Fonctions

Sommaire

1. Quels sont les objectifs à atteindre ?

Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de ***nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.***

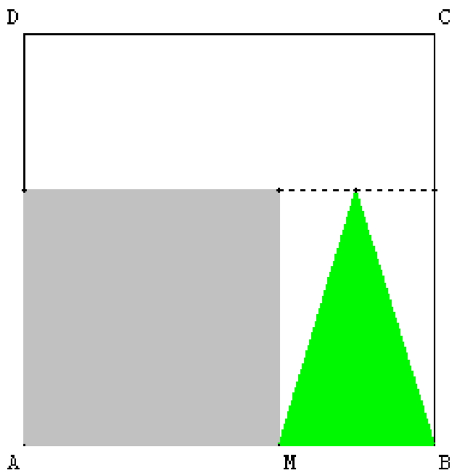
Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre.

> ***Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.***

Le programme fixe comme objectif la maîtrise de deux familles de problèmes :

- Première famille : problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ dans le cas où la fonction est donnée mais aussi dans le cas où toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction.
- Seconde famille : problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ». Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus. Dans un second temps cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Exemple : une même situation pour divers problèmes



Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB] On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD
- un carré de côté [AM]
- un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?

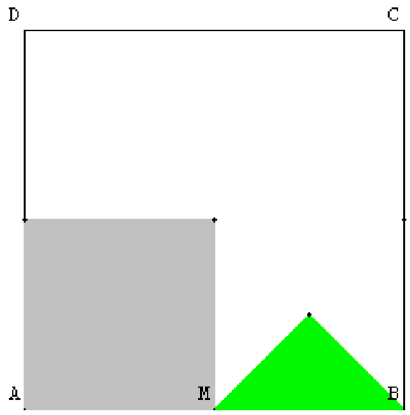
Problème du type n°1 : Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ? Si oui préciser dans quel(s) cas ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.

Problème du type n°2 : Comment évolue l'aire du motif en fonction de AM ? en fonction de MB ?

Une variante



Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD :

- un carré de côté [AM] ;
- un triangle rectangle isocèle de base [MB].

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? la plus petite possible ? Si oui dans quels cas ?

Dans ces deux situations l'élaboration d'une formule reste relativement accessible et ne devrait pas constituer un obstacle insurmontable.

Dans la première situation :

- La façon dont l'aire du triangle évolue en fonction par exemple de AM ne se donne pas *a priori*. En conséquence l'aire du motif non plus.
- Écrire l'aire du motif sous la forme $0,5\,\ell^2 + 4\,\ell$ (si on désigne par ℓ la longueur AM exprimée en cm) peut permettre à certains élèves de donner le sens de variation de la fonction sur l'intervalle utile.
- Un élève pourrait se montrer étonné de constater que dans la classe certains trouvent que l'aire du motif est une fonction croissante (si l'on choisit AM comme variable), alors que d'autres obtiennent une fonction décroissante (ceux qui ont choisi BM comme variable). Cela pourrait être de nature à faire sentir l'importance de la variable.

Dans la seconde situation :

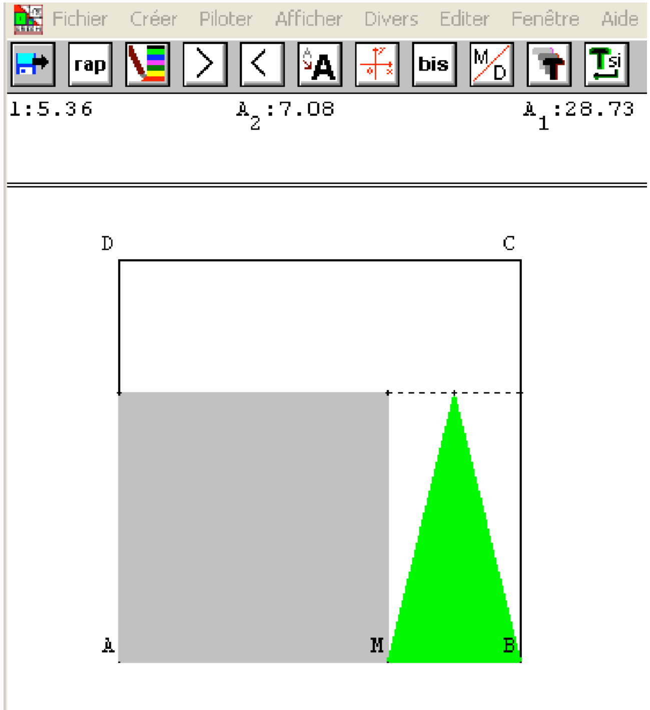
- Le contexte permet d'affirmer que l'aire du triangle est une fonction décroissante de AM : plus AM est grand, plus la base et en conséquence la hauteur du triangle sont petites).
- L'aire du motif a des variations en fonction de AM qui changent en la valeur $1,6$ ($8/5$).

On attend d'un élève qu'il puisse :

- s'approprier le problème en faisant des essais de manière à comprendre que, dans ces deux situations plusieurs quantités varient : le côté du petit carré, la base du triangle, la hauteur du triangle, l'aire du motif. Pour certains élèves un premier obstacle à surmonter est d'identifier que le côté du petit carré et la base du triangle sont liés, (resp. ℓ et $8-\ell$). Quand ils font des essais ils sont assez nombreux à choisir AM et BM indépendamment.
- identifier la variable ℓ (longueur du côté du carré ou longueur du côté du triangle)
- éventuellement prendre l'initiative de récolter des données expérimentales soit en calculant numériquement l'aire du motif pour quelques valeurs de ℓ (à la main ou avec un tableur), soit en utilisant un logiciel de géométrie.

Feuille de calcul

	A	B	C	D
1				
2				
3	c	aire du carré	aire du triangle	Aire du motif
4	0	0	0	0
5	0,5	0,25	1,875	2,125
6	1	1	3,5	4,5
7	1,5	2,25	4,875	7,125
8	2	4	6	10
9	2,5	6,25	6,875	13,125
10	3	9	7,5	16,5
11	3,5	12,25	7,875	20,125
12	4	16	8	24
13	4,5	20,25	7,875	28,125
14	5	25	7,5	32,5
15	5,5	30,25	6,875	37,125
16	6	36	6	42
17	6,5	42,25	4,875	47,125
18	7	49	3,5	52,5
19	7,5	56,25	1,875	58,125
20	8	64	0	64



- constater que ces essais ne lui permettent pas de répondre de façon exacte à la question posée mais qu'en revanche ils peuvent permettre d'y répondre de façon approchée à condition que les essais soient affinés. Ce faisant avoir eu la possibilité d'identifier la nécessité du passage au modèle mathématique pour répondre de façon exacte au problème posé (existence de solution ou pas ? unicité ou pas ? valeur exacte des solutions).

c	aire du carré	aire du triangle	aire du motif
4,94	24,4036	7,5582	31,9618
4,95	24,5025	7,54875	32,05125

- Associer de façon autonome au problème une expression, celle de l'aire du motif en fonction de ℓ :
$$\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\ell(8-\ell) + (8-\ell)^2$$
suivant le choix fait pour la variable ℓ.
- Conduire une résolution graphique ou algébrique et dans ce cadre :
  - ◇ associer à la formule une courbe tracée à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel et faire une lecture graphique
  - ◇ trouver de façon autonome la forme de l'expression adaptée au problème et, si besoin est, (autrement dit si la maîtrise technique du calcul algébrique n'est pas encore suffisante), l'obtenir en ayant recours au calcul formel
  - ◇ avoir eu une occasion de comprendre (et/ou de montrer qu'il a compris) que la résolution de l'équation donne toutes les solutions ainsi que leur valeur exacte alors que la résolution graphique ne donne qu'une valeur approchée des solutions et une démonstration est nécessaire pour être sûr de les avoir toutes.

En annexe 1 « des exemples de raisonnements possibles à valoriser ».

2. La notion de fonction : une notion à travailler dans la durée

La notion de fonction est, pour beaucoup d'élèves de seconde, une notion difficile à appréhender. Pour autant sa maîtrise est nécessaire à toutes les poursuites d'études.

Le travail sur les fonctions est amorcé au collège. Un objectif essentiel de ce travail consiste à faire émerger progressivement, et sur des exemples concrets, « un processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre ». Les fonctions linéaires et affines sont vues à présent comme des exemples particuliers de tels processus, ce qui ouvre davantage la possibilité de soulever quelques questions de fond au sujet de la représentation graphique. Par exemple si l'objectif est de représenter graphiquement la fonction qui à tout nombre associe le carré de ce nombre une question importante et porteuse de sens est « peut-on ou non relier deux points consécutifs d'un nuage par un segment ? ».

La notion de fonction linéaire est présentée comme offrant un modèle pour toutes les situations qui relèvent de la proportionnalité.

Pour beaucoup d'élèves, la notion de fonction ne fait pas encore sens en début de seconde. Il importe donc qu'avant toute formalisation nouvelle, les élèves soient dès le début de l'année et le plus souvent possible confrontés à des situations dans lesquelles il y ait besoin, pour répondre à une question posée au départ,

- d'identifier deux quantités qui varient tout en étant liées,
- d'expliciter le lien entre ces deux quantités de diverses manières :
    - ◇ tableau de valeurs obtenu grâce à des mesures ou à l'utilisation d'un logiciel (logiciel de géométrie ou tableur),
    - ◇ nuage de points dessiné ou obtenu expérimentalement,
    - ◇ courbe liée à la situation posée,
    - ◇ formule exprimant l'une des quantités en fonction de l'autre,
- d'identifier les avantages et les inconvénients de tel ou tel aspect d'une fonction – tableau de valeurs, nuage de points, courbe, formule – selon la question initialement posée.

Les contenus de cette partie du programme ont donc été volontairement recentrés sur les incontournables nécessaires à toute poursuite d'étude et cela de manière à dégager du temps pour que les élèves puissent résoudre des problèmes.

En effet, outre le fait de faire acquérir à tout élève les savoirs utiles et un certain degré de maîtrise technique, cette partie du programme a pour objectif prioritaire de permettre aux élèves de consolider les compétences fondamentales relatives à la résolution de problème et donc être capable de réagir sainement, et sans indication de marche à suivre, devant un problème et de conduire des raisonnements (analyse du problème, élaboration de stratégies ou du traitement à apporter, mise en œuvre du traitement, contrôle de la cohérence des résultats obtenus, exploitation) pour apporter une réponse à la question posée.

3. Une incitation pédagogique

Le programme encourage une programmation moins centrée sur les notions elles-mêmes et davantage sur la nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre.

