Des maths sur les rails ?

Fabien Aoustin

L'Inspection Générale de mathématiques, par l'intermédiaire des IPR, a envoyé à l'ensemble des professeurs de mathématiques un courrier qui se terminait par : « Concernant le baccalauréat, dès la session 2015 et pour les séries S, ES-L, STI2D-STL, STMG, l'un des exercices proposés sera conçu dans l'esprit de la version « évaluation avec prise d'initiative », telle que présentée dans la banque d'exercices publiée sur EDUSCOL. ».*
L'expérience de Fabien Aoustin présentée dans cet article devrait enrichir cette base d'exercices : l'autonomie, l'initiative et la créativité des élèves sont encouragées, valorisées, évaluées.

Fabien Aoustin *enseigne au lycée Condorcet de Saint-Quentin dans l'Aisne.*

Étant lycéen et jeune étudiant, les mathématiques m'amusaient et me semblaient très faciles. Puis un professeur de licence m'a donné personnellement un problème pour les vacances : *démontrer que s'il existe un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, alors il en existe une infinité*. Ce n'était pas évident mais c'est là que j'ai découvert ce qu'était vraiment une activité mathématique : j'ai adoré. Et j'ai beaucoup appris.

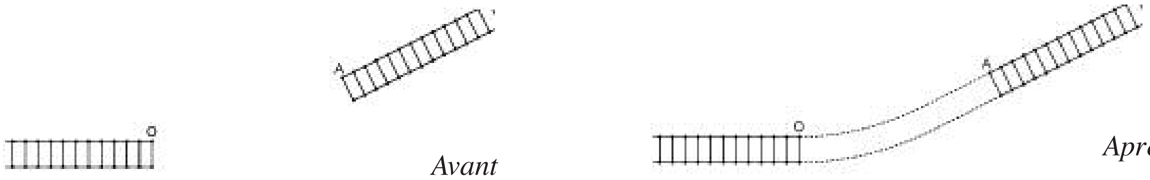
Depuis que j'enseigne les mathématiques, j'ai à cœur d'accorder une certaine importance à la résolution de problèmes. Certains appellent cela des « problèmes ouverts », d'autres des « tâches complexes ». Discuter du vocabulaire idoine m'intéresse assez peu ici. Ce que je cherche à développer chez mes élèves au travers de ce type de travail, c'est une certaine capacité à chercher, à se débrouiller seul face à une difficulté et à entrer dans une démarche mathématique rigoureuse en faisant preuve de créativité. C'est aussi une excellente occasion de travailler la qualité de l'expression écrite. C'est également un moyen de renforcer l'idée chez nos élèves que si les exercices calculatoires sont nécessaires (avec un bagage technique suffisamment étoffé et maîtrisé, on peut profiter d'une plus grande liberté dans les prises d'initiative), faire des maths c'est avant tout résoudre des problèmes.

Le problème, dit « Problème du train » a été donné en devoir à la maison à des élèves de 1ère S après un premier chapitre relatif à la notion de dérivée. Les élèves ont un petit peu plus de deux semaines pour rendre une copie individuelle. Entre temps, de nouvelles connaissances ont été développées, notamment en ce qui concerne les études de fonctions via la dérivation.

** Cette banque est accessible sur la page : http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html où vous avez l'habitude de trouver les documents ressources (le lien pour télécharger le document se trouve dans la rubrique "Ressources pour le lycée", chapitre "classe terminale générale et technologique", sous le nom Exercices pour les classes de terminale S, ES, STMG, STI2D.*

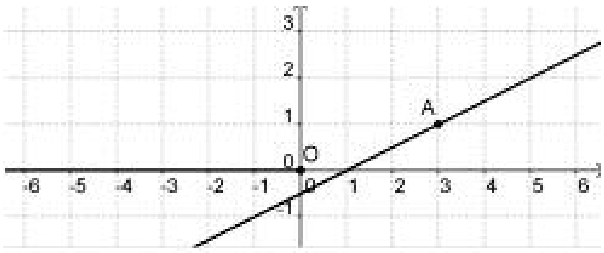
Énoncé du problème

Le but de ce problème est de raccorder deux lignes de chemin de fer comme dans l'exemple décrit dans les schémas ci-dessous. Pour que le train puisse passer, il est nécessaire que le raccordement ne contienne pas de point anguleux et qu'il soit tangent aux deux tronçons préexistants.



