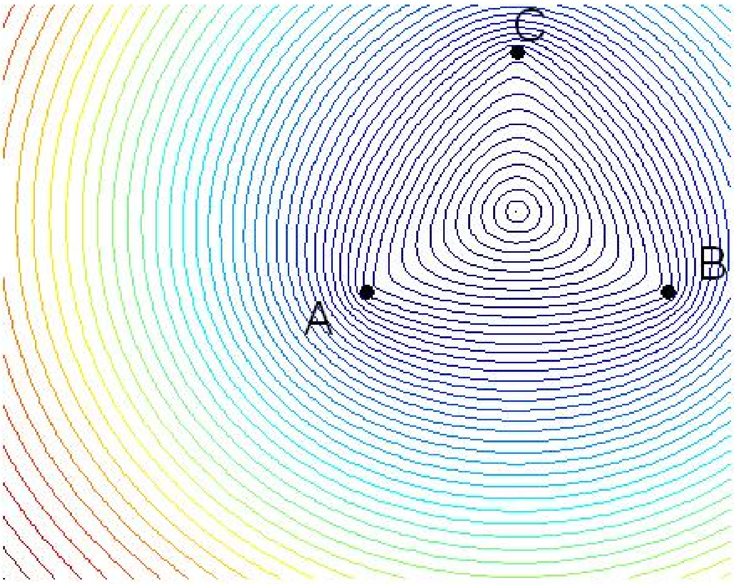
Quelques résultats graphiques pour le problème à 3 foyers : AM+BM+CM=constante

Julien Lefèvre

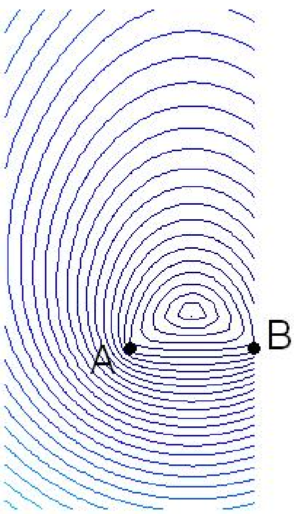
Je représente les lignes de niveaux de l'application M -> AM+BM+CM
Ca donne véritablement un aspect « empreinte digitale » ! De là à oser un théorème du genre :
« Toute empreinte digitale est, dans un certain sens, un sous-ensemble fini de lignes de niveaux d'une application M -> $\sum_{k=1}^{n} A_k M$ »… réponse à la fin !

1) <u>Cas équilatéral simple</u>

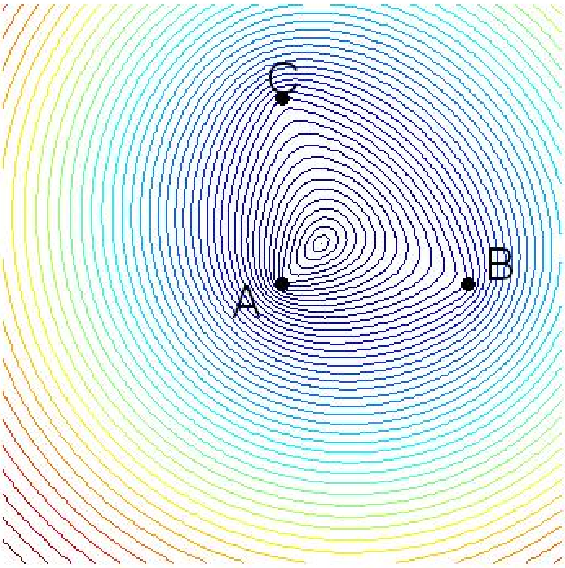


2) <u>Triangle isocèle</u>

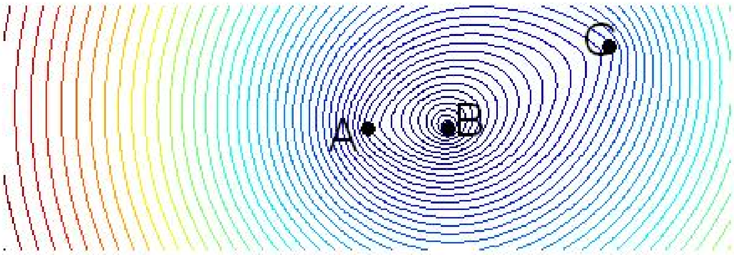
Si l'angle des cotés égaux (C) est très aplati



