Concours Fesic–Puissance 11 – 16 mai 2015

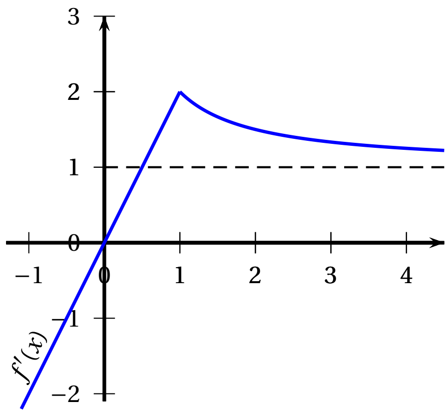
Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Étude de fonction

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de courbe représentative (Γ) dont la fonction dérivée f' a pour représentation graphique la courbe ci-contre.
On admet que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x}+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



a. La courbe (Γ) admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
b. Pour tout $x \in]-\infty\,;\,1]$, $f(x) = x^2$.
On suppose dans le c. et d. que (Γ) passe par $\Omega(1\,;\,1)$.
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
d. $f(2) = \ln 2 + 2$.

EXERCICE 2

Fonction définie par deux paramètres

Soit a et b deux réels strictement positifs fixés et f la fonction définie sur $I = [-a\,;\,a]$ par $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ de courbe représentative (Γ).

a. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{b}{2\times\sqrt{a^2-x^2}}$.
b. Si $a = 6$ et $b = 3$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 3$.
c. Si $a = b = 1$, alors l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions sur I.
d. Si $a = b$ alors (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = x - 5$.

EXERCICE 3

Bases de la géométrie

Les questions suivantes sont indépendantes.

a. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Si la droite (D) a pour équation paramétrique $\begin{cases} x &=& t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 2+t \end{cases}$ avec t réel, alors le vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de (D).

b. Soit $a > 0$. Si ABC est un triangle équilatéral direct de côté a, alors $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CA}} = \dfrac{a^2}{2}$.
Pour le **c.** et **d.**, on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
c. Le nombre $(1+\text{i})^4$ est un nombre réel négatif.
d. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+4-3\text{i}| = 5$ est un cercle passant par l'origine du repère.

EXERCICE 4

Questions de logique

Agnan, Clotaire, Eudes, Geoffroy et Rufus ne s'entendent pas tous très bien. Pour la fête d'anniversaire qu'organisait le petit Nicolas, ils avaient prévenu :

- Clotaire refuserait de venir si Rufus était présent.
- Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus.
- Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre.

a. Si Clotaire n'est pas venu à la fête, alors Rufus était présent.
b. Si Rufus était absent, alors Clotaire est venu à la fête.
c. Si Agnan est venu, alors Geoffroy et Eudes aussi.
d. Si Eudes et Clotaire sont venus, alors Geoffroy était lui aussi présent.

EXERCICE 5

Petite démonstration

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ de courbe représentative (Γ) et $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

a. Pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}$.
b. (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = -x+5$.
c. Si $x \in I$, la fonction $k\,:\,x \longmapsto \ln(f(x))$ admet comme dérivée la fonction $k'\,:\,x \longmapsto \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{2x-1}$.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{2u_n-1} \end{array}\right.$.

Afin d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) on effectue le raisonnement suivant :
« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite démontrer la relation « $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ».
Si $x \in I$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur I.
Supposons que la relation soit vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{k+1} - u_k > 0$.
Par définition de la suite (u_n) nous avons $u_{k+2} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f strictement croissante sur I ; donc si $u_{k+1} > u_k$ alors nous pouvons en déduire que $u_{k+2} = f(u_{k+1}) > u_{k+1} = f(u_k)$ soit $u_{k+2} > u_{k+1}$ ce qui nous permet de conclure que la relation est vraie au rang $k+1$.
Conclusion : la relation est héréditaire et, comme la fonction f est strictement croissante sur I, nous pouvons en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante ».
Ce raisonnement est correct.

EXERCICE 6

Calculs de limites

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.
b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$.
c. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-x-1}$. La courbe (Γ) représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin(n)-2n}{n+1}$ converge vers 0.

EXERCICE 7

Calcul intégral

a. $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

b. $K = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{20}$.

c. Soit α un réel strictement positif, $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \alpha - \ln(1+\alpha)$.

d. Soit $L = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On a : $\mathrm{e}^2\left(1-\mathrm{e}^2\right) \leqslant L \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\left(1-\mathrm{e}^2\right)$.

EXERCICE 8

Fonction exponentielle

Soit F_1 et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{\mathrm{e}^{-x}+2}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction F_1 et par (x_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = g\left(x_n\right)$.

a. L'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution α avec $0 < a < 1$.

Dans les questions **b.**, **c.** et **d.**, on admet la convergence de la suite (x_n).