Avant *Après*

Pour simplifier le problème on assimile la ligne de gauche à une demi-droite d'équation $y = 0$ avec $x \leq 0$ et la ligne de droite à une droite D d'équation $y = 0,5\,x - 0,5$.
On admettra que le point A de coordonnées (3 ; 1) représente une gare que le train doit pouvoir desservir en arrivant du tronçon de gauche.
L'unité utilisée dans le graphique ci-dessous est le kilomètre.



Problème : Donner une fonction (dérivable) ou un procédé géométrique permettant de décrire un raccordement possible répondant aux contraintes décrites ci-dessus.

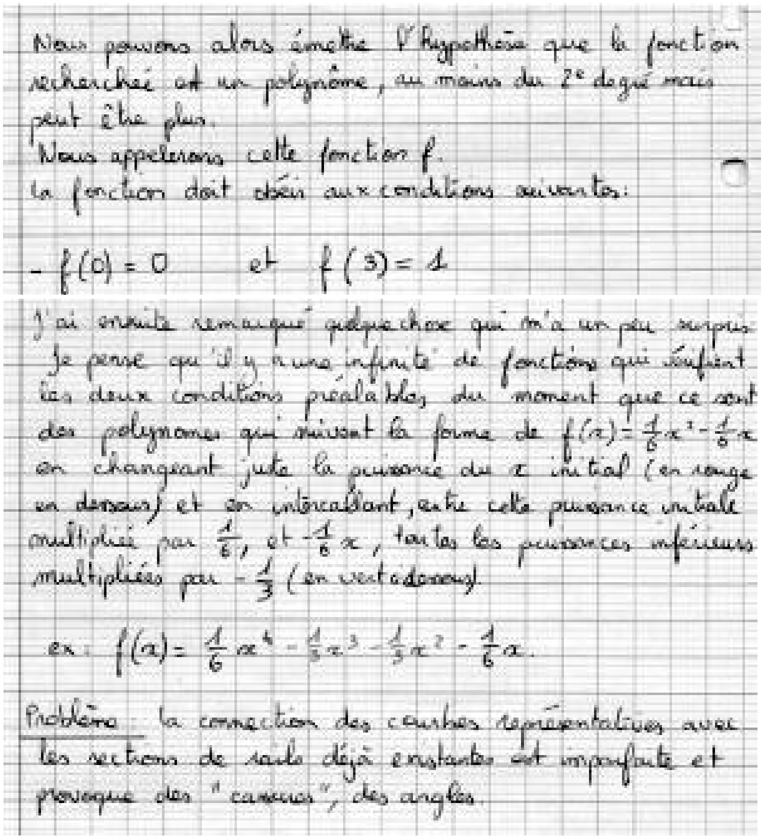
L'habillage du problème n'est qu'un prétexte et il convient de le dire aux élèves. Évidemment, les réponses attendues ne sont pas celles qui seraient effectivement mises en pratique.

Les élèves disposaient également d'une grille résumant les grands objectifs d'un tel travail et les critères pris en compte (voir page 15).

Les élèves ont des idées

À la lecture des travaux rendus, plusieurs pistes émergent. Voici celle d'Arthur, celles de Claire et Guillaume figurent page suivante.

Copie d'Arthur


Nous pouvons alors émettre l'hypothèse que la fonction recherchée est un polynôme, au moins du 2e degré mais peut être plus.
Nous appelerons cette fonction f.
la fonction doit obéir aux conditions suivantes:

- $f(0) = 0$ et $f(3) = 1$

J'ai ensuite remarqué quelquechose qui m'a un peu surpris. Je pense qu'il y a une infinité de fonctions qui vérifient les deux conditions préalables, du moment que ce sont des polynomes qui suivent la forme de $f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$ en changeant juste la puissance du x initial (en rouge en dessous) et en intercallant, entre cette puissance initiale multiplié par $\frac{1}{6}$, et $-\frac{1}{6}x$, toutes les puissances inférieurs multipliées par $-\frac{1}{3}$ (en vert dessous).

ex : $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$.

