

La géométrie du sacrifice en Inde védique : les *Sulbasutras*

Olivier Keller

Exposé à l'Université Ouverte,
Lyon, décembre 2008

Présenté en trois fichiers

Fichier 3

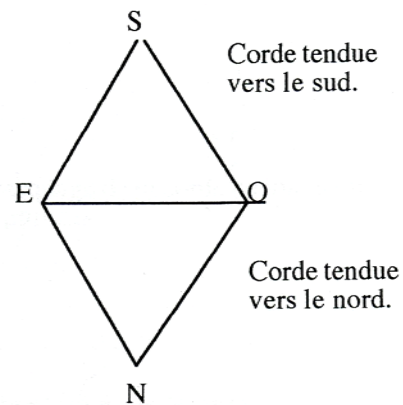
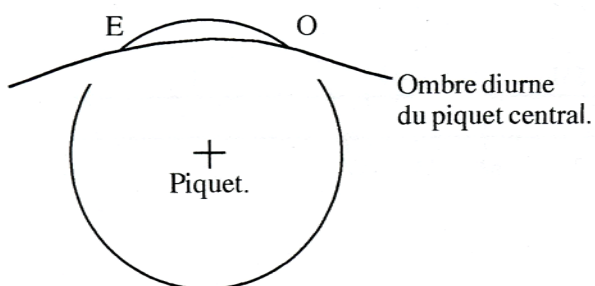
-VI-

LES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE VÉDIQUE

Il s'agit de détailler les savoir-faire sous-entendus dans les constructions diverses d'autels (voir paragraphe V), à savoir : construire un carré de côté donné, additionner et soustraire des carrés, transformer un rectangle en carré de même aire, transformer un cercle en carré de même aire et inversement.

Orientation

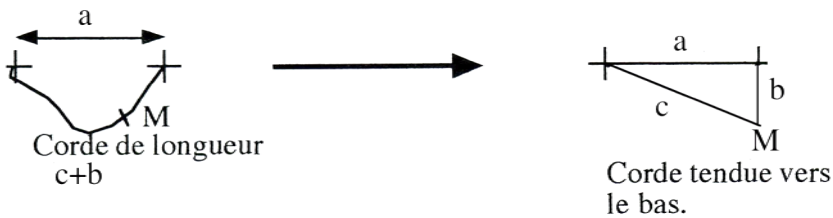
Tous les autels construits sont orientés. La première phase est donc la détermination des directions E-O et N-S



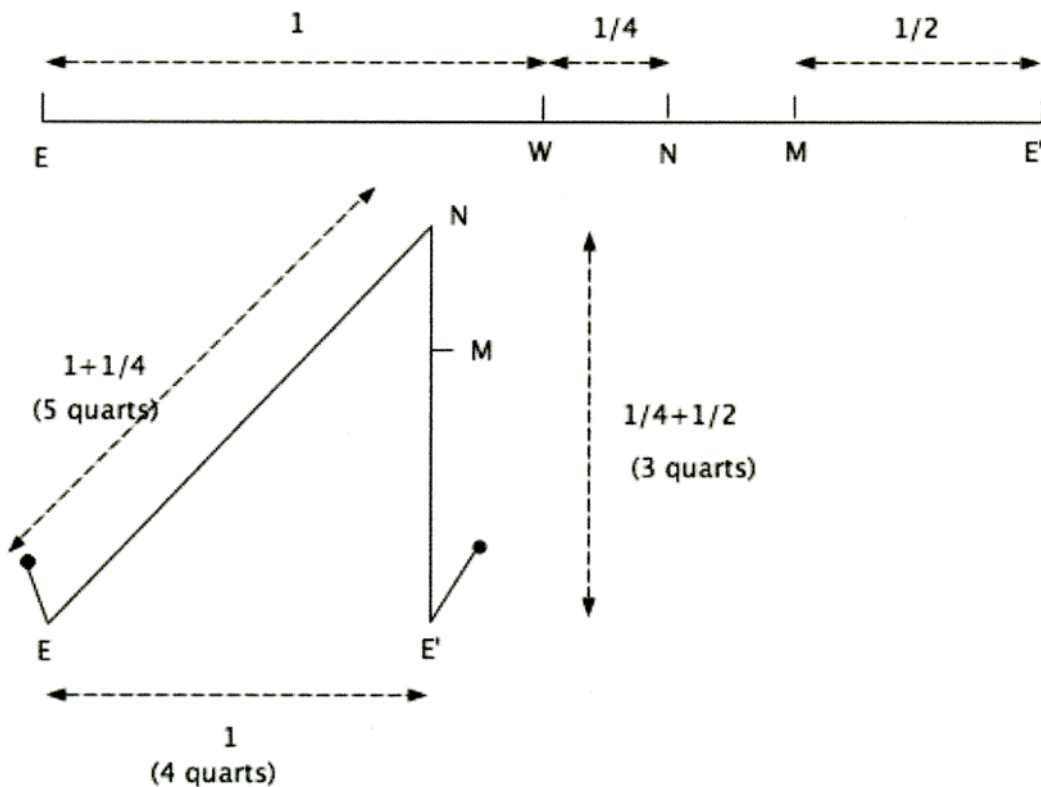
Construction d'un carré avec des triplets pythagoriciens¹