Par exemple, au niveau du travail à conduire sur le sens de variation des fonctions, l'objectif n'est pas de centrer un apprentissage sur une maîtrise du « comment étudie-t-on en général le sens de variation d'une fonction définie par une expression algébrique ? ». Il s'agit davantage d'obtenir que les élèves donnent sens à ce qu'est une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle et sachent, quand le sens de variation d'une fonction est connu, comment exploiter une telle information pour répondre à une question.

L'attendu est aussi qu'ils soient capables, pour résoudre un problème, de donner de façon autonome le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré. Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on peut s'autoriser à ce que quelques élèves deviennent capables d'aller au-delà et il est même souhaitable de le faire.

4. Notations et raisonnement mathématiques en analyse

a) Éclairer les différents sens des symboles « $=$, $<$, $>$ » en lien avec les quantifications existentielle ou universelle implicites

L'utilisation de ces trois symboles, avec leurs différents sens, intervient à tout moment dans cette partie du programme, les situations conduisant parfois à transformer des expressions algébriques, parfois à résoudre des équations ou des inéquations. Dans ces contextes, les symboles employés entre deux expressions peuvent être les mêmes alors que leur signification et les problèmes sous-jacents sont totalement différents. Par exemple « Vrai ou Faux ? »

$$\begin{array}{lll} x^2+2x-3=(x+1)^2-4 & x^2+2x-3\geqslant 4 & (a+b)^2=a^2+b^2 \\ x^2=-2x+3 & x^2+2x-3\geqslant 0 & (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Chacune des « phrases » écrites ci-dessus est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune valeur de vérité. Il est donc impossible de répondre à la question posée sans la préciser au préalable. Toutes ces ambiguïtés peuvent être pour les élèves source d'incompréhensions bloquantes. Il est donc essentiel de les aider à devenir capables, de façon autonome, de lever les implicites liés à certaines écritures.

Ainsi :

- « pour tout nombre réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ » est une proposition vraie ; le démontrer nécessite de faire un calcul. Disposer d'une quantification universelle est la « récompense » d'une démonstration. Il est essentiel de faire comprendre aux élèves que seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel ».
- « pour tout nombre x, $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition fausse ; pour le démontrer il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas égalité.
- « il existe des valeurs du nombre x pour lesquelles on a $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition vraie. Un exemple suffit à le prouver.

Quand un élève écrit $x^2 = -2x + 3$, il peut vouloir dire qu'il cherche toutes LES valeurs que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie. Il peut aussi faire une erreur et vouloir dire implicitement que l'égalité $x^2 = -2x + 3$ est toujours vraie, c'est-à-dire est vraie quelle que soit la valeur que l'on donnera à x.

L'un des objectifs de ce travail consiste à donner à comprendre aux élèves que ***seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel »***.

Un travail sur les quantifications implicites de certaines formulations peut aider l'élève à clarifier des énoncés et donc à progresser sur les stratégies à adopter pour se prononcer sur la valeur de vérité de ces énoncés.
Des exemples à faire vivre en classe sont donnés **en annexe 2**.

b) Conduire avec les élèves un travail sur la négation

Ce travail s'appuie sur des exemples afin de dégager quelques idées fondamentales :

- conduire les élèves à prouver qu'une proposition universellement quantifiée est fausse ;
  Exemples :
  - prouver que deux expressions ne sont pas égales, par exemple en lien avec un travail sur l'erreur.
  - « Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est positive sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
  - « Toute fonction qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
- leur faire identifier la non-linéarité de certaines fonctions en lien avec un travail sur l'erreur, par exemple « le carré d'une somme est-il égal à la somme des carrés ? », « l'inverse d'une somme est-il égal à la somme des inverses ? » ;
- les conduire à prouver qu'une fonction n'est pas croissante sur un intervalle.

> Si pour un élève la définition formelle n'est pas encore installée mais que le sens est construit, le raisonnement peut être : « *Je prends deux nombres rangés par ordre croissant dans* $[-2;0]$ *:* -2 *et* -1*. Si la fonction carré était croissante sur* $[-2;0]$*, alors les carrés de ces deux nombres seraient rangés aussi par ordre croissant. On aurait* $4 < 1$*. Or c'est faux* ».
>
> Si la définition formelle d'une fonction croissante sur un intervalle est disponible, un élève peut conduire le raisonnement suivant : « *Dire que la fonction carré est croissante sur* $[-2;0]$ *signifie que "quels que soient les deux nombres* a *et* b *que je prends dans l'intervalle* $[-2;0]$*, chaque fois que j'ai* $a < b$*, alors j'ai* $a^2 < b^2$*". Or je peux trouver deux nombres (il existe deux nombres)* a *et* b *dans l'intervalle* $[-2;0]$ *pour lesquels j'ai bien* $a < b$ *et pourtant je n'ai pas* $a^2 < b^2$*. Je le prouve en prenant un exemple (un contre-exemple)* ».

c) Veiller à ce que les élèves sachent faire la distinction entre avoir DES solutions et avoir LES solutions

> Si x prend la valeur 0 ou la valeur -1 alors l'égalité $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$ est vraie. Je peux en déduire que 0 et -1 sont des solutions de l'équation $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$.
>
> Si je note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation je peux écrire que $\{0, -1\} \subset \mathscr{S}$.

d) Familiariser les élèves avec les notations propres aux intervalles

Il n'y a pas lieu de consacrer une ou plusieurs séances à la notion d'intervalle.

Au collège les élèves ont eu l'occasion de représenter sur la droite numérique des ensembles de nombres (par exemple tous les nombres solutions d'une inéquation du premier degré à une inconnue). En seconde il s'agit prioritairement de consolider ce qui a été amorcé au collège et en parallèle de proposer, simplement quand le besoin s'en fait sentir, et petit à petit, une façon de noter des ensembles que l'on sait déjà représenter.

5. Place de l'algorithmique en analyse

Relativement aux acquis visés par le collège la nouveauté est la formalisation de la notion d'algorithme. Cette formalisation sera poursuivie tout au long du lycée. L'objectif de la seconde est de poser l'essentiel à savoir, apprendre à :

- identifier le calcul ou le traitement qui est à répéter ;
- automatiser un calcul un nombre donné de fois ou un nombre de fois soumis à un test.

a) Automatiser le tracé progressif de la courbe représentative d'une fonction

La première approche de l'algorithmique en analyse peut être l'automatisation d'une représentation graphique d'une fonction. Bien sûr, les calculatrices graphiques et de nombreux logiciels (grapheurs, logiciels de calcul numérique, de calcul formel, logiciels de géométrie) donnent un tracé de la courbe représentative d'une fonction déterminée par une formule algébrique. Mais ces tracés sont faits de façon opaque. Il est souvent fructueux de conduire les élèves à tracer aussi une courbe « à la main » en partant d'un tableau de valeurs pour obtenir un nuage de points), de les inciter à se poser la question de la manière de joindre les points du nuage.
Proposer ensuite aux élèves d'augmenter par étapes le nombre des points du nuage peut renforcer leur compréhension de ce qu'est la courbe représentative d'une fonction en les aidant à mieux distinguer l'objet mathématique des dessins que l'on peut en faire.
Exemple d'algorithme (par dichotomie) écrit en langage naturel :

Données :
  fonction f,
  bornes a et b,
  nombre d'itérations du nuage N

Variables :
  variable entière pour la boucle : k,
  longueur de l'intervalle entre deux points : L,
  abscisse du point marqué : x

```
Entrer N
L ← (b-a)
Pour k de 1 à N
        | L ← L/2
        | x ← a
        | Tant que x⩽b
        |     | Marquer le point de coordonnées (x,f(x))
        |     | x ← x+L
        | attendre 5 secondes (ou un appui sur une touche)
Fin
```

b) Tracé d'une courbe définie par morceaux, par un processus itératif

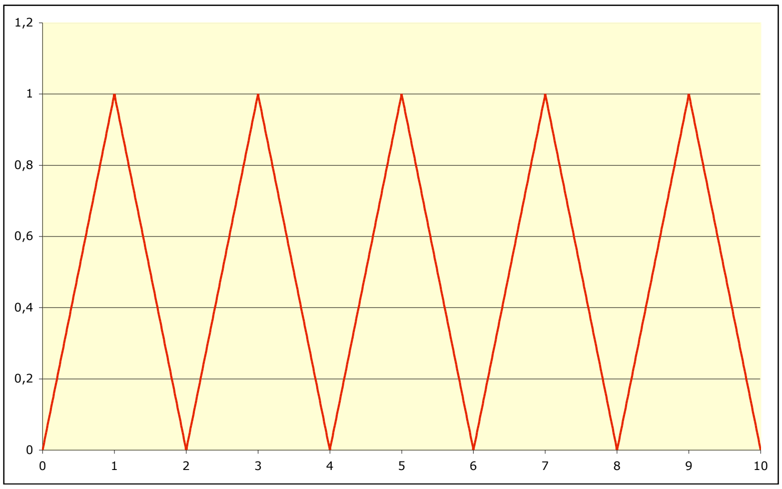
On peut, dans un premier temps, envisager ces types de tracés avec un tableur-grapheur, en employant les fonctions logiques du tableur.

Exemple :

On considère la fonction définie sur $[0;10]$ qui est affine entre deux nombres entiers consécutifs et qui vaut

- 0 pour les entiers pairs ;
- 1 pour les entiers impairs,

conformément au graphique ci-contre :



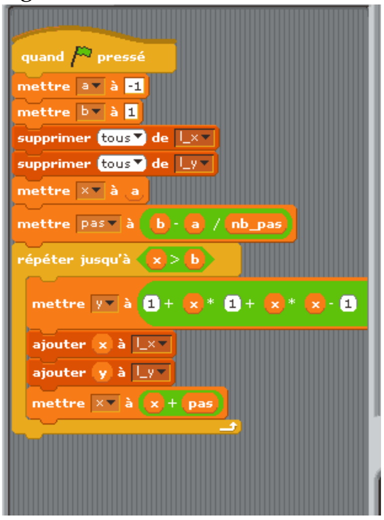
Avec un tableur, si l'on réserve à la variable la colonne A et aux images la colonne B, on peut saisir la première valeur de la variable dans la cellule A2, et dans la cellule B2 la formule suivante :

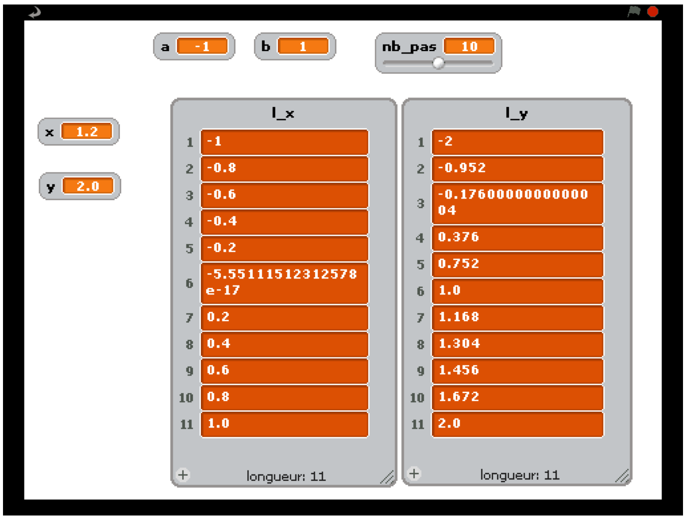
```
=SI(EST.PAIR(A2);A2-ENT(A2);1+ENT(A2)-A2)
```

Il ne reste plus qu'à recopier vers le bas la formule saisie en B2.