Problème : la connection des courbes représentatives avec les sections de rails déjà existantes est imparfaite et provoque des "cassures", des angles.

S'en suit une recherche sur les conditions de tangence.

Copie de Claire

On cherche une fonction de type parabolique

$f(x) = ax^2 + bx + c$ où $c = 0$ car $f(0) = 0$

Cette fonction doit passer par $A(3\,;1)$ donc $f(3) = 1$

Sa tangente en $x = 3$ doit être $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

Calculons donc en 3 la tangente de $f(x) = ax^2 + bx$

$f'(x) = 2ax + b$

L'équation de la tangente est :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
$$y = (6a+b)(x-3) + 9a + 3b$$
$$y = (6a+b)x - 18a - 3b + 9a + 3b$$
$$y = (6a+b)x - 9a$$

or $y = 0{,}5x - 0{,}5$ donc $\begin{cases} 6a + b = 0{,}5 \\ 9a = 0{,}5. \end{cases}$

$9a = 0{,}5 \iff \boxed{a = \dfrac{0{,}5}{9} = \dfrac{1}{18}}$

$6a + b = 0{,}5 \iff \dfrac{6}{18} + b = 0{,}5$

$b = 0{,}5 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1{,}5 - 1}{3} = \dfrac{0{,}5}{3}$

$\boxed{b = \dfrac{1}{6}}$

donc $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{x}{6}}$ est une fonction permettant un raccordement possible répondant aux contraintes demandées.

Copie de Guillaume

Pour relier les 2 lignes dont les extrémités sont exprimées par les points $O(0;0)$ et $A(3;1)$ nous devons chercher un polynôme de degré 2 à la courbe représentative de sommet O, passant par A.

Nous nommerons f ce polynôme définie sur $[0;3]$,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$f(x) = a(x-0)^2 - 0$ puisque $O(0;0)$

$f(x) = ax^2$

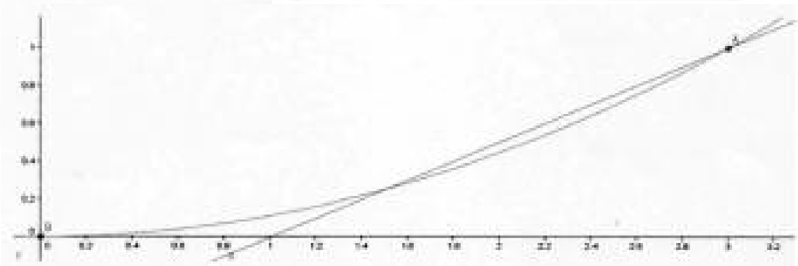
Or $f(3) = 1 \Leftrightarrow a(3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 9a = 1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$

Ainsi, nous obtenons la fonction,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{9}x^2}$$



Cependant, pour que le raccordement soit parfait en A, il faudrait que la tangente en 3 ait pour équation $y = 0{,}5x - 0{,}5$ tout en gardant O pour sommet de C_f.

Ces objectifs semblent irréalisables avec un polynôme du second degré.

Nouvelle donne

Une fois toutes les copies lues et annotées, j'ai pu constituer neuf groupes de trois ou quatre élèves de niveau homogène qui en étaient plus ou moins au même point dans leurs recherches.

Chaque groupe, rassemblé sur un îlot, a récupéré une pochette dans laquelle les élèves découvraient un nouvel énoncé ainsi que leurs copies annotées ; ils ont pu ainsi voir ce qui avait bloqué, faire le lien avec les nouvelles questions posées, etc.

Les élèves ont alors disposé d'une heure pour répondre à un nouvel ensemble de consignes plus directives et ont pu me poser des questions.