3) Triangle rectangle

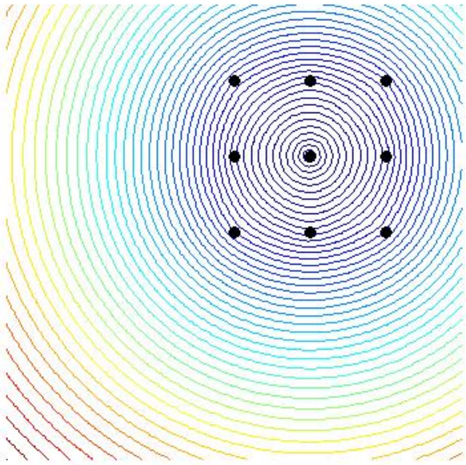


4) Quelques cas particuliers

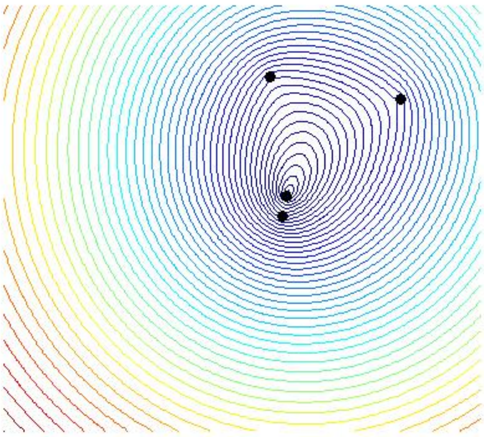


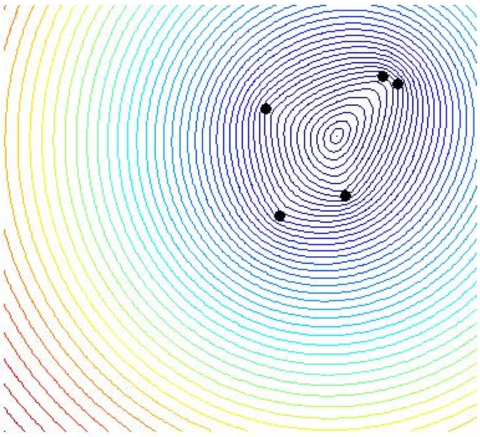
5) Application M -> $\sum_{k=1}^{n} A_k M$, pour quelques valeurs de n

N=9, assez simple



Sur pas mal d'exemples, pris au hasard :





En faisant ainsi un certain nombre de tests, on a l'impression que les lignes de niveaux délimitent toujours des ensembles concaves/vexes (je ne me souviens plus du terme… mais c'est le contraire des barrages !)… ce qui reviendrait à montrer que l'application $\sum_{k=1}^{n} A_k M$ est concave.

C'est en fait « évident » :

Prenons deux points M_1, M_2 , on appellera $aM_1 + bM_2$ le point M vérifiant **OM**=a**OM1**+b$\mathbf{OM_2}$ (vectoriellement, avec a+b=1)

$$f(aM_1 + bM_2)= f(M)=\sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{A_k M}\|$$

$$= \sum \|a\ \mathbf{A_k M}_1 + b\mathbf{A_k M}_2\| \le \sum a\ \|\mathbf{A_k M}_1\| + b\|\mathbf{A_k M}_2\| = af(M_1)+bf(M_2)$$

cqfd

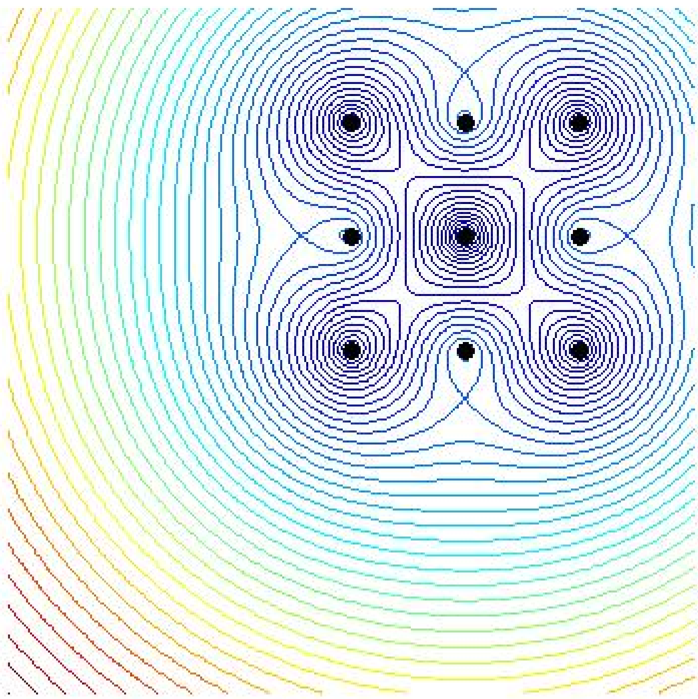
f est donc convexe. On peut donc garantir l'existence d'un minimum à la fonction f, le point de Torricelli existe donc pour tout n.

Le théorème introductif est donc complètement faux, on ne pourra jamais obtenir plusieurs extrema locaux de la fonction f qui représenteraient des points singuliers d'une empreinte digitale.

Cependant le problème reste ouvert avec des applications pondérés par -1, 1

$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \|\mathbf{A_k M}\|$ avec ε_k égal à -1 ou 1.

Exemple du carré à 9 points et des epsilon alternés comme sur un damier.



Pour aller encore plus loin :

La fonction $\sum_{k=1}^{n} g(\|\mathbf{A_k M}\|)$ avec g potentiel gravitationnel ou électrostatique ne nous emmènerait il pas vers des contrées inquiétantes dénommées « théorie du potentiel », « problème à N corps » ?