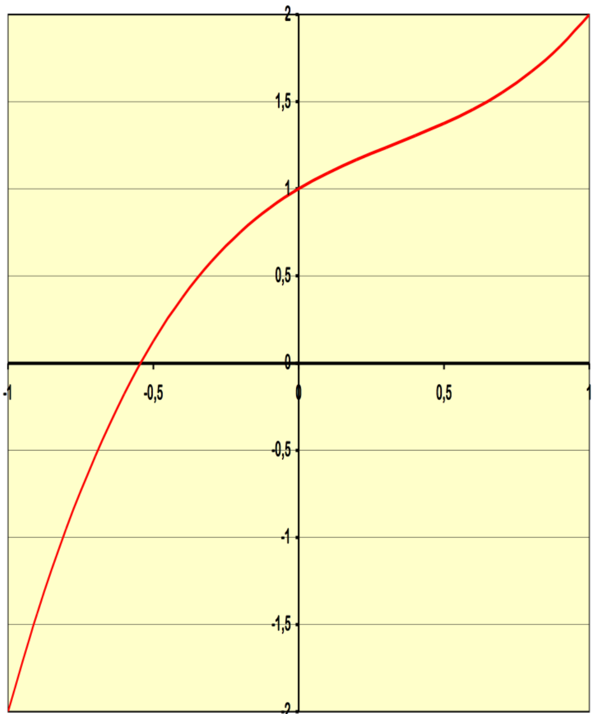
c) Recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation par dichotomie

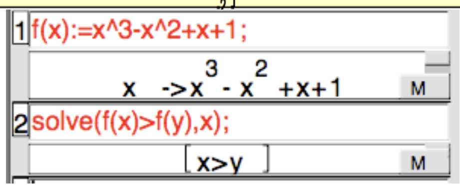
Exemple : Considérons la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$ sur l'intervalle$[-1;1]$. Un tableau de valeurs peut être obtenu avec le logiciel Scratch :





La fonction « passe de $f(-1) = -2$ à $f(1) = 2$ ». Intuitivement, elle va donc s'annuler. Une représentation graphique, donnée ci-contre, permet de conjecturer qu'elle est strictement croissante, ce qui peut être confirmé par un logiciel de calcul formel (voir, sous la courbe, le résultat donné par le logiciel Xcas).





Par exemple sur la calculatrice TI-nspire, l'algorithme de recherche d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ peut se traduire par le programme :

Define **dichot**$(a, b, n) =$
Func
Local x, y, c :
$x := a$
$y := b$
While $y - x > 10^{-n}$
  $c := \dfrac{x+y}{2}$:
  If $f(x) * f(c) > 0$ Then
    $x := c$
  Else
    $y := c$
  EndIf
EndWhile
Return x :
EndFunc

L'utilisation de la fonction **dichot**[1] ainsi définie se traduit par :

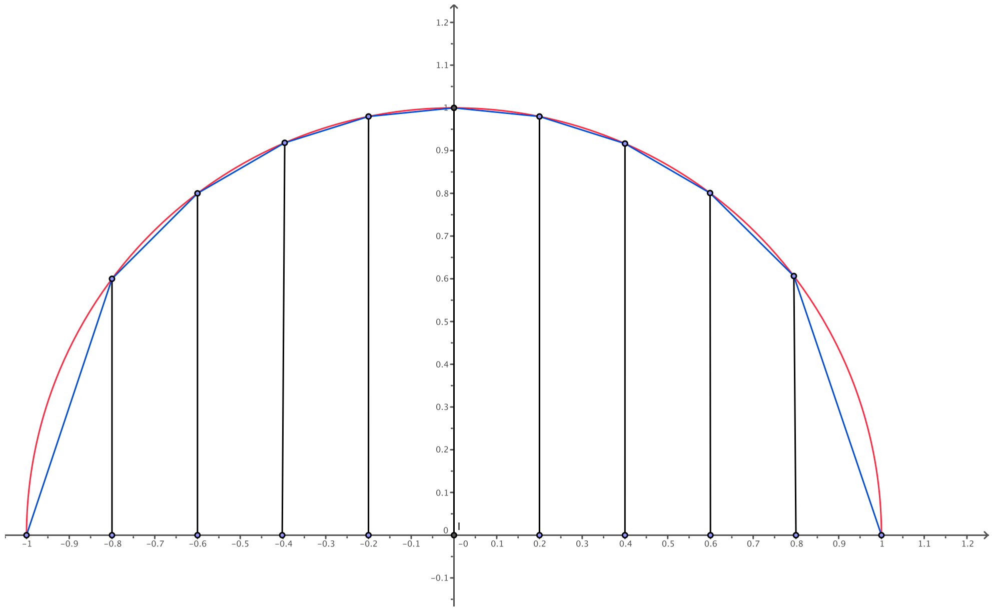
$dichot(-1, 1, 12)$	-0.54368901269208
$solve(f(x) = 0, x)$	-0.54368901269208

La dernière ligne servant à vérifier le résultat trouvé.

1. Notons au passage que l'algorithmique permet, conformément au programme de confronter les élèves à des fonctions autres que des fonctions d'une variable réelle : fonctions d'une variable entière, fonctions de plusieurs variables.

d) Longueur approchée d'un arc de courbe

Exemple : Vérification expérimentale de la longueur d'un demi- cercle de rayon 1.
Si l'on considère le demi-cercle de rayon 1 formé des points d'ordonnées positives, tout point $M(x, y)$ de ce cercle vérifie $x^2 + y^2 = 1$, soit puisque $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{1-x^2}$. On peut approcher le périmètre du demi-cercle par la longueur d'une ligne polygonale régulière dont les sommets sont sur le demi- cercle, l'origine étant $A(-1, 0)$ et l'extrémité $B(1, 0)$.
Ainsi, avec $n = 5$, on obtient :



Si l'on désigne par $2n$ le nombre d'arêtes de la ligne polygonale obtenue en prenant les points A_i dont les abscisses sont $x_i = -1 + \dfrac{i}{n}$ de sorte que $A_0 = A$ et $A_{2n} = B$, l'algorithme de calcul peut se traduire par le programme suivant (pour la calculatrice TI-nspire) :

```
Define y(x) =
Func
Return √(1 − x²)
EndFunc

Define norme(a, b) =
Func
Return √(a² + b²)
EndFunc

Define longueur(n) =
Func
Local i, L, x1, x2 :
L := 0 :  x2 := −1
For i, 1, 2 ∗ n
     x1 := x2 :  x2 := x1 + 1/n
     L := L + norme(1/n , y(x2) − y(x1))
EndFor
Return L
EndFunc
```

Ce petit programme donne, pour différentes valeurs de n les résultats ci-dessous, à comparer avec une approximation de π donnée directement par la calculatrice :

longueur (100)	3.1412985671606
longueur (1000)	3.1415833563503
longueur (10000)	3.1415923595898
π	3.1415926535898

e) Aire d'une région comprise entre deux courbes

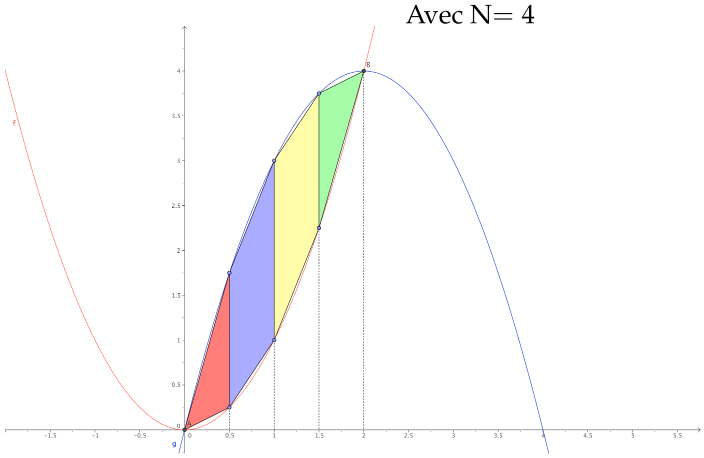
On se propose, par exemple, de calculer une valeur approchée de l'aire comprise entre deux paraboles sécantes. On Considère les deux paraboles $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = f(x) = x^2$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation $y = g(x) = 4x - x^2$ qui se coupent aux points $A(0,0)$ et $B(2,4)$. En partageant le segment $[0,2]$ de l'axe des abscisses en n segments de longueurs égales et en traçant les parallèles à l'axe des ordonnées, on obtient, en prenant les points d'intersections de ces droites avec les deux courbes, on obtient n trapèzes (le premier et le dernier sont des triangles). On considère que pour n assez grand, la somme des aires de ces trapèzes est une bonne approximation de l'aire comprise entre les deux courbes. L'aire du k-ième trapèze a pour valeur : $\dfrac{2}{n} \times \dfrac{\big(g(k/n) - f(k/n)\big) + \big(g((k-1)/n) - f((k-1)/n)\big)}{2}$ et l'algorithme de calcul peut s'écrire (en langage naturel) :

Données : fonction f : x↦ x^2, fonction g : x↦ 4*x−x^2,
nombre d'intervalles N.

