5, et 7.

Analyse de la tâche

- Vérifier d'abord systématiquement les produits des unités et constater que seuls cinq couples sont possibles (3 ; 5), (5 ; 3), (5 ; 5), (5 ; 7), (7 ; 5). Les autres couples conduisent en effet à un chiffre des unités dans le premier produit qui n'est pas sur la liste autorisée, comme : $7 \times 3 = 21$ donnerait 1 au chiffre des unités.
- Choisir un couple (3 ; 5) par exemple, et continuer par la recherche du chiffre des dizaines du premier facteur. Dans cet exemple, il y a une retenue de 1 et le produit de 5 par chacun des autres chiffres autorisés, plus la retenue de 1, donne 6 ou 1 et ne convient donc pas ! (fig. 1)
- Essayer ensuite (5 ; 3). Le chiffre des dizaines du premier facteur ne peut être que 7 selon le raisonnement précédent et qui conduit à 2 comme chiffre des dizaines du premier produit partiel. (fig. 2) Le chiffre des centaines du premier facteur est aussi 7, ce qui donne 2 et 3 pour les deux premiers chiffres du premier produit partiel. (fig. 3).
- Pour les mêmes raisons, le chiffre des dizaines du deuxième facteur ne peut être que 3. (fig. 4)
- Vérifier enfin que le résultat ne contient que les chiffres 2 ; 3 ; 5 ou 7, ce qui donne la solution. (fig. 5)

$$\begin{array}{r}
 \dots \dots 3 \\
 \times \quad \dots 5 \\
 \hline
 \dots \dots \dots 5
 \end{array}$$

fig. 1

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad 7 \ 5 \\
 \times \quad \dots 3 \\
 \hline
 \quad \quad 2 \ 5
 \end{array}$$

fig. 2

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad 7 \ 7 \ 5 \\
 \times \quad \dots 3 \\
 \hline
 \quad 2 \ 3 \ 2 \ 5
 \end{array}$$

fig. 3

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad 7 \ 7 \ 5 \\
 \times \quad 3 \ 3 \\
 \hline
 \quad 2 \ 3 \ 2 \ 5
 \end{array}$$

fig. 4

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad 7 \ 7 \ 5 \\
 \times \quad \quad 3 \ 3 \\
 \hline
 \quad 2 \ 3 \ 2 \ 5
 \end{array}$$

fig. 5

$$\begin{array}{r}
 \dots \dots \dots \dots \\
 \times \quad \dots \dots \dots 5 \\
 \hline
 \dots \dots \dots \dots 5
 \end{array}$$

- Comme l'énoncé dit qu'il n'y a qu'une solution, il n'est plus nécessaire de vérifier les couples (5 ; 7), (7 ; 5) et (5 ; 5) de la liste initiale. Mais si on essaye l'un de ces trois couples avant (5 ; 3), on aboutit dans chaque cas à une impasse : rapidement avec (7 ; 5) en raison du reste de 3 qui ferait apparaître un 8 dans les dizaines du premier quotient partiel, un peu plus loin pour le cas du couple (5 ; 7) ; lors de l'addition finale pour le couple (5 ; 5) car les produits partiels peuvent être $5 \times 555 = 2775$ mais le produit final contient deux chiffres non autorisés : $55 \times 555 = 30525$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte avec explication de la démarche (étapes intermédiaires, impasses ...)
- 3 Réponse correcte avec explication partielle ou confuse
- 2 Réponse correcte sans aucune explication
- 1 Début de recherche correct, avec au moins un couple possible pour les unités
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.15

15. LE TROC (Cat. 7, 8, 9, 10)

Sur la petite île de Bellemer les enfants de la région récoltent des coquillages qu'ils échangent au kiosque de la plage.

Voici les tarifs pour cinq objets demandés par les enfants :

- 36 coquillages pour une glace,
- 40 coquillages pour un sandwich,
- 24 coquillages pour un jus de fruit,
- 100 coquillages pour un masque de plongée,
- 60 coquillages pour un cerf-volant.

Les enfants peuvent aussi échanger les oursins qu'ils prennent sous l'eau dans les rochers pour obtenir les cinq objets précédents. Voici les tarifs :

- 45 oursins pour l'un des cinq objets,
- 27 oursins pour un autre objet,
- 75 oursins pour un autre objet encore.