Rappelons qu'un triplet (a, b, c) est dit pythagoricien si $a, b,$ et c sont des nombres entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Exemples : $(3, 4, 5), (12, 5, 13), (15, 8, 17)$. D'après la réciproque du théorème dit de Pythagore, un triangle dont les côtés mesurent a, b et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$ est un triangle rectangle d'hypoténuse c .

Principe de la construction :



Réalisation dans les *sulbasutras* de Baudhayana :



¹ Les *sulbasutras* donnent aussi une construction d'un carré « à la corde (non graduée) et aux piquets »

La corde EE' (direction est-ouest) de longueur totale 2 est marquée en W, N et M comme indiqué, puis les extrémités E et E' sont attachées à des piquets distants de 1 : saisissant la corde en N, on la tend vers le nord. M est le premier sommet du carré. Les autres sommets s'obtiennent par des manipulations symétriques droite-gauche et haut-bas.

La construction suppose la connaissance de la réciproque théorème dit de Pythagore ; voici comment celui-ci apparaît dans le texte de Baudhayana.

Théorème de la diagonale du rectangle

Nous utilisons l'expression "théorème de la diagonale", parce que les auteurs védiques l'énoncent comme une propriété de la diagonale d'un rectangle : le carré « produit » par la diagonale est égal à la somme des carrés « produits » par les deux côtés du rectangle. C'est la réciproque qui est utilisée dans la construction précédente, mais cette réciproque n'est jamais énoncée dans les *sulbasutras*.

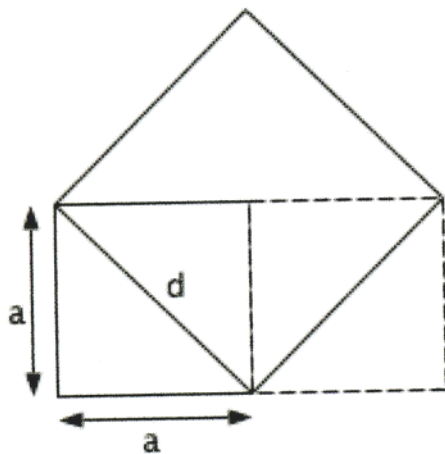
En évoquant le théorème de la diagonale seulement après avoir montré l'utilisation de sa réciproque dans la construction d'un carré, nous suivons le même ordre que celui des *sulbasutras*. Après nous avoir expliqué la tension des cordes pour créer un carré, Baudhayana poursuit :

