Rapport sur les ateliers

Raisonnement, logique et preuve dans les nouveaux programmes de fin de collège et lycée

et

Situations de recherche pour la classe,

proposés aux journées nationales de l'APMEP 2011 à Grenoble

Ces deux stages émanent des travaux conduit depuis quelques années par le groupe *« Raisonnement, Logique et Preuve »* de l'IREM de Grenoble. Le groupe est constitué de Denise Grenier (enseignante-chercheuse, Institut Fourier, UJF – responsable du groupe), Yvan Bicaïs (enseignant, collège Le Massegu, Vif), Charlotte Fabert (doctorante, Institut Fourier, UJF), Martin Deraux (enseignant-chercheur, Institut Fourier, UJF) et Jean-Baptiste Meilhan (enseignant-chercheur, Institut Fourier, UJF).

Ces deux stages, bien qu'indépendants, se fondent sur des constats communs et proposent des approches complémentaires de l'enseignement du raisonnement et de la logique mathématique, et leurs mise en œuvre en classe (au collège comme au lycée, mais aussi à l'université).

Introduction

Notre travail sur le raisonnement et la logique (au collège et lycée) a débuté avec l'étude de la rubrique « notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée) » du programme 2009 pour la classe de seconde. Cette rubrique méritait d'être étudiée pour plusieurs raisons :

– elle est apparue comme « nouvelle » pour les enseignants et certains d'entre eux ne se sentaient pas prêts pour la mener à bien dans leurs classes ;
– elle a une vraie place dans les mathématiques au lycée, puisqu'elle est reprise telle quelle dans les programmes de 1ère S et ES (et récemment aussi dans les programmes de Terminale S en consultation) ;
– enfin, et ce n'est pas la moindre des raisons, elle contient des objectifs indispensables pour faire des mathématiques, tels que « savoir utiliser différents types de raisonnements ».

Certains des savoir-faire cités ne sont d'ailleurs pas vraiment « nouveaux ». Ainsi, au collège, on enseigne déjà différents types de raisonnements (programmes 2008), tels la disjonction des cas, le raisonnement par l'absurde, et de plus, il y a longtemps qu'on fait faire de courtes démonstrations aux élèves de 4ème et 3ème. Ce qui est réellement nouveau, ce sont les éléments et notations de base de la théorie des ensembles, certains éléments de logique (connecteurs), les quantificateurs, la négation d'une proposition, la distinction proposition directe/réciproque/contraposée. Sur ces derniers points, ce que proposent le document ressources sur ce thème et les quelques manuels édités, va donc jouer pour les enseignants un double rôle de formation et d'appui pour la classe.

Ces objectifs sont très ambitieux. Ils le sont d'autant plus que le programme dit très clairement que cette rubrique « ne doit pas faire l'objet de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire ». Ce programme préconise donc que la logique doit être enseignée en même temps que d'autres notions mathématiques, nouvelles pour les élèves (puisque ce sont des chapitres du programme) et donc probablement difficiles pour eux. Ce programme est-il réalisable ? Et de quelle logique s'agit-il ?

Notre pratique quotidienne en tant qu'enseignants (universitaire ou secondaire) nous montre que

l'apprentissage du raisonnement ne va pas de soi, et qu'il n'est pas acquis chez les étudiants en sciences, au début de l'université. C'est encore plus vrai pour la logique, même de base, qui est celle décrite dans les nouveaux programmes de lycée. Pour atteindre ces objectifs, il faut se donner les moyens réels de les réaliser. Or, il nous semble utopique de croire – et malhonnête de laisser croire – qu'on peut enseigner ces éléments au fil de chapitres, en même temps que des notions nouvelles pour lesquelles les élèves rencontrent assez majoritairement des difficultés.
Pour cela, nous pensons qu'il est essentiel, à certains moments de l'enseignement, de proposer des problèmes où les seules connaissances en question sont celles liées au raisonnement et à la logique.

Problèmes de Logique

Lors de la première partie du stage « *Raisonnement, logique et preuve dans les nouveaux programmes de fin de collège et lycée* », nous avons donc pris le temps d'exposer les constats et objectifs présentés ci-dessus, et de discuter ces points qui nous semblent fondamentaux avec les enseignants.
Le diaporama ayant servi de support à cette discussion est disponible sur le site de l'IREM de Grenoble (*http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/*). Outre l'analyse du statut du raisonnement et de la logique dans les programmes, et les questions qu'ils soulèvent, la présentation incluait une dose importante de rappels sur des éléments de logique : approche ensembliste, éléments de logique formelle, logique des proposition et logique « naturelle », raisonnement déductif, connecteurs logiques, négation.
Ces quelques rappels, sur des notions parfois délicates, ont bien mis en évidence le caractère ambitieux de ces nouveaux programmes de collège et lycée, mais aussi leur nécessité. Quelques exemples d'erreurs classiques d'étudiants (sur la négation d'une implication, en particulier) ont aussi été présentés.

