∽ Techniciens supérieurs de l'aviation 2013 ∾

Techniciens supérieurs des études et de l'exploitation de l'aviation civile

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE

QUESTIONS LIÉES

1 à 7
8 à 11
13 à 19
20 à 25

PARTIE I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-5\ ;\ 5]$ par $f(x) = x(x+1)\mathrm{e}^{-2x}$, e désignant le nombre de Neper.
Soient α un nombre réel strictement compris entre 0 et 1/2 et β un nombre réel strictement compris entre -2 et -1.

Question 1 : La fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout x appartenant à l'ensemble I par

A. $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$
B. $f'(x) = -2(2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$
C. $f'(x) = \left(-2x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x}$
D. $f'(x) = \left(x^2+3x+1\right)\mathrm{e}^{-2x}$

Question 2 : La fonction dérivée f' de la fonction f a pour valeur, au point $x = 0$

A. $f'(0) = 0$
B. $f'(0) = 1$
C. $f'(0) = -2$
D. $f'(0) = -1$

Question 3 : On note C_f la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé. On a

A. C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{-1}{\sqrt{2}}$
B. C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$
C. C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$
D. C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1

Question 4 : La fonction f est

A. croissante sur $[0\,;5]$
B. décroissante sur $[-5\,;0]$
C. croissante sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur les intervalles $\left[-5\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 5\right]$
D. décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et croissante sur les intervalles $\left[-5\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 5\right]$

Question 5 : On en déduit que

A. $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ car la fonction f est croissante sur l'intervalle I
B. $f(-2) > f(\alpha) > 0$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[-5\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$
C. $f(0) > f(\alpha) > 3\mathrm{e}^{-1}$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

D. $f(0) < f(\alpha) < 3/4\text{e}$ car la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Question 6 :

On établit que l'équation $f(x) = 0$

A. n'admet pas de solution sur l'intervalle $[\alpha\,;\,5]$
B. n'admet pas de solution sur l'intervalle $[\beta\,;\,5]$
C. admet deux solutions sur l'intervalle $[\beta\,;\,\alpha]$
D. n'admet qu'une solution sur l'intervalle $[\beta\,;\,\alpha]$

Question 7 : On montre que la fonction f

A. admet un maximum au point d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
B. admet un minimum au point d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
C. admet un minimum au point d'abscisse $x = \frac{1}{\sqrt{2}}M$
D. admet un minimum au point d'abscisse $x = 0$

PARTIE II

Un organisme de jeu va récompenser un heureux gagnant. Celui-ci doit faire le choix entre les deux propositions suivantes pour lesquelles il s'agit à chaque fois d'une somme d'argent versée annuellement, et ceci à partir de l'année 2012 et pendant 10 ans. Le bénéfice du jeu se terminera par conséquent en 2021, et le gagnant touchera alors le dernier versement. S'il choisit la proposition A, il touchera 30 000 euros en 2012, puis chaque année, la somme versée augmentera de 5 % par rapport à l'année précédente.
En choisissant la proposition B, 30 000 euros lui seront versés en 2012, puis chaque année, la somme versée sera augmentée de 1 750 euros par rapport à l'année précédente.
Pour l'aider à choisir la solution la plus avantageuse, on note a_n la somme, en euros, versée pendant l'année $2012+n$ s'il choisit la proposition A et b_n la somme, en euros, versée pendant l'année $2012+n$ s'il choisit la proposition B.

Question 8 : On a

A. $a_0 = bo = 30\,000$
B. $a_1 = b_1 = 30\,000$
C. a_9 et b_9 correspondent aux sommes versées en 2020
D. a_9 et b_9 et correspondent aux sommes versées en 2021

Question 9 : On établit que

A. $a_{n+1} = 0,95a_n$ pour tout n entier naturel
B. $a_{n+1} = a_n + 0,05$ pour tout n entier naturel
C. $b_{n+1} = b_n + 0,05b_n$ pour tout n entier naturel
D. $b_{n+1} = 1\,750b_n$ pour tout n entier naturel

Question 10 : On en déduit que

A. la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $1,05$ et de premier terme 80-30000
B. la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $1,05$ et de premier terme 80-30000
C. la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 750 et de premier terme $a_0 = 30\,000$
D. la suite (a_n) est une suite géométrique de raison 1 750et de premier terme $b_0 = 30\,000$

Question 11 : On a

A. $a_n \leqslant b_n$ pour tout n entier naturel
B. $b_n \leqslant a_n$ pour tout n entier naturel
C. $an < b_n$, pour tout n entier naturel non nul
D. $a_9 > b_9$

PARTIE III

Le concombre est composé de masse solide et d'eau. Un concombre de 300 grammes est cueilli à 98 % d'eau. Après transport, à la livraison, il ne contient plus que 97 % d'eau.