- a) "*La diagonale du carré produit le double de l'aire.*" Cela veut dire qu'un carré dont le côté est la diagonale d'un carré donné, aura une aire double de celui-ci.
- b) "*La diagonale d'un rectangle ayant pour largeur le côté du carré et une longueur égale au côté du carré double, produit le triple de l'aire.*" Un carré étant donné, si l'on construit un rectangle avec le côté et la diagonale de ce carré, la diagonale du rectangle "produira" un carré d'aire triple du carré initial. En termes actuels en effet, si c est le côté du carré initial, $c\sqrt{2}$ est le côté du carré double, et la diagonale du rectangle de côtés c et $c\sqrt{2}$ vaut $c\sqrt{3}$. Cette dernière "produit" donc le carré d'aire $3c^2$.
- c) "*Par là est expliqué le côté du carré égal au tiers d'un carré donné. C'est le côté d'un carré égal au neuvième de l'aire du précédent*". En termes actuels, pour construire $c^2/3$ à partir de c^2 , on construit le carré $3c^2$, puis $3c^2/9$. Pour diviser le carré $3c^2$ en 9 parties, il suffit de diviser chacun de ses côtés en trois en repliant la corde sur elle même. Une telle construction est exigée dans un rituel.

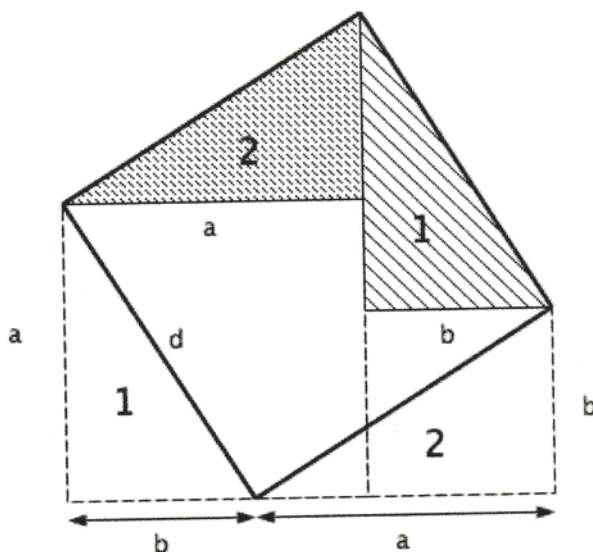
d) "Les aires produites séparément par la longueur et la largeur d'un rectangle valent ensemble l'aire produite par la diagonale." C'est le théorème de la diagonale proprement dit, énoncé ici sans autre forme de procès.

"Ceci est observé dans les rectangles ayant pour côtés 3 et 4, 12 et 5, 15 et 8, 7 et 24, 12 et 35, 15 et 36". Autre traduction : "Il y a compréhension de ces diagonales lorsque ces flancs et transversales sont 3 et 4 etc." (J.M. Delire). Autrement dit, les diagonales peuvent être facilement comprises (appréhendées ? calculées ?) dans certains cas simples qui se ramènent aux triplets pythagoriciens (3 ; 4 ; 5), (12 ; 5 ; 13), (15, 8, 17), (7 ; 24 ; 25), (12 ; 35 ; 37) et (15 ; 36 ; 39).

Comment ce théorème fut-il découvert ? On ne le sait pas, mais il existe au moins une preuve visuelle simple attestée en Chine antique, au Proche-Orient (9^e siècle) et en Inde (12^e siècle).