Variables :
- variable entière pour la boucle : k,
- abscisses des bornes de l'intervalle en cours : x, y
- longueur de l'intervalle entre deux points : L,
- aire déjà calculée : S.

```
Entrer N
L ← 2/N :   x ← 0 :   y ← 0 :   S ← 0
Pour k de 1 à N
        | x ← y
        | y ← k*L
        | S ← S+(g(y)−f(y)+g(x)−f(x))∗L/2
Fin
```

Avec N= 4



L'algorithme décrit ci-dessus donne le programme Scilab suivant :

```
function P1=f(x)
P1=x^2 ;
endfunction ;
function P2=g(x)
P2=4*x-x^2 ;
endfunction ;
function S=Aire(N)
L=2/N ;
x=0 ;
y=0 ;
U=0 ;
for k=1 :N,x=y, y=k*L, U=U+(g(y)-f(y)+g(x)-f(x))*L/2, end ;
S=U ;
endfunction ;
```

et les calculs :

```
-->Aire(10)
  ans =
    2.64
-->Aire(100)
  ans =
    2.6664
-->Aire(1000)
  ans =
    2.666664
-->Aire(10000)
  ans =
    2.6666666
```

6. Quelques précisions sur des points particuliers du programme

a) Autour de la courbe représentative d'une fonction

La notion de courbe représentative d'une fonction est une notion délicate que beaucoup d'élèves peinent à comprendre. Les acquis du collège sur ce point sont encore fragiles (voire très fragiles) et la classe de seconde doit proposer la poursuite d'un apprentissage (qui sera à continuer aussi en cycle terminal) :

- en mobilisant très régulièrement, et dans un premier temps sur de simples nuages de points, le passage du cadre graphique au cadre numérique afin d'en construire durablement la robustesse. Des professeurs le font sous la forme d'un rituel de questions rapides posées au début de chaque séance, ce qui leur permet de revenir très fréquemment et par petites touches sur ces questions de fond.

Voir Annexe 3

- en ne passant pas trop vite sur le passage du nuage de points à une courbe.
  Pour cela des questions de fond gagnent à être cultivées :
  - Peut-on joindre deux points du nuage par un segment ?
  - Si non pourquoi ne peut-on pas le faire ou comment le prouver ?
- en aidant les élèves à distinguer la courbe d'une fonction des dessins qu'on peut en obtenir avec un traceur de courbes.

Ce travail est d'autant plus important que, dans une résolution de problème, obtenir un dessin de la courbe représentative d'une fonction apparaît rarement aujourd'hui comme l'aboutissement d'une étude. Il en constitue plus souvent une étape, ce dessin apportant une aide précieuse à la résolution.

Mais cela nécessite que les élèves comprennent bien que, si ce qui est vu à l'écran permet de répondre de façon parfois satisfaisante à une question posée sur une situation concrète (cela peut être le cas dans beaucoup de situations empruntées aux domaines économiques) et peut donner des idées pour transformer la forme d'une expression, ***en aucun cas cela ne permet d'affirmer des propriétés de la fonction***. De la même manière que les élèves ont appris au collège à ne pas se contenter de lire sur un dessin les propriétés des figures géométriques, ils doivent apprendre à distinguer la courbe représentative d'une fonction (qui appartient au monde des objets mathématiques tout comme la figure géométrique) des dessins que l'on peut en faire (qui appartiennent au monde réel tout comme en géométrie, les dessins non codés).

Ce travail de formation est d'autant plus important que l'on souhaite libérer la pratique expérimentale des élèves. Leur apprendre à distinguer ce qui est établi de ce qui est encore à prouver, à utiliser à bon escient le mot « conjecture » est un objectif important à poursuivre.

b) Autour de l'étude qualitative d'une fonction

Les attendus du programme

Un objectif essentiel donné par le programme, et tout à fait suffisant dans un premier temps, est de ***donner sens*** à ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle.
La définition formelle d'une fonction croissante (respectivement décroissante) reste trop complexe pour beaucoup d'élèves en début de classe de seconde. Formaliser ces deux définitions trop tôt peut faire véritablement blocage. Il est judicieux de les dégager très progressivement et de ne les formaliser que le plus tard possible. Le programme précise que leur maîtrise n'est un objectif que de fin d'année.
Cette maîtrise du sens est prouvée si :

- Lorsqu'il sait que f est une fonction décroissante sur $[2;+\infty[$ (ou qu'il le déduit du tableau des variations de f), un élève est capable de comparer les images de deux nombres donnés dans l'intervalle $[2;+\infty[$ (par exemple de ranger et , voire comparer les images de a et $a+1$ pour a élément de $[2;+\infty[$.
- L'élève sait que disposer des variations d'une fonction ne lui permet pas de comparer les images de n'importe quels nombres. Par exemple, il sait qu'il ne peut comparer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(3)$ à partir du tableau de variations de f donné ci-après :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Un élève prouve cette maîtrise du sens s'il sait recourir à la connaissance qu'il a du sens de variation des fonctions de référence pour comparer des nombres.

Par exemple comparer, sans utiliser de calculatrice, $(\sqrt{3}+1)^2$ et $\left(\frac{12}{7}\right)^2$.

> ***Le programme ne fixe pas comme objectif qu'un élève devienne capable d'étudier dans le cas général les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence.***

La connaissance des variations des fonctions de référence (affine, carré, inverse) peut, dans un premier temps, n'être formalisée qu'en prenant appui sur le sens. Apporter une preuve nécessite la maîtrise d'une définition formelle et peut n'être entrepris qu'*a posteriori*, quand la maturité des élèves est plus grande.

Pour que les élèves puissent se concentrer sur la résolution de toute une famille de problèmes, l'objectif est qu'ils soient en mesure de disposer du tableau de variations des fonctions polynômes de degré 2 sans que cela ne représente pour eux un obstacle au niveau de la maîtrise technique.

Connaissance des fonctions polynômes du second degré

Concernant les résultats sur les variations d'une fonction polynôme du second degré, il peut suffire de donner la propriété affirmant qu'une telle fonction est soit croissante puis décroissante soit le contraire. En particulier, la méthode consistant en la lecture du coefficient de x^2 peut ne pas être donnée tout particulièrement aux élèves qui ne l'auraient pas repérée. L'objectif essentiel reste de faire raisonner les élèves avec un bagage minimum sans les surcharger de contenus vides de sens à mémoriser et leur demandant une capacité d'abstraction trop importante. En particulier, il ne serait pas judicieux, en classe de Seconde, de donner la valeur de l'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ qui réalise l'extremum d'une telle fonction.

Le programme précise que les résultats concernant les fonctions polynômes du second degré sont donnés en classe et connus des élèves mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Faire l'étude d'une telle fonction dans le cas général (comme cela se fait actuellement en première S) dépasse en effet les capacités d'abstraction de la majorité des élèves de seconde. Plusieurs stratégies pédagogiques sont possibles et relèvent de la liberté pédagogique :

- Faire appel à l'intuition et/ou à l'observation puis marquer la rupture entre propriété conjecturée et propriété non démontrée en classe mais validée par le professeur.
- Apporter une preuve (en mobilisant l'effet sur l'ordre des fonctions de référence) mais seulement sur un exemple générique et avec toute (ou une partie de) la classe.

Lorsqu'il s'agira ensuite pour un élève de donner les variations d'une fonction polynôme du second degré quelconque, il pourra par exemple :

- Prendre appui sur le fait – établi en cours – qu'une fonction polynôme de degré 2 est soit croissante puis décroissante, soit le contraire. Il ne lui restera plus alors qu'à trouver pour quel nombre réel il y a changement de variation.
  - ◇ si la forme canonique est disponible (soit parce que l'expression de la fonction est mise naturellement sous cette forme soit parce que l'élève identifie qu'il en a besoin et qu'il l'obtient en utilisant un logiciel de calcul formel), il pourra en déduire à la fois l'extremum, la valeur en laquelle il est atteint et son caractère (minimum ou maximum) ;
  - ◇ sinon exploiter la symétrie de la courbe de la fonction. Du fait de cette symétrie l'abscisse de l'extremum est la demi-somme des abscisses de deux points de la courbe de même ordonnée. L'élève a donc toute liberté de choisir de rechercher les points communs de la courbe avec l'axe des abscisses, ou prendre l'initiative de chercher les deux antécédents d'un même nombre. Une fois trouvées les coordonnées de l'extremum, la comparaison avec l'ordonnée d'un autre point de la courbe suffit à établir son caractère.
- Articuler observations de l'expression et d'un graphique obtenu avec une calculatrice : par exemple, la fonction semble d'abord croissante puis décroissante. Sur le graphique un maximum égal à 4 semble atteint en la valeur 3. Mise en place d'éléments de contrôle : l'image de 3 est bien 4 ; après calcul algébrique vérification que toute image s'écrit 4 plus quelque chose plus petit que 0 ou 4 moins quelque chose de plus grand que 0. Donc toute image est plus petite que 4. Il y a donc maximum en 3.
- Combiner les deux approches précédentes lorsque, par exemple, l'abscisse de l'extremum n'est pas directement lisible (cas d'une valeur non décimale).

Une porte ouverte à une certaine différenciation pédagogique

La maturité et la capacité d'abstraction que demandent la manipulation des expressions littérales et la mise en place de tels raisonnements sont différentes pour chaque élève et évoluent en cours d'année. Le professeur a toute latitude pour fixer les exigences du niveau de justification attendu dans un objectif d'apprentissage et de compréhension, de faire évoluer ces exigences en cours d'année et de les moduler suivant les élèves.

Par exemple on pourrait accepter d'un élève qu'il écrive à un moment de l'année :

- Je trace la courbe de la fonction avec ma calculatrice .
- Je reconnais une fonction polynôme du second degré ; les résultats du cours me permettent d'affirmer que les variations observées sont exhaustives. J'admets donc (je sais que ne l'ai pas démontré mais que ce résultat est juste) que l'allure de la courbe est bien .
- Avec la calculatrice, j'observe que le sommet de la parabole a pour abscisse $x = -4$. Pour le prouver, il faudrait que je démontre que $f(x)$ est toujours plus grand que $f(-4) = -40$ mais je ne vois pas comment faire.

Plus tard dans l'année, on pourra attendre de cet élève qu'il argumente davantage et que, par exemple, il justifie que le sommet de la parabole a bien comme abscisse -4 ou que $f(x)$ est bien toujours plus grand que -40 (par exemple sollicitation autonome un logiciel de calcul formel pour mettre $f(x)$ sous la forme -40 plus quelque chose de positif.)

Conduire certains élèves à étudier les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence peut participer d'une saine différenciation pédagogique. De même, certains élèves peuvent accéder à une pratique de la démonstration formelle de la monotonie : pour démontrer qu'une fonction est croissante sur I, il suffit d'établir que pour tous nombres réels a et b dans I, a et b d'une part, $f(a)$ et $f(b)$ d'autre part sont dans le même ordre.