Question 12 : La masse de ce concombre à la livraison est

A. 200 grammes
B. 300 grammes
C. 6 grammes
D. 9 grammes

PARTIE IV

Une année scolaire donnée, on compte 300 000 étudiants dans l'enseignement supérieur en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) ou en section de techniciens supérieurs (STS).
Parmi l'ensemble de ces étudiants, on compte 180 000 garçons.
25 % des garçons sont en CPGE
80 % des filles sont en STS
On choisit un de ces étudiants au hasard et on suppose que chaque étudiant a la même probabilité d'être choisi. On définit les évènements suivants :
A : « l'élève choisi est en CPGE »
G : « l'élève choisi est un garçon »
On note respectivement $\overline{A}$ et $F = \overline{G}$ les évènements contraires des évènements A et G.

Question 13 : On en déduit que

A. seuls 45 000 élèves sont en CPGE
B. moins de 70 000 élèves sont en CPGE
C. moins de 60 000 élèves sont en CPGE
D. plus de 70 000 élèves sont en CPGE

Question 14 : La probabilité de l'évènement

A. G vaut $P(G) = \dfrac{3}{5}$
B. G vaut $P(G) = \dfrac{1}{6}$
C. $\overline{G}$ vaut $P\left(\overline{G}\right) = 1 - P(G) = \dfrac{5}{6}$
D. $\overline{G}$ vaut $P\left(\overline{G}\right) = \dfrac{2}{3}$

Question 15 : L'évènement

A. $A \cap G$ représente l'évènement « l'élève choisi est un garçon ou est en CPGE »
B. $A \cap G$ représente l'évènement « l'élève choisi est un garçon et est en CPGE »
C. $A \cup G$ représente l'évènement « l'élève choisi est un garçon et est en CPGE »
D. $A \cup G$ représente l'évènement « l'élève choisi est un garçon ou est en CPGE »

Question 16 : La probabilité que l'élève choisi soit un garçon en CPGE est égale à

A. $p(G \cap A) = P(G)P_G(A) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$
B. $p(G \cap A) = P(G)/P_G(A) = \dfrac{3}{5} / \dfrac{1}{4} = \dfrac{12}{5}$
C. $P_G(A) = \dfrac{1}{4}$

D. $P_A(G) = \dfrac{1}{5}$

Question 17 : La probabilité que l'élève choisi soit une fille en CPGE est égale à

A. $p(F \cap A) = 1 - p(G \cap A) = 1 - P(G)P_G(A) = 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$
B. $P(F \cup A) = 1 - p(G \cap A) = 1 - P(G)P_G(A) = 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$
C. $1 - P_G(A) = \dfrac{3}{4}$
D. $P_F(A) = \dfrac{1}{5}$

Question 18 : La probabilité que l'élève choisi soit en CPGE est égale à

A. $P(A) = P(G \cup A) + P(F \cup A)$ d'après le théorème des probabilités totales
B. $P(A = P(G \cap A) + P(F \cap A)$ d'après le théorème des probabilités totales
C. $P(A = \dfrac{3}{20} + \dfrac{2}{25} = 0,23$
D. $P(A) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{20} = 0,45$

Question 19 : On en déduit que

A. $P_A(G) = p(G \cap A)/P(A) = \dfrac{15}{23}$
B. $P_A(G) = p(G \cap A)P(A) = \dfrac{69}{2\,000}$
C. $P_{\overline{A}}(F) = P\left(F \cap \overline{A}\right)/(1 - P(A)) = \dfrac{32}{77}$
D. $P_{\overline{A}}(F) = 1 - P_A(G) = 1 - (\dfrac{15}{23}) = \dfrac{8}{23}$

PARTIE V

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\mathrm{J} = \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 8\right]$ par

$$g(x) = 2x - 3 - 4\ln(x),$$

ln désignant la fonction logarithme.
On note C_g sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Question 20 : La fonction dérivée g' de la fonction g est définie pour tout x appartenant à l'intervalle J par