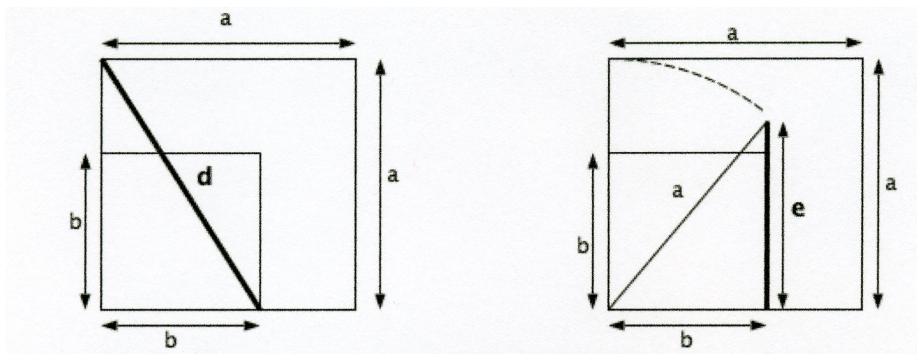


*La diagonale du carré « produit »
le double de l'aire.*



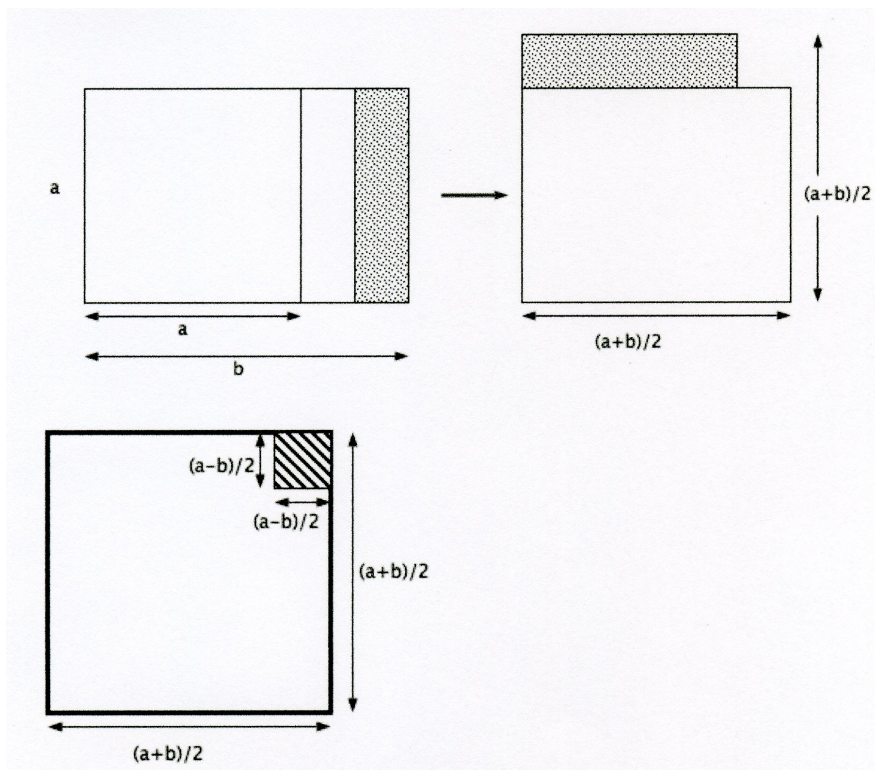
La somme des aires des carrés de côtés a et b est égale à l'aire « produite » par la diagonale d du rectangle de côtés a et b. La preuve visuelle consiste à déplacer les triangles non hachurés 1 et 2 vers les zones hachurées correspondantes.

Additionner deux carrés, soustraire deux carrés.



Le carré de côté d (resp.e) est égal à la somme (resp. différence) des carrés de côtés a et b.

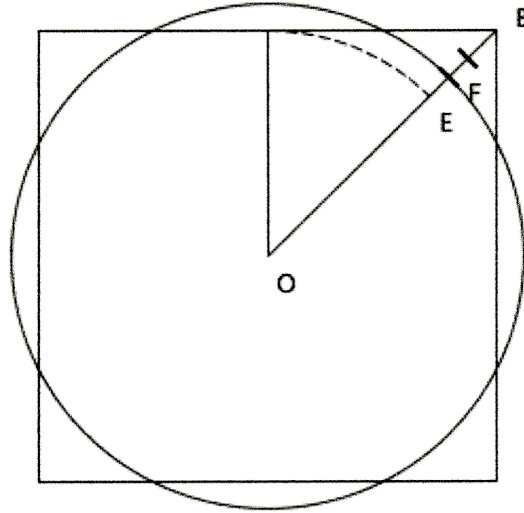
Transformer un rectangle en un carré équivalent (c.à.d. de même aire)



Le rectangle de côtés a et b est transformé en la différence des carrés de côtés $(a+b)/2$ et $(a-b)/2$, et cette différence est construite comme indiqué plus haut. Formule algébrique correspondante :

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Transformer un carré en un cercle équivalent (circulature du carré)



Le carré de demi-diagonale OB est équivalent au cercle de rayon $OE + EB/3$. En termes modernes, l'approximation correspondante de π est de 3,088312. Aucune justification n'est donnée dans les *sulbasutras*.