Mais, dans ce cadre, il faudrait veiller tout particulièrement à laisser aux élèves toute liberté de nommer comme ils le souhaitent les deux nombres choisis dans l'intervalle sans leur conseiller de nommer toujours de la même manière le plus grand. En effet un élève ne maîtrise véritablement cette compétence que s'il a bien compris que, de l'inégalité $f(a) < f(b)$ prise isolément, on ne peut rien conclure. Pour cela il faudrait cultiver une confrontation au problème :

« Tu obtiens $f(b) < f(a)$ et ton camarade obtient $f(a) < f(b)$ et pourtant il n'y a pas d'erreur ! »

c) Autour du travail à conduire sur les expressions algébriques

Au collège le travail sur le développement d'une expression algébrique est véritablement amorcé en quatrième alors que la factorisation n'est amorcée qu'en troisième, l'objectif étant simplement que les élèves sachent factoriser des expressions algébriques quand le facteur est apparent [2]. Les acquis des élèves ont donc de bonnes chances d'être plus solides sur « développer » que sur « factoriser ». En revanche transformer une expression rationnelle n'est pas un objectif du collège.

En seconde il s'agit de poursuivre cet apprentissage du calcul algébrique (qui sera à continuer aussi au cycle terminal).

Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. Sur ce point précis, un objectif de formation prioritaire pour tout élève consiste à faire travailler l'intelligence du calcul, à donner des occasions de raisonner. Il est important de développer une aptitude à anticiper la forme de l'expression utile pour résoudre un problème. Pour ce faire, on peut conduire les élèves à réfléchir sur les différentes formes possibles que peut prendre une expression, en lien avec des courbes obtenues avec un traceur ou une calculatrice, et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre.

> Par exemple un élève qui cherche à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ prend la valeur 0 ou à étudier ce que l'on appelle le signe de $f(x)$, suivant les valeurs de x, devrait être en capacité de dire, sans aide, que c'est la forme factorisée qui convient. Un élève qui veut prouver que, pour toutes valeurs de x, $f(x)$ est toujours inférieur (resp. supérieur) à un nombre k, devrait penser à essayer de mettre $f(x)$ sous la forme k moins (resp. plus) quelque chose qui serait toujours positif.

Ce travail doit offrir aussi des occasions de démontrer (tout particulièrement pour obtenir une quantification universelle). Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser.

Voir exemple en Annexe 4

Une autre porte ouverte à la différenciation pédagogique

Acquérir de l'autonomie en calcul nécessite bien entendu une part d'entraînement technique. Toutefois faire acquérir cette maîtrise technique à tous n'est pas la priorité. En revanche les élèves qui ont des facilités en mathématiques ou qui auront besoin de faire des mathématiques d'un bon niveau pour réussir leur projet d'orientation doivent acquérir ces automatismes de calcul. Prolonger l'entraînement donné à tous en proposant à ces élèves des « gammes » supplémentaires, voire des « défis de calcul », peut participer de la différenciation pédagogique à mettre en place.

2. La factorisation et la notion d'équation ne sont pas des exigibles du socle commun

Quelques illustrations

1. Situation n°1 : Une histoire de diviseurs

Partie A :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe le nombre de diviseurs de sa partie entière.

1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 10 ? à $43,7$? à $\dfrac{182}{3}$?
2. Quel est le plus petit nombre auquel on associe 8 ?
3. Représenter graphiquement la situation de départ, pour tous les nombres compris entre 1 et 25.
4. On donne un nombre a quelconque. Quelles conditions doit respecter le nombre a pour qu'il puisse être le nombre associé à un nombre de départ ?

Partie B :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe les diviseurs de sa partie entière.

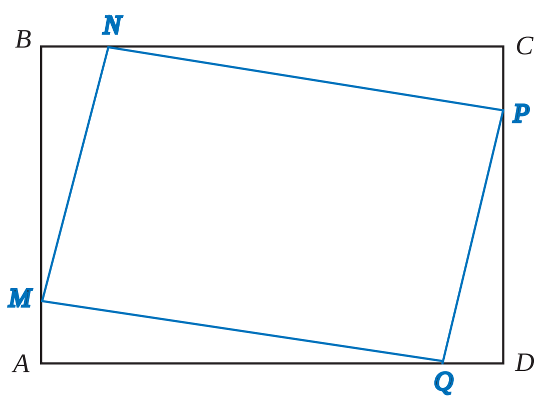
1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 17 ? à $50,9$? à $\dfrac{106}{7}$?
2. Peut-on représenter graphiquement cette situation ? Si oui, réaliser cette représentation pour tous les nombres compris entre 1 et 25.

2. Situation n°2 : Le quadrilatère tournant

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données, $AB = 6$cm, $BC = 8$cm. Sur le petit côté $[AB]$, on choisit un point M quelconque.

On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.

On s'intéresse aux variations de l'aire ou du périmètre du quadrilatère $MNPQ$.



Pour l'aire, le calcul donne :

$$\text{aire}(MNPQ) = 48 - AM(6 - AM) - AM(8 - AM) = 48 - 2AM(7 - AM)$$

Pour le périmètre :

$$\text{per}(MNPQ) = 2\sqrt{AM^2 + (8 - AM)^2} + 2\sqrt{AM^2 + (6 - AM)^2}$$

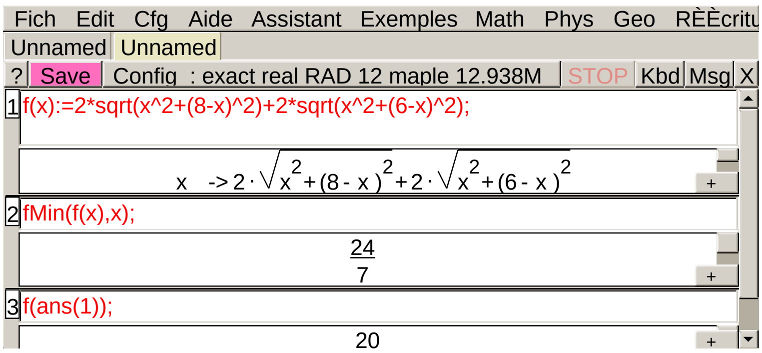
Différents types de problèmes :

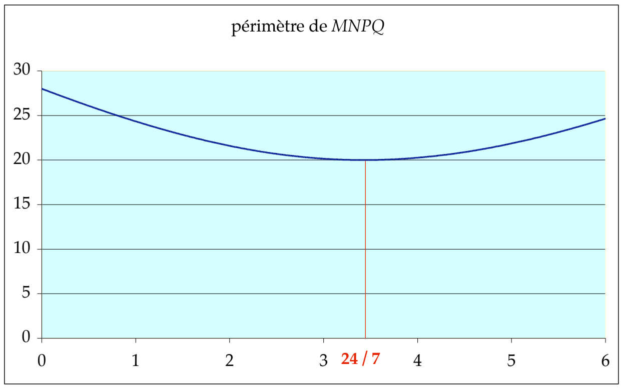
- Si on connaît la valeur de AM, peut-on déterminer la valeur de l'aire ? du périmètre ?
- Peut-on construire un quadrilatère dont l'aire est égale à un nombre donné ?
- Comment varie l'aire de $MNPQ$? (charge à l'élève de dire « varie mais en fonction de quoi ? »)
- Est-il possible de placer le point M de sorte que l'aire de $MNPQ$ soit la plus grande possible, la plus petite possible ?
- Est-il possible de placer le point M de sorte que le périmètre de $MNPQ$ soit le plus grand possible, le plus petit possible ?

Activités possibles des élèves :

- À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes donnant l'aire et le périmètre en fonction de AM. Déterminer expérimentalement les valeurs minimales et maximales de l'aire et du périmètre.
- Calculer l'aire, le périmètre.
- Déterminer le maximum et le minimum de l'aire.
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer le minimum du périmètre ou à l'aide d'un logiciel de calcul numérique, en déterminer une valeur approchée.

Le travail relatif à l'aire étant classique, nous nous concentrons dans la suite sur le périmètre. En utilisant le logiciel de calcul formel Xcas, on obtient les valeurs exactes, étayées par la représentation graphique :





Le calcul qui suit a pour but de montrer comment pourrait être justifié, dans le cadre du programme de seconde, le résultat trouvé. Ce calcul est évidemment hors de portée d'un élève de seconde, mais peut être mené par le professeur avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Celui-ci ne pourra être utile que si l'on voit *a priori* les calculs qui doivent être faits, consistant essentiellement à « chasser les racines carrées du numérateur » en multipliant numérateur et dénominateur par des « quantités conjuguées » bien choisies. C'est une illustration de ce que peut être un travail sur l'intelligence du calcul.

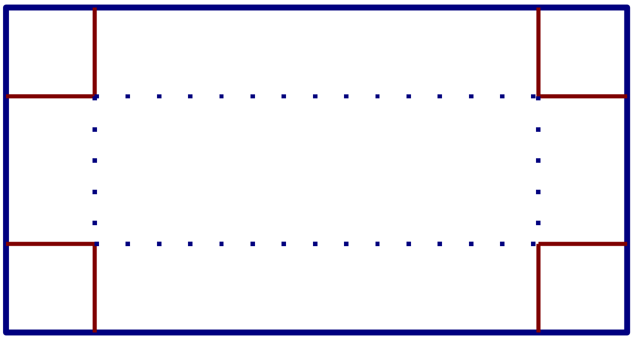
$$\begin{aligned}
\frac{\text{per}(MNPQ)-20}{2} &= \sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}-10\\
&= \frac{4x^2-28x+2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}}{\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10}\\
&= \frac{4(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)-(4x^2-28x)^2}{D}\\
&= 16\frac{(x^2-8x+32)(x^2-6x+18)-(x^2-7x)^2}{D}\\
&= 16\frac{x^4-14x^3+98x^2-336x+576-x^4+14x^3-49x^2}{D}\\
&= 16\frac{49x^2-336x+576}{D} = 16\frac{(7x-24)^2}{D} \geqslant 0, \text{ nul pour } x=\frac{24}{7}.
\end{aligned}$$

On a posé :
$D = \left(\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10\right)\left(2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}+28x-4x^2\right) > 0$
puisque $28x-4x^2 = 4x(7-x) > 0$ pour $x \in]0;6]$.

3. Situation n°3 : Patrons de récipients

Dans le document ressource du collège « du numérique au littéral », figure le problème classique de la plaque carrée dans laquelle on découpe 4 carrés identiques dans chaque coin pour former une boîte en forme de parallélépipède rectangle. En fonction du côté de l'encoche, on peut calculer l'aire et le volume de la boîte. On peut aussi chercher le maximum du volume de la boîte.
Sur ce thème de la construction du patron d'un récipient dans une figure donnée, on peut varier les approches, en changeant la figure initiale ou en changeant la forme du récipient. Nous proposons ci-dessous trois exemples de difficultés variées pour la construction de récipients ouverts[3].