A. $g'(x) = 2 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}$
B. $g'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x}$.
C. $g'(x) = 2(1 - 2x)$
D. $g'(x) = -\dfrac{(x+4)}{x}$

Question 21 : La fonction dérivée g' de la fonction g

A. ne s'annule pas sur J
B. s'annule en 2 points de l'intervalle J
C. s'annule au point d'abscisse $x = \dfrac{1}{2}$
D. s'annule au point d'abscisse $x = 2$

Question 22 : La fonction g est

A. croissante sur J
B. décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~2\right]$ et croissante sur l'intervalle $[2~;~8]$
C. croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~2\right]$ et décroissante sur l'intervalle $[2~;~8]$
D. décroissante sur J

Question 23 : Supposant que e $\approx 2,718$ on en déduit que

A. $g(1) > g(2) > 0$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[(1/2)~;~2]$
B. $g(1) < g(2) < 0$ car la fonction g est croissante sur l'intervalle $[(1/2)~;~2]$
C. $g\left(\text{e}^2\right) > 0 > g(1) > g(2)$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[(1/2)~;~2]$ et croissante sur l'intervalle $[2~;~8]$
D. $g(\text{e}) > 0 > g(1) > g(2)$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[(1/2)~;~2]$ et croissante sur l'intervalle $[2~;~8]$

Question 24 : On établit que l'équation $g(x) = 0$

A. n'admet qu'une solution sur l'intervalle $[2~;~8]$
B. n'admet pas de solution sur l'intervalle J
C. admet une solution sur l'intervalle $[1~;~2]$
D. admet deux solutions sur l'intervalle J

Question 25 : On montre que la courbe C_g

A. admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 2$ d'équation $y = 1 - 4\ln(2)$
B. admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 1$
C. admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = 1$
D. admet une tangente au point d'abscisse x=l définie par la droite d'équation $y = -2x + 1$

MATHÉMATIQUES & PHYSIQUE
(ÉPREUVE OBLIGATOIRE OPTIONNELLE)

Durée : 3 heures

PARTIE MATHEMATIQUES

QUESTIONS LIÉES

1 et 2

3 à 5

6 à 13

14 et 15

PARTIE I

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v},\,\overrightarrow{w}\right)$. On note (D) la droite passant par les points $\mathrm{A}(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $\mathrm{B}(3\,;\,-5\,;\,-2)$ et (D$'$) la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right.$ avec k réel

On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$

Question 1 : On montre que

A. la droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+3t \\ z & = & -1+t \end{array}\right.$ avec t réel

B. la droite (D) est dirigée par le vecteur de coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,1)$

C. les droites (D) et (D$'$) sont parallèles car elles ne sont pas sécantes

D. les droites (D) et (D$'$) ne sont pas coplanaires car elles ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun puisque le système $\left\{\begin{array}{lcl} 1+2t & = & 2-k \\ -2-3t & = & 1+2k \\ -1-t & = & k \end{array}\right.$ n'a pas de solution

Question 2 : On montre que

A. le plan (P) contient la droite (D)

B. le plan (P) contient la droite (D$'$)

C. le plan (P) et la droite (D$'$) se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(6\,;\,-7\,;\,-4)$

D. le plan (P) et la droite (D) se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(-7\,;\,10\,;\,3)$

PARTIE II

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1-\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2+\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

Question 3 : Le complexe z_{A} a

A. pour module $|z_{\mathrm{A}}| = 2$

B. pour module $|z_{\mathrm{A}}| = \sqrt{1+(\mathrm{i}^2} = 0$

C. pour argument $\arg(z_{\mathrm{A}}) = \dfrac{\pi}{4}$

D. pour argument $\arg(z_{\mathrm{A}}) = \dfrac{7\pi}{4}$

Question 4 : La forme algébrique du complexe $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$ s'écrit

A. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{1-\sqrt{3}+\text{i}\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$

B. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{-\left(1-\sqrt{3}+\text{i}\left(3-\sqrt{3}\right)\right)}{2}$

C. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{1+\sqrt{3}-\text{i}\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

D. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{1+\sqrt{3}+\text{i}\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