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x_n = \alpha$.

c. Si $a \in \mathbb{R}$, alors la tangente à (C) en $x = a$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $g(a)$.

On donne le programme Prog ci-contre :

d. Pour $n = 5$, Prog affiche 0,312 5 et 0,375, nous pouvons en déduire que $0{,}3125 < \alpha < 0{,}375$.

```
VARIABLES
    A EST_DU_TYPE NOMBRE
    B EST_DU_TYPE NOMBRE
    I EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_A EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_B EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_I EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
    A PREND_LA_VALEUR 0
    B PREND_LA_VALEUR 1
    I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
    F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
    F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
    F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
    TANT QUE (abs(A − B) > 0,1) FAIRE
      DÉBUT TANT QUE
      SI (F_A * F_I > 0) ALORS
      DEBUT_SI
      A PREND_LA_VALEUR I
      F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
      I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
      F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
      FIN_SI
      SINON
         DÉBUT_SINON
         B PREND_LA_VALEUR I
         F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
         I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
         F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
         FIN_SINON
      FIN_TANT_QUE
    AFFICHER A
    AFFICHER B
FIN_ALGORITHME
```

EXERCICE 9

Fonction exponentielle et logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^x}$, g la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\times\ln(x-1)$ et φ la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

a. $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.
b. $\varphi'(x) = \dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2}$.
c. g admet un minimum en $x = \text{e} + 1$.
On admet qu'il existe une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]\text{e}+1\ ;\ +\infty[$.
d. $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

EXERCICE 10

Suite et trigonométrie

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in N$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)$.
a. Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} > u_n$.
b. Pour tout entier naturel n, on a : $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$.
c. La suite (u_n) est monotone.
d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.

EXERCICE 11

Suite de nombres complexes

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et on considère la suite
(z_n) de nombres complexes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\left\{\begin{array}{l c l} z_0 & = & 2\\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\text{i}}{2}z_n\end{array}\right.$
On pose A_n le point d'affixe z_n et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par $u_n = |z_n|$.
a. La suite (u_n) est géométrique.
b. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
c. À partir du rang $n = 4$, le point A_n appartient au disque de centre O et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$.
d. Pour tout entier naturel n, le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est isocèle et rectangle.

EXERCICE 12

Géométrie et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On définit A et B deux points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ et T la transformation complexe du plan qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 2\text{i}}{z}$.

a. L'image du point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ par la transformation T est le point d'affixe $1 + 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
b. L'ensemble des points M du plan complexe tels que $\text{O}M' = 1$ représente la médiatrice du segment [OB].
c. M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1 si et seulement si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $R = 2$.
d. z' est un nombre complexe imaginaire pur si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre [OB].

EXERCICE 13

Variables aléatoires réelles : Cours - Calculs

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

a. Pour tout entier naturel n, on a : $P(X > n) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$.
b. Pour tout entier naturel n, on a : $P_{X>n}(X > n+1) = P(X < 1)$.
Soit $\sigma > 0$, Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(9\,;\,\sigma^2\right)$ et Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y-9}{\sigma}$
c. Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
d. $P(7 \leqslant Y \leqslant 11) = 2P\left(0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right)$.

EXERCICE 14

Probabilités conditionnelles

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.
S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut $\dfrac{1}{9}$, tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$.
S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante ; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$.
On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

a. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de $\dfrac{1}{9}$.
b. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de $\dfrac{25}{81}$.
c. Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de $\dfrac{7}{9}$.

On note p_n (n étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'évènement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n-ième représentation ».
d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad p_{n+1} = \dfrac{2-p_n}{9}$.

EXERCICE 15

Logique et géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et m et p sont deux réels.
On définit le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x-y+2z-3=0$ et (Δ) la droite passant par le point A de coordonnées $(2\,;\,p\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}$.

a. Il existe au moins un réel m tel que (Δ) soit parallèle à (P).
b. Si $m = 1$, alors il existe au moins un réel p tel que $(\Delta) \cap (P) = \emptyset$.
c. Si $m \neq 1$, alors pour tout réel p, $(\Delta) \cap (P) \neq \emptyset$.
d. Si $p = 1$, alors pour tout réel m, $(\Delta) \cap (P) = \{\mathrm{A}\}$.

EXERCICE 16

Orthogonalité dans l'espace

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD.
Le point O est le centre du carré ABCD, J est le milieu du segment [SO], F est le milieu du segment [BC] et K est le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$.

a. $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et
$\overrightarrow{BJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.
b. B, K et J sont alignés.
c. Les plans (BJC) et (SAD) sont sécants suivant une droite (Δ) orthogonale à la droite (SF).
Pour le **d.**, on suppose que BD = SO et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OJ}\right)$.
d. La droite (KJ) coupe le plan (P) d'équation cartésienne
$2x+3y-z+4=0$ au point Ω de coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,2)$.