La seconde partie du stage a consisté en un travail par petit groupe sur trois courts problèmes de logique choisis pour cet atelier (reproduis ci-dessous). Partant, à nouveau, du constat qu'un élève ne peut dans le même temps construire les savoir-faire nécessaires à l'activité mathématique et apprendre une notion nouvelle (forcément complexe pour lui), notre groupe IREM a en effet préparé des petits problèmes de logique mettant en jeux les divers rouages du raisonnement et de la logique mathématique dans un contexte « peu mathématisé ».

Après une phase de recherche par groupe, les participants à l'atelier ont proposé leurs méthodes et solutions. Puis la discussion a visé, pour chaque problème, à identifier les notions logiques et les types de raisonnements en jeux. Il est apparu que chacun des trois exercices remplissait des objectifs bien distincts.

Exercice A
Une boite contient des pièces carrées et des pièces triangulaires. Ces pièces sont soit rouges soit vertes. On sait que toutes les pièces carrées sont rouges. Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies.

- *Il n'y a que les pièces carrées qui sont rouges.*
- *Il n'y a aucune pièce carrée et verte.*
- *Toutes les pièces triangulaires sont vertes.*
- *Toutes les pièces rouges sont carrées.*

- *Toutes les pièces vertes sont triangulaires.*

Ici, l'énoncé a été (volontairement) laissé ambigu, afin d'amener la discussion de l'atelier sur les enjeux logiques sous-jacents (en particulier, la quantification universelle). Faut-il donner une réponse portant sur l'ensemble des boites satisfaisant ces conditions, ou en choisir une pour travailler ? Peut-on toujours décider si une phrase est vraie dans chacun des cas ?

Exercice B

Arthur a pensé à trois nombres entiers a, b et c, il ne dit pas lesquels. Mais il donne pour indications quatre phrases, en affirmant qu'une seule d'entre elles est fausse. Pouvez-vous trouver laquelle, et combien de nombres impairs a choisi Arthur.

- *a est impair ou b est pair.*
- *c et b sont de même parité.*
- *c et a sont pairs.*
- *b est pair.*

Cet exercice fait intervenir des connecteurs logiques basiques (et/ou). En essayant de déterminer quelle phrase est fausse, on peut raisonner par l'absurde, ce qui nous amène à travailler la négation des ces connecteurs. On pourra aussi alors remarquer que la dernière information donnée est ici la plus facile à manipuler, alors que l'on est naturellement porté à exploiter les hypothèses dans l'ordre dans lequel elles nous sont proposées.
Ce problème a aussi été l'occasion de revenir sur les différents modes de résolution, et de discuter de leur efficacité. De nombreux participants à l'atelier ont en effet préféré une approche par arbres (exhaustion des cas) à un raisonnement déductif.

Exercice C. (Cent déclarations)
Sur une (grande) feuille de papier, cent déclarations sont écrites.
La première dit : « sur cette feuille, il n'y a qu'une seule fausse déclaration. »
La seconde dit : « sur cette feuille, il y a deux et seulement deux fausses déclarations. »
La troisième dit : « sur cette feuille, il y a trois et seulement trois fausses déclarations. »
et ainsi de suite jusqu'à la centième, qui dit : « sur cette feuille, il y a cent et seulement cent fausses déclarations. »
Combien de déclarations de cette feuille sont-elles vraies ?

Ce dernier problème est plus difficile. En particulier, contrairement à un exercice comme le précédent, on n'envisagera pas d'exhaustion des cas. En revanche, il peut être instructif d'attaquer le problème en regardant une version simplifiée, avec, disons, seulement quatre ou cinq phrases. Comme souvent, l'étude des petits cas peut amener des conjectures intéressantes, ainsi que des éléments de preuves. Dans ce cas, on peut arriver ainsi à l'observation qu'il ne peut y avoir deux déclarations vraies sur cette feuille...

Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Un autre axe de travail de notre groupe IREM, qui fut l'objet du second stage, concerne les SiRC[1], qui sont proposées comme un des outils pertinents pour l'apprentissage en classe de la démarche

1 Les SiRC sont construites et étudiées depuis de nombreuses années par l'équipe de Recherche Maths-à-Modeler de l'Université Joseph Fourier.

mathématique, du raisonnement et de la logique.
Dans la première partie du stage, nous avons donc donné une caractérisation détaillée de cette notion, qui était une version légèrement modifiée de la définition initiale due à Payan-Grenier (2003) :

1. *Une SiRC s'inscrit dans une démarche de recherche*.
   Il ne s'agit pas d'un problème résoluble immédiatement par une application directe d'un théorème ou d'une formule du cours (du type *« calculer ... »*, *« résoudre ... »*). Une SiRC propose un problème de façon ouverte. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues – non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs - va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.
2. *La question initiale est facile d'accès, et ce a différents niveaux.*
   La question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.
3. *Des stratégies initiales existent,*
   sans que soient indispensables des prérequis ou expériences spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles, permettant aux élèves de s'approprier le problème par des stratégies simples (essai/erreur, étude de petits cas...).
4. *Des conjectures existent, et sont non-évidentes.*
   Les stratégies initiales ne suffisent pas à résoudre l'intégralité du problème, mais conduisent l'élève à se forger une opinion, à prendre position par rapport au problème.
5. Plusieurs stratégies de résolution existent.
   Différentes méthodes, mais aussi différentes notions mathématiques en jeu...