Combien faudra-t-il d'oursins pour chacun des deux autres objets qui restent ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Faire correspondre les termes de deux suites proportionnelles (dans le désordre) 24, 36, 40, 60, 100 et 27, 45, 75 et calculer les correspondants des 4e et 5e termes de la première, dans un contexte d'échanges.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les « prix » des objets peuvent s'exprimer en coquillages et en oursins et qu'il s'agit de découvrir la règle d'échanges « coquillages – oursins » à partir des données.

- Ordonner les deux séries de prix 24 36 40 60 100 et 27 45 75 et imaginer lesquels peuvent être en correspondance et où se situent les deux prix manquants « ? » :

24	36	40	60	100	ou	24	36	40	60	100	ou	24	36	40	60	100	etc.
27	?	45	75	?	ou	27	45	?	75	?	ou	?	?	27	45	75	

- Déterminer quelle est la bonne association en cherchant une règle « plausible » : il faut éliminer les différences et penser aux propriétés de la proportionnalité intuitives ou explicites. Parmi celles-ci il y a la règle du « produit » (le passage au double ou au triple ... dans une des suites doit être reproduit dans l'autre), la règle de « la somme » (si un nombre d'une suite est la somme de deux autres, on doit avoir la même correspondance dans l'autre suite) ou la propriété du « rapport » de proportionnalité (qui doit être le même pour chaque couple de nombres correspondants).

(Avec ces données, la règle du « produit » n'est pas applicable, celle de la « somme » peut servir à la vérification. Le fait que les nombres de la première suite sont des multiples de 4 et ceux de la seconde des multiples de 3 peut aider à faire apparaître le rapport 3/4)

Ou essayer d'estimer puis calculer des rapports entre deux nombres supposés correspondants et de vérifier avec les autres. Par exemple le rapport 27/24 se retrouve en 45/40 mais ne convient pas pour 75/60 ni 75/100, ce qui peut conduire à la conclusion que les nombres de la deuxième suite sont plus petits que ceux de la première. Le rapport 75/100 est facilement repérable (3/4), se retrouve dans 45/60 et dans 27/36.

- Lorsque les correspondances sont déterminées :

24	36	40	60	100
?	27	?	45	75

les deux prix manquants, en « oursins » se calculent à l'aide du rapport 3/4 ou de la règle de la « somme » :

$3/4 \times 40 = 30$, $3/4 \times 24 = 18$ ou $40 + 60 = 100 \Rightarrow ? + 45 = 75$, $24 + 36 = 60 \Rightarrow ? + 27 = 45$,

ce qui conduit aux 18 et 30 oursins pour les deux objets manquants, le jus de fruit et le sandwich.

Attribution des points

- 4 Réponse « 18 et 30 oursins » avec la manière dont ces nombres ont été trouvés ou avec une vérification des rapports ou de la règle de la somme en précisant que 18 et 30 oursins correspondent respectivement à 24 et 40 coquillages.
- 3 Réponse « 18 et 30 oursins » avec explications incomplètes
- 2 Un des deux prix « 18 ou 30 oursins » avec explication ou vérification ou réponse « 18 et 30 oursins » sans aucune explication

ou raisonnement correct explicite avec une erreur de calcul

1 Début de recherche, les deux suites ordonnées avec les correspondances, mais sans trouver les prix du jus de fruit et du sandwich

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 15.II.15

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=pr4-fr&flag=1&langue=fr&w=0

16. D'UN ENCLOS À L'AUTRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Avec 60 mètres de clôture, Monsieur Pasteur a construit un enclos à moutons de forme rectangulaire ; les mesures des côtés sont des nombres entiers de mètres. Comme il vient d'acquérir d'autres moutons, Monsieur Pasteur a acheté 6 mètres supplémentaires de clôture et avec les 60 mètres de son ancienne clôture, il construit un nouvel enclos rectangulaire. Il remarque qu'une des dimensions du nouveau rectangle a 6 mètres de plus que l'ancienne et que l'autre dimension a diminué de 3 mètres, alors que l'aire de l'enclos a augmenté de 90 m².

Quelles étaient les mesures des côtés du premier enclos rectangulaire ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Calculer les dimensions $a \times b$ (a et b entiers) d'un rectangle de 60 m de périmètre sachant qu'un rectangle de périmètre 66 m et de dimension $(a+6) \times (b-3)$ a une aire supérieure de 90 m².