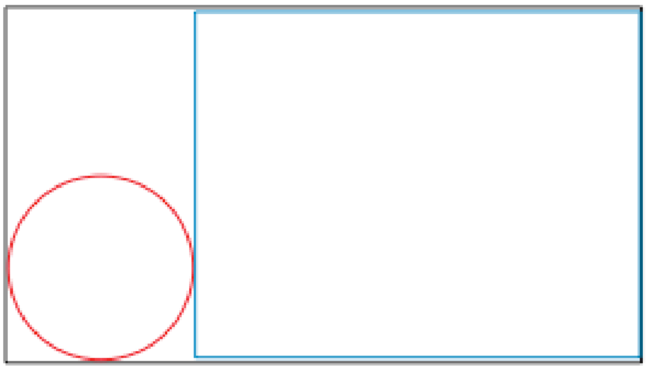
a) Patron d'un parallélépipède rectangle ouvert dans un rectangle



Pour certains élèves, on se limitera à des valeurs numériques de la largeur et de la longueur du rectangle. Pour ceux qui sont plus à l'aise avec le calcul littéral, il est possible de prendre les dimensions du rectangle comme paramètres.

b) Patron d'un cylindre ouvert dans une plaque rectangulaire

Exemple de configuration possible :



Dans cette configuration, une des difficultés pour les élèves réside dans le rapport π qui doit exister entre une des dimensions du rectangle et le diamètre du cercle. Les valeurs numériques de la longueur et de la largeur du rectangle initial sont données.

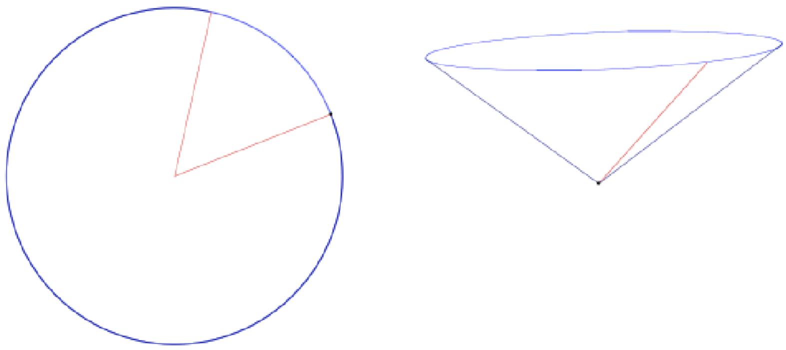
Questionnements possibles

- Comment peut-on découper dans un rectangle un disque et un rectangle pour constituer le patron d'un cylindre ouvert ?
- Quelles valeurs peuvent prendre le diamètre, la hauteur, le volume de ce cylindre ?
- Comment faire que le cylindre ait le volume le plus grand possible ?

3. Le qualificatif « ouvert » signifie que les récipients sont sans couvercle.

c) Patron d'un cône de révolution ouvert (cornet) dans un disque

On enlève dans un disque un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution.

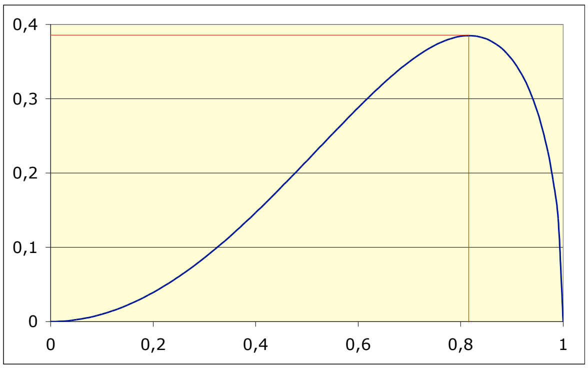


Si le disque est de rayon R et le secteur angulaire conservé est dans un rapport k avec un tour, la base du cône a pour périmètre $2\pi Rk$ donc pour rayon Rk.

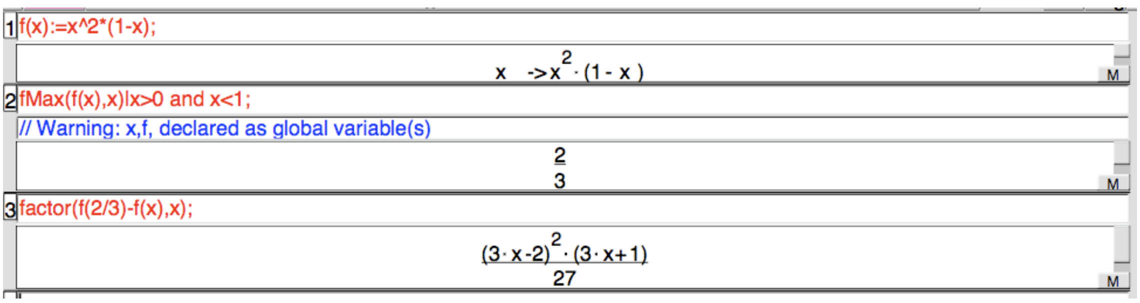
D'après le théorème de Pythagore, la hauteur du cône vaut $h = \sqrt{R^2 - (Rk)^2} = R\sqrt{1-k^2}$

et le volume $V = \dfrac{\pi R^3}{3} k^2 \sqrt{1-k^2} = \dfrac{\pi R^3}{3} V_1(k)$.

On représente la fonction $V_1 : k \mapsto k^2\sqrt{1-k^2}$:



Pour la détermination du maximum, on peut poser $k^2 = x$ puis $f(x) = \big(V_1(k)\big)^2 = x^2(1-x)$. Laissons alors Xcas faire les calculs :



De l'égalité obtenue $f\left(\dfrac{2}{3}\right) - f(x) = \dfrac{(3x-2)^2(3x+1)}{27} \geqslant 0$, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et, si l'on revient au volume :

$$\boxed{\text{le volume maximum est obtenu pour } k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ et vaut } V_{\max} = \frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}}$$

4. Situation n°4 : Une formule de physique concernant la puissance électrique

Le produit de la tension efficace U aux bornes d'un dipôle ohmique par l'intensité efficace I du courant qui le traverse est égal à la puissance électrique P que le dipôle consomme : $P = UI$, où U s'exprime en volts, I en ampères et P en watts.

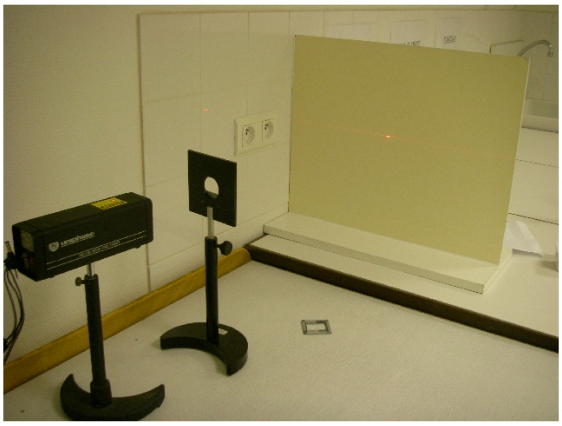
Questionnements possibles :

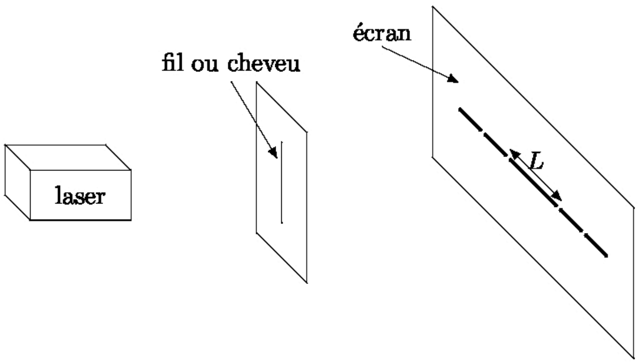
- Une lampe à incandescence porte les indications : 6V-100mA. Qu'est-ce que la formule permet alors de calculer ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Envisager le cas d'une ampoule qui porte les indications 230V-75W.
- Que peut-on dire à propos d'un fer à repasser qui ne porterait que la seule indication 1300 W ?
- Une rallonge de fil électrique porte les indications 230V-max 2200W. Peut-il être parcouru sans risque par un courant de 5A ? de 10A ? de 15A ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Quelle fonction peut-on associer à cette situation ? Proposer plusieurs exemples.
- Pour U donnée, s'interroger sur les accroissements de P et de I.
- Pour P donnée, s'interroger sur les accroissements de U et de I.

5. Situation n°5 : Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction

a) Observation du phénomène de diffraction

Sur le trajet horizontal d'un faisceau laser, on place un fil (fixé verticalement sur un cadre support), et on observe l'étalement du faisceau sur un écran situé au-delà du fil.





Quand la lumière rencontre un objet de petite taille, le trajet des rayons lumineux n'est plus rectiligne (voir photo ci-dessous). Le faisceau « s'étale » derrière l'obstacle, et forme sur un écran une figure appelée figure de diffraction (figure ci-dessous). Sur cette figure de diffraction, il est possible de mesurer la largeur L de la tache centrale qui dépend de la taille de l'objet.

b) Observation de la figure de diffraction

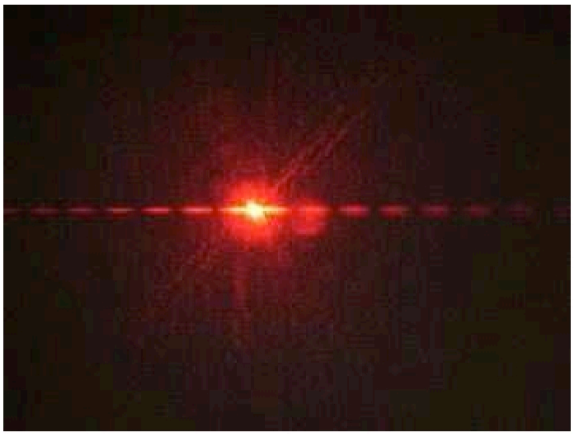


Photo de l'écran

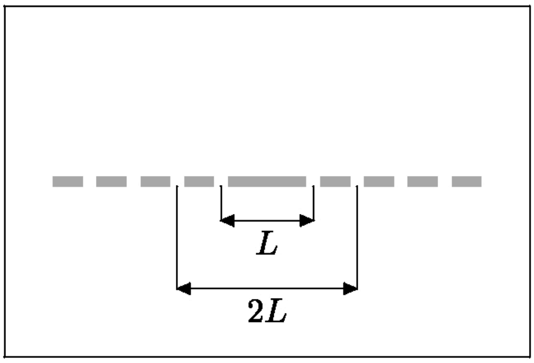


Schéma associé

Les taches lumineuses sont représentées en gris sur le schéma ci- dessus. Le disque central plus lumineux sur la photo n'est pas représenté sur le schéma.