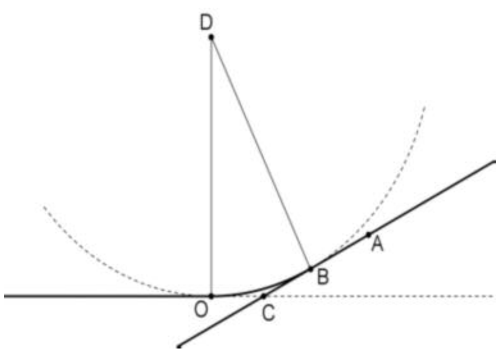
Je suis allé discuter en priorité avec les élèves des îlots ayant eu du mal dans le devoir maison afin qu'ils puissent démarrer (deux îlots étaient concernés). J'ai mis en avant que les idées qu'ils allaient exploiter venaient de camarades de la classe. Les autres groupes ont commencé sans intervention de ma part.

La note attribuée pour cette première partie (4 points sur 10) n'a pas été écrite sur la copie, je l'ai conservée.

Voici les trois énoncés distribués, plusieurs îlots ayant le même.

Énoncé n° 1

On suppose que la solution du problème est un arc de cercle, comme sur le dessin ci-après.



On admettra que dans le repère de l'énoncé initial, les coordonnées du point C sont bien (1 ; 0).

Le but est de chercher le rayon du cercle et les coordonnées de son centre D. On rédigera avec grand soin.

1a) On note x l'abscisse de B. Donner l'ordonnée de B en fonction de x.

1b) En déduire les coordonnées de B.

2) Utiliser le produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux pour répondre au problème (c'est-à-dire trouver le rayon du cercle et les coordonnées de son centre).

Énoncé n° 2

On suppose que la courbe représentative C_f d'une fonction f est solution du problème.

On précise que l'axe des abscisses est tangent à C_f en O et que la droite D est tangente à C_f au point A.

On suppose ici que f est une fonction polynôme de degré 3. Autrement dit, il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

En utilisant toutes les données de l'énoncé, écrire des équations permettant de déterminer ces quatre coefficients. Vérifier ensuite si toutes les contraintes sont remplies. On rédigera avec grand soin.

Énoncé n° 3

On suppose que la courbe représentative C_f d'une fonction f est solution du problème.

On précise que l'axe des abscisses est tangent à C_f en O et que la droite D est tangente à C_f en un point B d'abscisse β avec $\beta \in [0; 3]$.

On suppose ici que f est une fonction polynôme de degré 2. Autrement dit, il existe trois réels a, b, et c tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

En utilisant toutes les données de l'énoncé, écrire des équations permettant de déterminer les réels a, b, c et β.

Vérifier ensuite si toutes les contraintes sont remplies. On rédigera avec grand soin.

J'ai ramassé une copie par îlot. Tous les groupes n'ont pas répondu aux questions avec une parfaite exactitude. Certains groupes n'ont pas réussi à aller jusqu'au bout des questions. Mais plusieurs groupes sont sortis avec une solution valide (même si tout n'était pas bien rédigé ou justifié).

J'ai fait une brève présentation des solutions trouvées par les élèves peu de temps après sans m'attarder sur les calculs. Si j'avais disposé de plus de temps, j'aurais demandé aux élèves de présenter eux-mêmes les fruits de leurs recherches afin de travailler l'expression orale. Un document écrit présentant les différentes idées a été distribué avec les copies finales. Il reprenait la rapide présentation orale ; rien d'original et je ne sais pas si ce document a été étudié dans le détail par les élèves (je ne crois pas...).

L'évaluation globale portait donc d'une part sur la copie collective basée sur une démarche guidée et d'autre part sur la première copie individuelle. Les attendus dans ces deux copies étaient bien sûr bien différents.

Pour aller plus loin

Le groupe des élèves les plus avancés (qui avaient proposés des solutions correctes et bien rédigées dès la première étape, modulo une ou deux erreurs de calcul faciles à rectifier) devaient répondre à l'énoncé n° 3, auquel aucun d'entre eux n'avait pensé, et chercher à démontrer la « conjecture d'Arthur » à l'aide de l'énoncé suivant.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie sur R par :
- pour $n \geq 3$:

$$f_n(x) = \frac{1}{6}x^n - \frac{1}{3}x^{n-1} - \frac{1}{3}x^{n-2} - \ldots - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x.$$

- pour $n = 2$: $f_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x.$

Ainsi : $f_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x.$

$$f_4(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x.$$

$$f_5(x) = \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x.$$

Démontrer la conjecture suivante :
Pour tout entier $n \geq 2$, $f_n(3) = 1$.