Analyse de la tâche

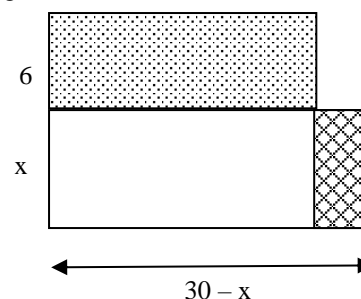
- Remarquer que le demi périmètre du rectangle initial mesure 30 m.
- Procéder par essais organisés à partir de la décomposition de 30 en somme de deux nombres entiers positifs et, par exemple, les noter à l'aide d'un tableau du genre :

côtés du 1 ^e rectangle	côtés du 2 ^e rectangle	aire du premier	aire du deuxième	différence d'aire
15 et 15	12 et 21	225	252	27
16 et 14	13 et 20	224	260	36
17 et 13	14 et 19	221	266	45
...
21 et 9	18 et 15	189	270	81
22 et 8	19 et 14	176	266	90
	23 et 7	20 et 13	161	260

- Conclure que 22 m et 8 m sont les longueurs des côtés du premier rectangle.

Ou :procéder algébriquement à partir d'un dessin qui montre le « passage » du premier au deuxième rectangle.

En désignant par x et y les mesures d'un des côtés du rectangle initial, écrire l'équation : $(x + 6)(y - 3) = 90 + xy$, d'où $2y - x = 36$. Remarquer que $x + y = 30$ (demi périmètre). Par addition, en déduire $3y = 66$, d'où $y = 22$ et $x = 8$

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (8 m et 22 m) avec explication claire de la procédure
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires
- 2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte mais avec erreur de calcul
- 1 Essais ou raisonnement qui témoignent d'une compréhension initiale du problème
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.14

17. PILE OU FACE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Quatre pièces de monnaie sont posées sur la table de Julien : une pièce de 20 centimes, une de 50 centimes, une pièce de 1 euro et une de 2 euros.

En associant à chaque pièce sa face visible, Julien observe que les quatre pièces forment la configuration suivante : (20 centimes, pile) ; (50 centimes, face) ; (1 euro, face) ; (2 euros, pile).

Julien, avec ces quatre pièces, invente un jeu de « pile ou face » : il lance les 4 pièces ensemble, note la configuration obtenue et recommence jusqu'à ce qu'il obtienne deux fois la même configuration.

Combien de fois Julien doit-il lancer les quatre pièces ensemble pour être certain d'obtenir deux fois la même configuration ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de suites binaires de 4 éléments.

Analyse de la tâche

- Chercher combien on peut faire de configurations différentes : 2 faces possibles pour chacune des pièces, d'où $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ configurations différentes possibles, du genre :
(20 cent., face) ; (50 cent., pile) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face)
(20 cent., pile) ; (50 cent., pile) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face)
(20 cent., face) ; (50 cent., face) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face) ...
ou plus systématiquement, en ordonnant les pièces de 20 cent. 50 cent. 1 euro, 2 euros :
ffff, fffp, ffpf, ffpp fppf, fpfp, fppf, fppp pfff, pffp, pfpf, pfpp ppff, ppfp, pppf, pppp
ou encore en déterminant toutes ces permutations à l'aide d'un schéma en arbre.
- Comprendre qu'une configuration supplémentaire sera certainement une des 16 précédentes.
- Conclure par le principe des tiroirs qu'avec 17 lancers, Julien peut être certain d'avoir obtenu deux configurations identiques.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (17 lancers) avec explications claires
- 3 Réponse correcte (17) avec explications incomplètes ou confuses
- 2 Réponse correcte (17), sans explication
ou réponse « 16 » (correspondant au nombre des combinaisons, sans tenir compte de « deux fois la même » avec justification
- 1 Début cohérent de recherche
- 0 incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 14.F.16

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd231-fr&flag=1&langue=fr&w=0