c) Mesures de L avec les fils calibrés

La distance entre le fil et l'écran étant maintenue constante, un groupe d'élèves a réalisé des mesures de L avec une règle graduée au millimètre pour différents fils calibrés de diamètre d. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

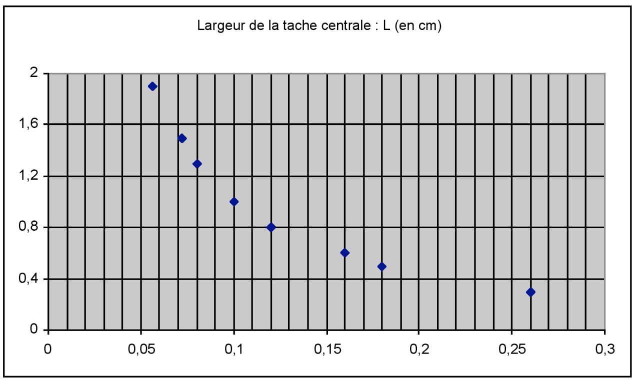
Diamètre du fil : d (en mm)	$0,08$	$0,056$	$0,072$	$0,10$	$0,12$	$0,16$	$0,18$	$0,26$
Largeur de la tache centrale : L (en cm)	$1,3$	$1,9$	$1,5$	$1,0$	$0,8$	$0,6$	$0,5$	$0,3$

Les données expérimentales sont celles obtenues par un groupe d'élèves lors d'une séance de travaux pratiques. Il est possible d'obtenir des mesures plus précises avec un matériel plus perfectionné, mais qui n'est pas celui utilisé en général par les élèves.
On souhaite connaître la mesure du diamètre d'un cheveu : pour cela on remplace le fil par le cheveu d'un élève. La mesure de L donne la valeur 1,2 cm.
Peut-on déterminer l'épaisseur du cheveu en mm ? Si l'élève avait utilisé du gel coiffant, la valeur de L aurait-elle été supérieure ou inférieure à 1,2 cm ?

Remarques

L'attendu d'un élève est que :

- il prenne l'initiative de représenter graphiquement les données expérimentales ;
- il identifie que ces données ne lui permettent pas de répondre immédiatement à la question posée ;
- il s'interroge sur la nature du lien existant entre L et d : L varie en fonction de d. Plus d augmente plus L semble diminuer. Si cela est juste la mesure qui l'intéresse est comprise entre $0,08$ et $0,1$;
- il s'interroge sur la manière de déterminer une valeur approchée de la mesure du diamètre du cheveu et donc de relier deux points du nuage (approximation affine ?).

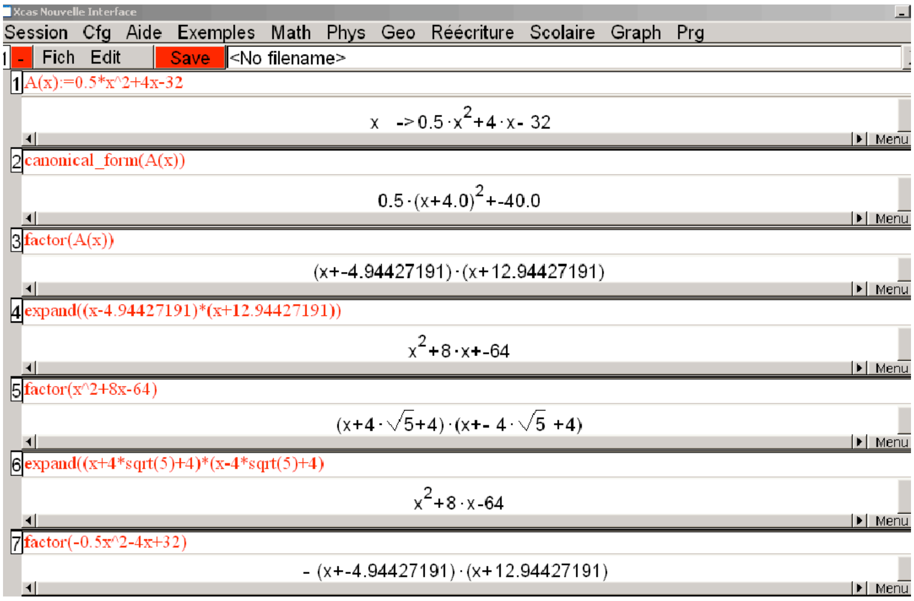


Annexes

Annexe 1. Des exemples de raisonnement à valoriser

Exemple 1 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell - 32 = 0$.

- J'ai besoin de factoriser l'expression pour résoudre cette équation ; je fais appel au logiciel de calcul formel :



> Ce travail sur les expressions algébriques peut être l'occasion de différencier les exigences au niveau du degré de maîtrise technique des élèves : on peut, en effet, s'autoriser à ne demander qu'à certains élèves de déterminer la factorisation, la forme canonique étant donnée (ou non).

- Je résous l'équation en reconnaissant la forme factorisée comme étant celle la mieux adaptée à mon problème : j'ai donc démontré qu'il n'y a qu'une solution au problème et que sa valeur exacte est $4\sqrt{5} - 4$.

  Exemple 2 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell(\ell + 8) - 32 = 0$.

  - Avec ma calculatrice, je trace la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 0,5x(x+8) - 32$.
  - Je conjecture qu'il y a existence et unicité de la solution sur l'intervalle $[0;8]$ car la fonction semble croissante sur cet intervalle.
  - Je sais que sur ma calculatrice je n'observe qu'un dessin « faussé » de la courbe représentative de la fonction et que cela ne suffit donc pas à démontrer les propriétés de cette fonction. Je dois donc démontrer que la fonction est croissante sur $[0;8]$:
    - ◇ f est une fonction polynôme du second degré, je sais d'après les résultats vus en cours qu'elle est croissante puis décroissante ou le contraire.
    - ◇ Je constate que $f(0) = f(-8) = 32$; J'ai deux points de la parabole qui ont même ordonnée . J'en déduis l'axe de symétrie. Les variations changent en -4.
    - ◇ 0 et 2 sont tous les deux plus grands que -4. Or $f(0) = 32$ et $f(2) = -22$ ainsi $f(0) < f(2)$. f n'est donc pas décroissante mais bien croissante à partir de -4. Donc la fonction est bien croissante sur $[0;8]$.

    J'ai démontré qu'il n'y avait qu'une seule solution au problème posé et je peux maintenant en chercher une valeur approchée.

Exemple 3 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à rechercher si la quantité $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell$ peut être rendue la plus grande possible (la plus petite possible) quand ℓ appartient à l'intervalle $[0;8]$.
(techniquement plus exigeant et seulement à la portée de quelques élèves)

- Des essais me permettent de conjecturer que la quantité devient de plus en plus grande ; sa plus petite valeur est 0 (pour $\ell = 0$) et sa plus grande valeur est 64 (pour $\ell = 8$). Autrement dit la fonction $x \mapsto 0,5x^2 + 4x$ est croissante sur $[0;8]$

- Je dois le démontrer :
  - ◇ Je prends deux réels a et b quelconques dans $[0;8]$ avec b plus petit que a. Je veux démontrer que $f(b)$ est plus petit que $f(a)$ soit $0,5b^2 + 4b < 0,5a^2 + 4a$
  - ◇ Or $b < a$ donc $b^2 < a^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0;8]$,
  - ◇ donc $0,5b^2 < 0,5a^2$,
  - ◇ donc $0,5b^2 + 4b < 0,5a^2 + 4b < 0,5a^2 + 4a$ car $b < a$ donc $4b < 4a$ donc soit $f(b) < f(a)$.

  Conclusion : Pour tout b plus petit que a, $f(b)$ est plus petit que $f(a)$.
- J'ai donc bien démontré que la fonction est croissante sur $[0;8]$.

Annexe 2. Des exemples à faire vivre en classe

Exemple 1 :

> Soit x un nombre réel strictement positif. Affirmation :« L'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. » VRAI ou FAUX ?

L'affirmation est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte. Pour répondre à cette question il est nécessaire de préciser explicitement la quantification sous-jacente.

- Si l'affirmation est :

  L'aire d'un carré de côté $x+3$ est ***toujours*** égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3 cela se traduit par l'examen de la proposition :

  « ***pour tout réel*** x strictement positif, on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ »

  la réponse à donner est FAUX. Dans ce cas, donner un contre-exemple suffit pour le prouver .
- Si l'affirmation est :

  On peut trouver une valeur d'un nombre réel strictement positif x pour laquelle l'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. Ou encore

  « ***il existe au moins*** une valeur de x strictement positive pour laquelle on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ ».

  Dans ce cas, démontrer que cette affirmation est fausse nécessite la résolution de l'équation c'est à dire la recherche de toutes les valeurs de x telles que $(x+3)^2 = x^2+9$.

Ce travail d'entraînement à la logique à conduire dans la durée peut se faire par exemple via des questions rapides posées en début de séance.

Exemples :

1. VRAI ou FAUX ?

   Si $x < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x < 2$
   Si $x \leqslant 3$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x \leqslant 3$
   Si $x = 2$ alors $2x+3 = 7$
   Si $2x+3 = 7$ alors $x = 2$
   Si $2x-5 < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $2x-5 < 2$

   Avec des questionnements et des discussions sur les quantifications sous-jacentes.

2. Faire des propositions vraies du style « pour tout réel x, si ... alors ... » en utilisant les énoncés

   $$x^2 = 16,\ x = 4,\ x = -4,\ x = 4 \text{ ou } x = -4,\ x^3 = 64.$$

3. « Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 4$ alors ... »

   a) Compléter la proposition pour qu'elle soit fausse ;

   b) Compléter la proposition pour qu'elle soit vraie.

4. Si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$. VRAI ou FAUX ?

   « Pour tout réel x, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition fausse : le contre-exemple $x = 0$ le démontre.
   « Pour tout réel $x > 0$, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition vraie.

5. Autre exemple de travail possible
Voici le tableau de « signes » d'une fonction :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre aux affirmations suivantes par : VRAI, FAUX, ou par ON NE PEUT PAS SAVOIR.