Question 5 : On en déduit que le complexe z_{B} a

A. pour module $|z_{\text{B}}| = 1+\sqrt{3}$
B. pour module $|z_{\text{B}}| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$
C. pour argument $\arg(z_{\text{B}}) = -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$
D. pour argument $\arg(z_{\text{B}}) = \dfrac{7\pi}{12}$

PARTIE III

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = \frac{\text{e}^{-nx}}{(1+\text{e}^{-x})}.$$

e désigne le nombre de Neper et ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé

Question 6 : La fonction f_0

A. a pour dérivée $f_0'(x) = \dfrac{-1}{\text{e}^{-x}}$ pour tout x réel
B. a pour dérivée $f_0'(x) = -\dfrac{\text{e}^{-x}}{(1+\text{e}^{-x})^2}$ pour tout x réel
C. est décroissante sur $\mathbb{R}$
D. est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et croissante sur l'intervalle $]O\,;\,+\infty[$

Question 7 : On établit que

A. la fonction f_0 a pour limite 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et 1 lorsque x tend vers $+\infty$
B. la fonction f_0 a pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$
C. la courbe C_0 admet pour asymptotes les droites d'équation $y=0$ et $y=1$
D. la courbe C_0 admet pour asymptotes horizontales les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

Question 8 : On montre que

A. $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel
B. $f_(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel
C. la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = f_0'(-x) > 0$ pour tout x réel
D. la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = -f_0'(x) < 0$ pour tout x réel

Question 9 : On établit que

A. les courbes C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel
B. les courbes C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel
C. les courbes C_0 et C_1 sont des droites parallèles

D. les courbes C_0 et C_1 ont un point commun de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

Question 10 : Pour tout n entier supérieur ou égal 2, la fonction f_n

A. n'admet pas de limite en $-\infty$
B. a pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$
C. a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et 0 lorsque x tend vers $-\infty$
D. a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Question 11 : Pour tout n entier supérieur ou égal 2, la fonction f_n

A. a pour dérivée $f_n'(x) = n\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout x réel
B. a pour dérivée $f_n'(x) = \dfrac{-\left(n\mathrm{e}^{-nx} + (n-1)\mathrm{e}^{(n-1)x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}\right)^2}$ pour tout x réel
C. est décroissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$
D. est croissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$

Pour tout entier naturel n, u_n représente l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Question 12 : La suite (u_n) vérifie

A. $u_1 = -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)}$ et $u_0 = 1 - u_1$
B. $u_1 = \ln(2) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)$ et $u_0 = 1 - \ln(2) + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)$
C. $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n entier naturel
D. $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ pour tout n entier naturel

Question 13 : La suite (u_n)

A. n'est pas convergente car elle est croissante non majorée
B. est convergente car elle est croissante et majorée
C. est convergente car elle est décroissante et minorée
D. a pour limite 0 car, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant u \leqslant \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right)}{n}$ terme général d'une suite qui converge vers 0

PARTIE IV

La durée de vie d'un téléphone portable (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), mesurée en années, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
Pour tout réel t positif, on note $p(X \leqslant t)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie inférieure à t années.
e désigne le nombre de Neper et ln la fonction logarithme népérien.

Question 14 : On suppose, dans cette question, que la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie strictement supérieure à 2 années est égale à e^{-2}, on a

A. $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout t réel positif
B. $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\lambda$ pour tout t réel positif
C. $\lambda = \ln\left(\mathrm{e}^2\right)/2 = 1$

D. $\lambda = \ln\left(\frac{\text{e}^2}{(\text{e}^2-1)}\right)/2$

Question 15 : Reprenant la valeur du paramètre λ de la question précédente, on note $p_{X>1}(X > 4)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie supérieure à 4 années sachant qu'il n'a pas eu de panne au cours de la première année. On a

A. l'espérance de X vaut $E(X) = \lambda = 1$

B. l'espérance de X vaut $E(X) = \displaystyle\int_0^t = \lambda.x\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x = 1/\lambda = 1$

C. $p_{X>1}(X > 4) = p(X > 4) = 1 - p(X \leqslant 4) = \text{e}^{-4}$

D. $p_{X>1}(X > 4) = p(X > 4)/p(X > 1) = (1 - p(X \leqslant 4))/(1 - p(X \leqslant 1)) = \text{e}^{-4}/\text{e}^{-1} = \text{e}^{-3}$.