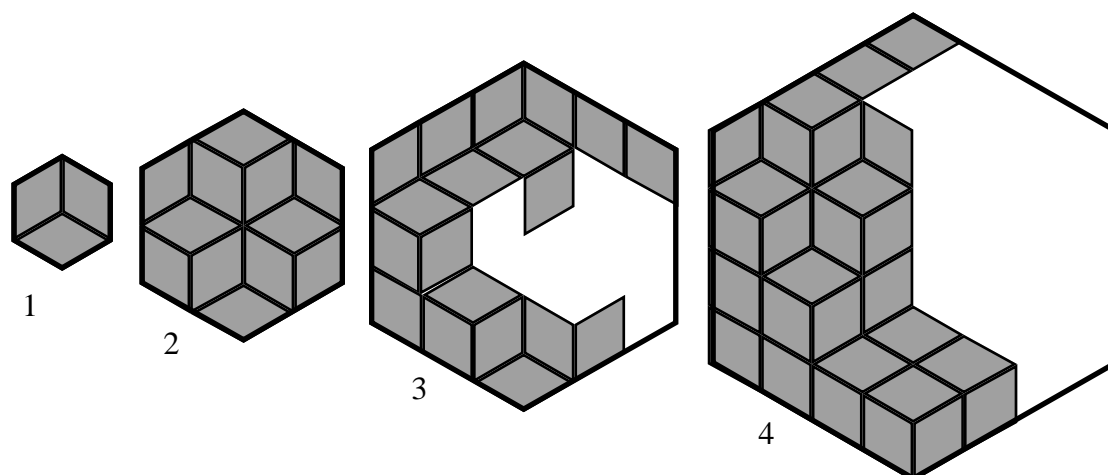
18. LES HEXAGONES DE RENÉ (Cat. 8, 9, 10)

René a un jeu de pavés constitué de très nombreux losanges égaux avec deux angles de 60 degrés.

Avec ses pièces René construit des hexagones réguliers.

Pour construire l'hexagone le plus petit (de taille 1), il utilise trois losanges. Pour construire le suivant (de taille 2), il en utilise 12. Ainsi de suite ...

Sur cette figure, on voit les hexagones de tailles 1 et 2 complétés dans une certaine disposition des losanges, ainsi que le début de la construction des hexagones de tailles 3 et 4.



Combien de losanges René utilisera-t-il pour construire l'hexagone de taille 12 ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de losanges nécessaires pour construire un hexagone de côté 12 fois celui d'une losange.

Analyse de la tâche

- Comprendre que si on prend comme unité de longueur un côté d'un losange, les longueurs des côtés des hexagones successifs sont 1, 2, 3, 4, ... et correspondent « aux tailles ». Prendre un losange comme unité d'aire.
- Se rendre compte que, quelle que soit la disposition des losanges, le nombre de losanges ne change pas pour un hexagone d'une taille donnée, car son aire est donnée.
- Compléter les hexagones de tailles 3 et 4 et compter leurs losanges : 27 et 48.
- Examiner la suite des nombres de losanges : 3, 12, 27, 48, ... et chercher une règle de passage d'un terme au suivant par conjectures et vérifications. Par exemple, la multiplication par 4 qui permet de passer de 3 à 12 ne convient plus pour le passage de 12 à 27.

Le calcul des différences d'un nombre au suivant fait en revanche apparaître une régularité intéressante : une augmentation du nombre de losanges, de 6 en 6, d'une taille à la suivante :

« tailles » :	1	2	3	4	---
suite des nombre :	3	12	27	48	---
différences		9	15	21

ce qui permet de conjecturer que de $12 = 3 + 3 + 1 \times 6$; $27 = 12 + 3 + 2 \times 6$; $48 = 27 + 3 + 3 \times 6$ et que le terme suivant pourrait être $75 = 48 + 3 + 4 \times 6$.

- Se rendre compte alors qu'il est nécessaire de vérifier cette conjecture sur l'hexagone de taille 5, puis de taille 6, en dessinant les figures correspondantes ou en « prolongeant » celle de taille 4, ... (cette vérification nécessite toutefois des dessins précis, à la règle pour pouvoir y marquer les losanges et les dénombrer).

La conjecture vérifiée sur quelques exemples, elle peut être utilisée pour arriver à l'hexagone de taille 12, par le calcul de tous les termes successifs : $108 = 75 + 3 + 5 \times 6$; 147 ; 192 ; 243 ; 300 ; 363 ; **432**

Ou : trouver d'autres régularités dans les différences successives qui sont des produits des nombres impairs multipliés par 3. ($9 = 3 \times 3$, $15 = 5 \times 3$, $21 = 7 \times 3$, $27 = 9 \times 3$, ...)