Transformer un cercle en un carré équivalent (quadrature du cercle)

Formule courante : côté du carré = 13/15 du diamètre du cercle.

Autre formule : côté du carré = $\left[1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 8} \right) \right]$ du diamètre. Aucune justification n'est donnée de ces formules.

-VII-

ANALOGIES AVEC DEUX PROBLÈMES CENTRAUX DES *ELÉMENTS* D'EUCLIDE

Le problème central des livres I et II des *Eléments* d'Euclide est la recherche et la construction de figures *rectilignes* équivalentes (d'aires égales). Le livre I se termine avec la démonstration du théorème de l'hypoténuse (*alias* théorème de Pythagore) (proposition 47), qui est le théorème de la diagonale du rectangle pour les védiques *et de sa réciproque* (propositions 48) ; le livre II se

termine avec la proposition 14 « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée », qui réalise donc ce que l'on appelle la quadrature d'une figure rectiligne quelconque.

La méthode euclidienne pour réaliser la quadrature d'une figure rectiligne quelconque consiste en :

- 1- Construire un rectangle égal à la figure donnée
- 2- Transformer ce rectangle en une différence de deux carrés, et cette dernière en un carré, au moyen du théorème de l'hypoténuse.

C'est, au vocabulaire près, la méthode des *sulbasutras*.

Le livre VI des *Eléments* est consacré à la recherche et à la construction de figures semblables (c.à.d de même forme) ; la proposition centrale (proposition 25) est celle-ci : « Construire une même figure semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée ». Transposée dans le contexte des *sulbasutras*, la proposition serait : « Construire un autel semblable à l'autel en forme d'oiseau de $7,5 p^2$ et égal (en aire) au carré d'aire $8,5 p^2$ ».

La méthode employée par Euclide n'a pourtant rien à voir avec celle des *sulbasutras*.

Bibliographie sommaire

Source de l'exposé

Keller, Olivier. 2006. *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Paris: Vuibert. Chapitre 6.

Textes littéraires védiques

Renou, Louis, éd. 1956. *Hymnes spéculatifs du Vêda. Traduits du sanskrit et annotés par Louis Renou*. Paris: Gallimard.

Varenne, Jean. 1967. *Mythes et légendes extraits des Brahmanas*. Traduction J. Varenne. Paris: Gallimard.

———. 1984. *Le Veda. Textes réunis, traduits et présentés sous la direction de Jean Varenne*. Paris: Les Deux Océans.

Plusieurs textes védiques, et en particulier le *Satapatha Brahmana*, sont en ligne sur le site
Sacred Texts : <http://www.sacred-texts.com/index.htm>

Sulbasutras

Sen, S.N., and A.K. Bag. 1983. *The Sulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava*. New Dehli: Indian National Science Academy.

Delire, Jean-Michel. 2002. *Vers une édition critique des Sulbadipika et Sulbamimamsa, commentaires du Baudhayana Sulbasutra : contribution à l'histoire des mathématiques sanskrites*, Faculté de philosophie et lettres, Université libre de Bruxelles, Bruxelles.

Eléments d'Euclide

Euclide. 1990. *Les Eléments. Volume 1. Introduction générale, livres I à IV*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

———. 1994. *Les Eléments. Volume 2. Livres V à IX*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

———. 1998. *Les Eléments. Volume 3. Livre X*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

———. 2001. *Les Eléments. Volume 4. Livres XI-XIII*. Trad. B. Vitrac. Paris: PUF.

-oOo-