Le chapitre sur les suites n'avait pas encore été traité ; pour s'aider, les élèves disposaient d'un rappel sur les suites extrait de l'ouvrage parascolaire « L'année du bac ES » aux éditions Bordas.

L'énoncé n°3 les a occupés un certain temps et, il faut bien le dire, j'ai parfois du mal à motiver les élèves qui en sont à leur huitième heure de cours à chercher une nouvelle solution alors qu'ils en ont déjà une !

J'aurais beaucoup aimé reprendre le problème lors du chapitre sur les suites mais hélas, le temps a manqué. C'est un grand regret car c'était quand même extraordinaire qu'un élève propose un tel exercice !

Bilan

Il est très positif. Comme avec presque toutes les « situations problèmes », les élèves ont été durablement marqués par cette recherche ; ils l'évoquaient encore en terminale. Ils y ont vu un aboutissement au travail mené sur les tangentes et le nombre dérivé et ont saisi une fois de plus la nécessité de bien asseoir quelques fondamentaux techniques. Les concepts en jeu n'en étaient que plus clairs.

Multiplier ce genre d'activités est hélas chronophage, aussi bien en classe au vu des moyens horaires qui nous sont accordés, qu'en travail personnel pour le professeur. Cependant, j'ai la chance d'être dans un établissement dans lequel nous pouvons suivre des classes de première en terminale. Ainsi, une fois les habitudes prises et les enjeux de ces activités bien compris, il est aisé d'en entretenir la pratique. Les élèves sont alors très heureux de voir s'élargir la palette d'outils mathématiques dont ils disposent et voient leur autonomie grandir face à la résolution de ces problèmes.

NOM Prénom :

PROBLÈME DU TRAIN – Grille d'évaluation.

Vous devez résoudre le problème « du raccordement d'une ligne de chemin de fer » en expliquant clairement votre démarche.

Peut-être n'arriverez-vous pas à trouver une solution : ce n'est pas grave !

Ce qui est évalué ici, c'est votre capacité à vous investir dans un travail de recherche, à mobiliser vos connaissances, à réfléchir, à mettre en place une démarche mathématique et scientifique correcte. C'est aussi l'occasion d'évaluer votre capacité à communiquer par écrit.

Voici les cinq principales compétences évaluées dans ce travail. Il est possible que, suivant votre démarche, l'une ou l'autre de ces compétences revête une importance plus ou moins grande. L'évaluation sera donc adaptée à chaque cas. Certaines de ces compétences peuvent parfois se recouper. Certains des critères donnés dans la colonne de droite ne sont donnés qu'à titre d'exemple et dépendent de la démarche suivie.

À vous de réveiller votre créativité et de suivre la voie qui vous paraît la plus prometteuse !

Expérimenter	• Mener des essais concrets. • Mettre au point des schémas propres, lisibles et complets. • Utiliser à bon escient des outils informatiques ou la calculatrice.
Modéliser	• Tenir compte des contraintes de la situation modélisée. • Bien introduire les outils mathématiques utilisés. • Exploiter des connaissances vues en classe. • Utiliser à bon escient des outils informatiques ou la calculatrice.
Calculer	• Bien choisir ses techniques de calcul. • Appliquer sans erreur les méthodes de calcul classiques et être en mesure de les vérifier. • Utiliser à bon escient des outils informatiques ou la calculatrice.
Raisonner	• Présenter des conjectures. • Éprouver ses conjectures. • Prendre du recul sur les résultats obtenus, savoir les interpréter et les exploiter. • Faire clairement la distinction entre une valeur exacte et une valeur approchée. • Faire clairement la distinction entre un résultat vérifié et un résultat démontré.
Communiquer par écrit	• Bien présenter sa copie, écrire lisiblement. • Écrire sans (ou avec très peu de) fautes d'orthographe et de grammaire. • Utiliser un vocabulaire précis et adapté. • Rédiger une conclusion ou une réponse au problème, ou bien un bilan des stratégies mises en œuvre, une conjecture qui reste à travailler ou d'autres propositions d'idées.