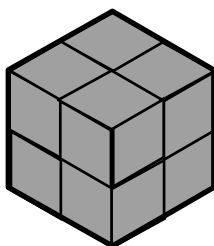
Ou : factoriser les nombres de la suite en fonction de la taille de l'hexagone :

taille	1	2	3	4	5	...
nb. losanges	$3 = 3 \times 1$	$12 = 3 \times 2 \times 2$	$27 = 3 \times 3 \times 3$	$48 = 3 \times 4 \times 4$	$75 = 3 \times 5 \times 5$...

On arrive ainsi au lien « fonctionnel » entre la taille (n) de l'hexagone et le nombre de losanges $n \rightarrow 3 \times n^2$, ce qui conduit, pour $n = 12$ à $3 \times 12^2 = 3 \times 144 = 432$, sans passer par les termes successifs.

Remarque : ce lien est « naturel » pour les élèves qui savent qu'en doublant les dimensions de l'hexagone de taille 1 (ou de toute autre figure), on multiplie son aire par $4 = 2^2$; en les triplant on multiplie son aire par $9 = 3^2$; en les multipliant par 12, on multiplie l'aire par 12^2 .

Ou : faire un remplissage « régulier » de l'hexagone (où tous les losanges de même orientation sont regroupés) conduisant à la représentation d'un cube en perspective cavalière : le cube présente 3 faces identiques, pavées par $n \times n$ losanges, d'où le nombre $3n^2$ et la réponse $3 \times 12^2 = 432$.



Attribution des points

- 4 Réponse correcte (432) avec une justification complète (dessin des premières boîtes, utilisation d'une série et validation sur le 5^e hexagone au moins, lien fonctionnel, ...)
- 3 Réponse correcte (432) avec explications incomplètes
ou réponse erronée suite à une erreur de calcul avec explications complètes
- 2 Réponse correcte obtenue sans explications
ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou de comptage avec explications incomplètes
- 1 Réponse erronée mais début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 15.F.16

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=sd153-fr&flag=1&langue=fr&w=0

19. À LA RECHERCHE DU CARRÉ (Cat. 8, 9, 10)

Voici le début d'un tableau dans lequel on a écrit, dans l'ordre, les nombres entiers à partir de 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59	60	...				

Sur ce tableau, on déplace un cadre carré qui entoure neuf nombres, disposés sur trois colonnes et trois lignes. Le cadre entoure ici des nombres des 2^e, 3^e et 4^e lignes et des 6^e, 7^e, 8^e colonnes.

La somme des neuf nombres de ce carré est 297.

Peut-on placer le cadre pour que la somme des neuf nombres qu'il entoure soit 900 ?

Et 1 062 ?

Si oui, indiquez la position du cadre et expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si non, indiquez pourquoi ce n'est pas possible.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Les nombres entiers (supérieurs à 0) sont énumérés horizontalement dans un tableau de 13 colonnes. Vérifier si l'on peut découper dans ce tableau deux "carrés" de 3 x 3 nombres dont les sommes valent respectivement 900 et 1062.

Analyse de la tâche

- Vérifier que la somme des neuf nombres inclus dans le cadre de la figure est 297, puis observer que, lorsqu'on le déplace, la somme de ces nombres varie.
- Calculer la somme dans d'autres positions pour comprendre comment elle varie. En organisant ces calculs de manière systématique on constate que la somme des 9 premiers nombres encadrés est 135 puis, par déplacements successifs du cadre vers la droite d'une colonne à la fois, cette somme devient 144 puis 153, 162, ... 225 (progression arithmétique de raison 9).

Verticalement, les déplacements successifs du cadre d'une ligne à la fois font apparaître des différences de 117 (39 x 3 ou 13 x 9 selon la manière de compter) : 135, 252, 369, ...

En combinant ces déplacements verticaux avec des déplacements horizontaux on peut arriver à 900 (sans même constater que les sommes sont des multiples de 9).

Ou, après avoir effectué plusieurs vérifications, constater que la somme des 9 nombres vaut 9 fois le nombre du centre ou que le nombre du centre est la moyenne des 9 nombres. Il suffit alors de rechercher 100 pour le cadre de somme 900 et 118 (1062 : 9) pour le cadre de somme 1 062.