(a) $f(2) = 6$

(b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions

(c) La fonction f est une fonction affine

(d) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-3;5[$

(e) Le point $A(0;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

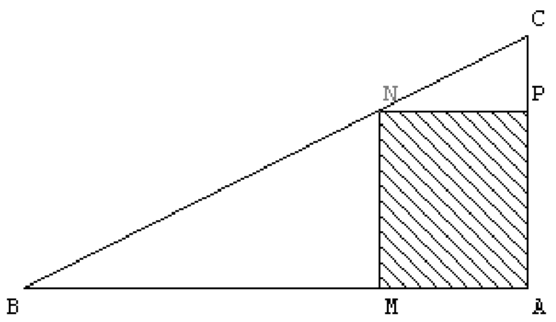
(f) Si $f(1) = -4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

Annexe 3. Des activités rapides

Sous les titres A) à C) qui suivent sont donnés des exemples de questions qui peuvent être posées en activités rapides (pratique qui peut être un rituel de quelques minutes au début de chaque séance).

A) Pour anticiper sur l'articulation entre programme de calcul, formule, nuage de points, tableau de nombres ou la pérenniser

1) Thème 1



BM	aire du quadrilatère
0	0
0,5	1,375
1	2,5
1,5	3,375
2	4
2,5	4,375
3	4,5
3,5	4,375
4	4
4,5	3,375
5	2,5
5,5	1,375
6	0

ABC est un triangle rectangle en A $AB = 6$cm et $AC = 3$cm. M est un point variable du segment $[AB]$

L'aire du quadrilatère $MNPA$ est donnée, en $\mathtt{cm}^2$, par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}BM \times (6 - BM).$$

a) Que vaut l'aire $\mathscr{A}$ si $BM = 2\mathtt{cm}$?

b) Est-il vrai ou faux que l'aire $\mathscr{A}$ est égale à $2,5\mathtt{cm}^2$ si $BM = 5\mathtt{cm}$?

c) Quelle fonction f formalise le lien entre la distance BM et l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère $MNPA$? Quel est son ensemble de définition ?

d) Quelle est l'image de $1,5$ par f ?

e) Les informations dont on dispose permettent-elles de donner le ou les antécédents du nombre $5/2$ par f ? qu'en est-il pour le nombre 0 ?

1) Thème 2

Associer une formule au programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Mettre au carré
- Prendre l'opposé

1) Thème 3

Associer une formule au programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre
- Prendre son inverse
- Multiplier par -5
- Ajouter 7
- Mettre au carré

1) Thème 4

Associer un programme de calcul à la formule $3(x-2)^2+7$.

1) Thème 5

À température constante et pour une quantité de matière donnée, l'état d'un gaz parfait suit la loi de Boyle-Mariotte : $P \times V = k$ où k est une constante, P est la pression du gaz en Pa et V le volume du gaz en m^3.

a) J'observe la pression.
  - Sur quel paramètre vais-je agir ?
  - Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
  - Donner la fonction modélisant cette situation

b) J'observe le volume occupé par le gaz
  - Sur quel paramètre vais-je agir ?
  - Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
  - Donner la fonction modélisant cette situation

1) Thème 6

L'équation d'état d'un gaz parfait est : $PV = nRT$

P : pression en Pa T : température en Kelvin
V : volume en m^3 R : constante du gaz parfait n : quantité de matière en mole

a) n, R et P étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la température à partir du volume ;

b) n, R et T étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la pression à partir du volume

1) Thème 7

On filme le mouvement d'un palet de hockey sur glace et on mesure la distance d qu'il parcourt en fonction du temps. On obtient le tableau suivant :

t en s	$0,04$	$0,08$	$0,12$	$0,16$	$0,2$	$0,24$	$0,28$	$0,32$
d en m	$0,04$	$0,08$	$1,35$	$1,75$	$2,10$	$2,55$	$3,05$	$3,40$

a) On trace un graphique (nuage de points) à partir des données. Donner les coordonnées d'un point placé.

b) On modélise la situation par la fonction f qui à x associe $11x$.
Donner la formule modélisant le lien entre les deux grandeurs t et d.

c) Quelle est la distance parcourue par le palet en $0,2$ s ? Quelle est l'image de $0,2$ par la fonction f ?

d) Estimer le temps au bout duquel le palet aura parcouru 10 mètres.

1) Thème 8

La période T des oscillations d'un pendule dont la longueur du fil est ℓ est donnée par la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

a) Donner un programme de calcul permettant de calculer la période à partir de la longueur.

b) Donner la fonction modélisant cette situation.

B) Pour construire dans la durée la notion de courbe représentative

Remarque : *Ces questions ne sont surtout pas à poser d'un seul coup. En revanche il est fructueux d'y revenir par petites touches. Un jour on peut poser 1.a), 2.c) et 3.b), un autre 1.d), 2.a) et 3.a), etc.*

1. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) L'image de -1 par la fonction f est $2,5$. Donner les coordonnées d'un point de $(\mathscr{C})$.

b) Le point de coordonnées $(0,3)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Traduire cela de plusieurs manières sur la fonction f.

c) Le seul point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 5 a pour abscisse -1. Traduire cette information sur la fonction f.

d) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -2. Traduire cela sur f.

e) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 6. Traduire cela sur f.

f) f transforme le nombre $1,5$ en le nombre 7. Traduire cette information de diverses manières sur f et sur $(\mathscr{C})$.

2 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $2x^2 - 3$.

a) A est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2. Quelle est l'ordonnée de A ?

b) E est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -1. Peut-on donner l'ordonnée de E ?

c) B est un point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée -3. Peut-on donner l'abscisse de B ?

d) K est un point de $(\mathscr{C})$. L'ordonnée de K est égale à 1. Peut-on donner l'abscisse de K ?

e) M est un point de $(\mathscr{C})$. On note x son abscisse. Peut-on donner son ordonnée ?

3 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $\dfrac{2}{x^2+3}\cdot$ Donner l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.

b) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $5 - 2x^2$. Donner la plus grande ordonnée possible d'un point de $(\mathscr{C})$.

c) f est la fonction qui à tout nombre t associe le nombre $(2-t)(3-t)$. Donner les coordonnées de tous les points de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 0.

C) Pour revenir fréquemment sur la caractérisation des points de la courbe représentative d'une fonction

Par exemple :

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

a) Le point A de coordonnées $(-1; -1,5)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

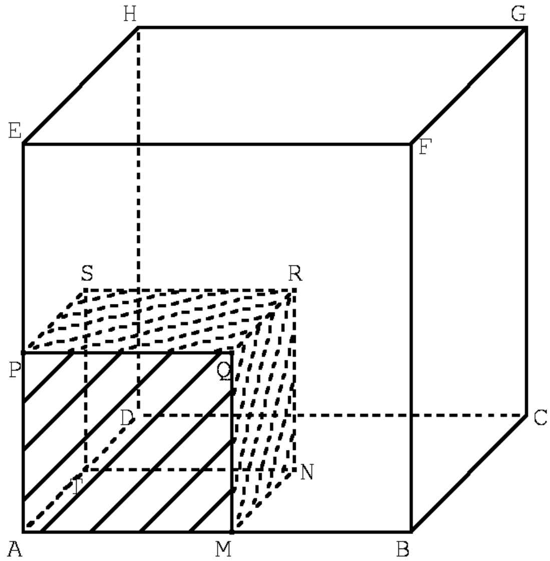
b) Le point B de coordonnées $(1; 1,6)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

Remarque : Ces questions sont l'occasion aussi de faire conduire aux élèves des raisonnements logiques.

- Si $f(-1) = -1,5$ alors le point A de coordonnées $(-1; -1,5)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Ce qui est bien le cas.
- Si le point B de coordonnées $(1; 1,6)$ appartient à $(\mathscr{C})$ c'est que f transforme 1 en $1,6$. Donc je calcule l'image de 1. Or $f(1) = 3/2 = 1,5$ et $f(1)$ n'est donc pas égal à $1,6$. Donc le point B n'appartient pas à $(\mathscr{C})$.

Dans la section 4, figure un extrait du travail réalisé dans le cadre des actions mutualisées SDTICE (Nantes 2009)

Annexe 4. Des Pavés dans un cube



Énoncé :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment $[AB]$ et le point P appartenant au segment $[AE]$ tel que $AM = EP$. On construit alors le pavé droit $AMNTPQRS$ de telle façon que $AMNT$ soit un carré.

On souhaite savoir comment varie le volume du pavé droit $AMNTPQRS$ quand M varie sur le segment $[AB]$.

En posant $AM = x$, l'expression du volume du pavé s'écrit $V(x) = x^2(6-x)$.

En utilisant un traceur de courbe ou un tableur les élèves conjecturent sans problème l'existence d'un maximum atteint pour $x = 4$.
Il s'agit alors de prouver cette conjecture en étudiant le signe de $V(x) - V(4)$ quand x appartient à l'intervalle $[0;6]$.
Cela revient à prouver que :

- pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$, $V(x) \leqslant V(4)$;
- ou encore $V(x) - V(4) \leqslant 0$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$.

Or $V(x) - V(4) = x^2(6-x) - 32$.
Cette expression est une différence et son signe n'est pas facile à étudier. Pour bon nombre d'élèves cet obstacle technique est insurmontable.

Pour autant certains ont bien anticipé sur la forme qu'ils voudraient donner à $V(x) - V(4)$ et montrent qu'ils souhaitent factoriser. Pour cela ils décident de mobiliser le logiciel Xcas dans un but précis : factoriser.

D'autres sont encore hésitants sur la forme à donner. Ils décident alors aussi de mobiliser Xcas et obtiennent plusieurs nouvelles écritures de l'expression $V(x) - V(4)$.

```
1 V(x):=x^2*(6-x)
        x -> x^2·(6-x)                      Menu
2 V(x)-V(4)
        x^2·(6-x)-32                        Menu
3 expand(V(x)-V(4))
        -x^3 +6·x^2 -32                     Menu
4 factor(V(x)-V(4))
        -(x-4)^2·(x+2)                      Menu
```

Suit alors un travail de réflexion sur ces différentes écritures : quelle est l'écriture la plus adaptée à l'étude du signe de $V(x) - V(4)$?
Discussions intéressantes ?
Dans la classe le consensus se fait et la forme factorisée est choisie : $V(x) - V(4) = -(x+2)(x-4)^2$. Tous sont alors en capacité de finaliser la preuve.

Remarques :

- La stratégie de résolution du problème est entièrement restée ***à la charge de l'élève***.
- Le calcul formel a permis de générer plusieurs écritures d'un polynôme du troisième degré (obtenir ces différentes écritures dépasse le degré de maîtrise technique attendu d'un élève de seconde).
- C'est bien à l'élève qu'est laissé le soin d'analyser les différentes écritures obtenues et de ***choisir l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème*** (l'intelligence du calcul lui est donc laissée).
- Le calcul formel exécute une factorisation trop difficile pour un élève de seconde, mais ***l'élève a identifié son besoin de calcul*** puis il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature (j'ai besoin d'une forme factorisée ou je me demande quelle forme serait la mieux adaptée) mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.