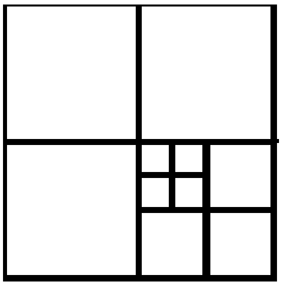
Il est frappant de constater comme ces critères simples décrivent avec exactitude les mécanismes classiques de la recherche mathématique, telle que pratiquée au quotidien par les mathématiciens. Sans en être le but premier, les SiRC ont aussi pour vocation de donner aux élèves cette vision « active » des mathématiques, où toute question résolue en soulève de nouvelles.
L'intérêt de ces SiRC est criant dans le contexte de la valorisation/vulgarisation, dans la mesure où elles donnent une idée beaucoup plus réaliste de l'activité d'un chercheur en mathématique que, par exemple, un exercice issu d'un manuel scolaire.
En outre, il semble pertinent d'utiliser ces problèmes sans prérequis ou présupposition de connaissances, en particulier dans le contexte de la réintroduction et clarification de la logique et du raisonnement dans les nouveaux programmes du collège/lycée. L'importance de l'expérimentation, de la recherche de conjectures est en effet soulignée de façon forte dans les nouveaux programmes (particulièrement pour le collège, mais aussi jusqu'en terminale).

La seconde partie de l'atelier à consisté en l'étude d'un exemple concret de SiRC, par une expérimentation suivie d'une discussion critique.
La situation sur laquelle nous avons travaillé est celle dite du « Pavages d'un carré par des carrés ». Elle a été développée ces dernières années par notre groupe IREM, et a fait l'objet de diverses expérimentations (Fête de la Science, ainsi qu'au collège Le Massegu, Vif, dans la classe d'Yvan Bicais). L'énoncé est le suivant :

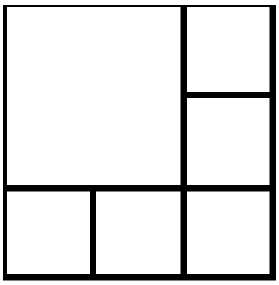
Pour quelles valeurs (entières) de n *peut-on paver un carré par* n *carrés ?*

On fixe donc un carré, et l'on veut étudier les découpages de ce carré en un certain nombre de carrés plus petits, sans recouvrement (les intérieurs des petits carrés doivent être disjoints, et leur réunion doit être le grand carré tout entier).

Le travail a été proposé aux participants par petits groupes, typiquement 4 personnes.
Nous ne donnerons pas les détails de la résolution ici. Mais nous avons vu lors de cet atelier les étapes « habituellement » observées : on trouve facilement que n=1, n=4 sont possibles, alors que les autres « petites » valeurs de n semblent difficiles à réaliser. On est de fait rapidement amené à conjecturer que n=2, n=3, n=5 sont impossibles, en donnant des preuves plus ou moins convaincantes pour cela.
On essaye alors de deviner quelles valeurs sont possibles, ce qui peut être l'occasion de réfléchir à la notion de preuve (un dessin suffit-il ?) En utilisant le découpage de base du carré en 4 morceaux (découpés par les deux médianes), et en l'itérant sur les petits carrés d'un découpage donné, on voit que s'il existe un découpage avec n carrés, alors il en existe aussi un avec n+3 carrés :



En particulier, il existe un découpage pour n=1+3k, k un naturel quelconque. Il peut être tentant de penser que comme n=2 et 3 sont impossibles, les nombres de la forme 3k ou 2+3k ne devraient pas apparaître comme nombre de petits carrés dans le découpage... On pourra alors exhiber le



dessin ci-dessus, et éventuellement observer qu'il se généralise pour donner des découpages en 1+(2k+1) carrés, k naturel quelconque. On laissera ici au lecteur le plaisir de chercher la solution complète du problème !

Lors du stage, chaque groupe a présenté les (multiples) pistes explorées, les conjectures faites et les résultats obtenus. Il fut frappant de constater la diversités des types de réponses proposées.
Nous sommes enfin revenus sur les notions mathématiques et logiques mises en jeu à travers la situation, puis sur la pertinence et la faisabilité d'une telle activité en classe. Ceci a naturellement conduit à un débat sur la question du volume horaire nécessaire à ces types de situation et à la nécessité de « boucler le programme ». Yvan Bicaïs a notamment pu partager sur ce point son expérience (positive !) dans ses propres classes. Nous sommes aussi revenus sur le double objectif des programmes, le raisonnement logique, la mise en situation de recherche des élèves – et plus généralement ce que sont les véritables objectifs de l'enseignement des mathématiques – et la pertinence des SiRC à cet égard.