Les nombres centraux étant connus, il faut déterminer leur position dans le tableau, pour pouvoir répondre à la demande de l'énoncé et, simultanément, vérifier qu'ils ne sont pas sur la première ou la dernière colonne (parce que dans chacun de ces deux cas, il ne serait pas possible de placer le cadre). Lorsqu'on a compris l'importance des deux nombres 9 et 13 dans cette situation (tableau de lignes de 13 nombres, cadres de 9 nombres), une méthode possible est de se référer au reste et au quotient d'une division euclidienne par 13 pour situer le centre :

$100 = 7 \times 13 + 9$ se situe sur la 8^e ligne et sur la colonne « 9 »,

$118 = 9 \times 13 + 1$ se situe sur la 10^e ligne et sur la colonne « 1 ».

- Conclure que la somme de 900 s'obtient avec le cadre sur les lignes 7, 8, 9 sur les colonnes 8, 9, 10, et qu'il n'est pas possible d'obtenir une somme de 1 062 car 118 est sur la première colonne et un cadre centré sur 118 n'entourerait pas 9 nombres.

Ou bien

observer que les nombres présents sur chaque colonne sont en progression arithmétique de raison 13 puisque sur chaque ligne il y a 13 nombres consécutifs. Dans un cadre de 3×3 , comme celui de la figure, si n désigne le nombre en haut à gauche, les deux autres sur la même ligne sont $n + 1$ et $n + 2$. Dans la ligne suivante, les nombres du cadre sont $n + 13$, $(n + 1) + 13$, $(n + 2) + 13$ et dans la troisième, ces nombres sont : $n + 26$, $(n + 1) + 26$, $(n + 2) + 26$. Par conséquent leur somme est égale à $9n + 126$.

- Pour la première question, on obtient donc $9n + 126 = 900$ d'où $n = (900 - 126) / 9 = 86$. Puisque les nombres qui apparaissent dans le tableau dans la dernière colonne à droite sont 65, 78, 91, 104...

correspondant à la cinquième, sixième, septième, huitième... ligne respectivement, on en déduit que 86 se trouve dans la septième ligne et sur la huitième colonne et donc le cadre doit être situé sur les lignes 7, 8, 9 et sur les colonnes 8, 9, 10.

- Pour la deuxième question, on devrait avoir $9n + 126 = 1\,062$ d'où $n = 104$; or 104 se trouve sur la colonne de droite du tableau, il n'est donc pas possible dans ce cas de placer le cadre.

Ou bien

comprendre que :

La somme des neuf nombres entourés par un cadre carré peut être obtenue par le triple de la somme des 3 nombres situés sur trois lignes consécutives ;

Chacune de ces sommes de 3 nombres situés sur trois lignes consécutives est le triple du nombre central ;

En passant de la première à la seconde ligne et de la seconde à la troisième ligne, le nombre central de la première ligne est augmenté de 13 puis de 26 respectivement.

Faire alors quelques essais pour obtenir la somme 900. Par exemple avec le nombre 68 considéré comme nombre central du premier triplet, on aura : $3 \times 68 + 3 \times (68 + 13) + 3 \times (68 + 26) = 204 + 243 + 282 = 729$ comme somme des neuf nombres de ce cadre : trop faible. On essaie ensuite 93 et on obtient $279 + 318 + 357 = 954$, trop fort.

Avec des essais mieux ajustés, on arrive à 87 qui donne $261 + 300 + 339 = 900$.

Contrôler ensuite que le cadre avec le nombre 87 dans la position centrale du premier triplet peut être placé dans le tableau, constater que c'est possible et que ce cadre est formé des nombres qui se trouvent sur les lignes 7, 8, 9 et sur les colonnes 8, 9, 10.

Par la même procédure, constater que 1 062 peut être obtenu avec le nombre 105 (en effectuant $3 \times 105 + 3 \times (105 + 13) + 3 \times (105 + 26) = 315 + 354 + 393 = 1062$), mais ce nombre se trouve à la fin de la dixième ligne du tableau, il n'est ainsi pas possible de placer le cadre correspondant.

Attribution des points

- 4 Les deux réponses (oui pour 900, lignes 7, 8, 9 colonnes 8, 9, 10, impossible pour 1 062), avec des explications montrant que les réponses ne sont pas obtenues au hasard
- 3 Les deux réponses correctes avec des explications insuffisantes ou une petite erreur de position pour la première
- 2 Une seule réponse correcte et bien expliquée
ou bien un raisonnement correct dans les deux cas déterminant les nombres des éventuels cadres, mais sans vérification de leur existence dans le tableau considéré
- 1 Une seule réponse correcte mais sans explications
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Banque de problèmes de l'ARMT 19.II.17

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=al7-fr&flag=1&langue=fr&w=0