Concours Fesic–Puissance 11 – 17 mai 2014

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h* 30 *; répondre par Vrai ou Faux sans justification.* +1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1 : BASES EN ANALYSE

Les questions sont indépendantes.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ est $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

Soit f une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d. La suite (u_n) converge vers 0.

EXERCICE N° 2 : BASES EN GÉOMÉTRIE

Les questions sont indépendantes. Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives

$$(P) : 2x + y + z = 2 \quad \text{et} \quad (Q) : x + y - z = 0.$$

a. L'intersection des plans (P) et (Q) a pour équation $x + 2z = 2$.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est

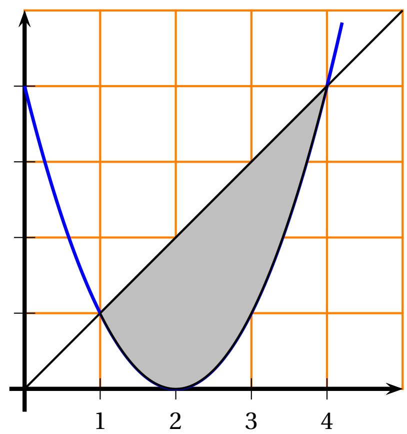
$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+3\\ y &=& -t-1 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 2\end{array}\right.$$

b. (D) est perpendiculaire au plan (R) d'équation $x - y + 2z = 0$.

c. Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto (x-2)^2$.

L'aire A du domaine hachuré est égale à $A = \dfrac{9}{2}$ unités d'aire.

d. La courbe représentative de la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2 - x + 3}{x-1}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$.



EXERCICE N° 3 : LECTURE GRAPHIQUE

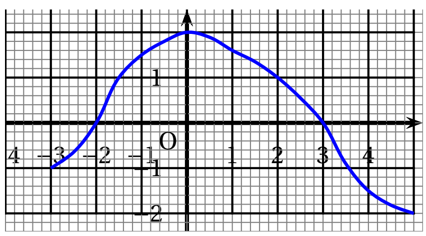
f est une fonction définie et dérivable sur $[-3\,;\,5]$ de courbe représentative (C). On donne ci-dessous la courbe (Γ) représentative de sa fonction dérivée f'.

a. (C) admet une tangente horizontale en $x = 0$.

b. f admet un minimum relatif en $x = -2$.

c. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,5]$.

d. Les tangentes à (C) aux points d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.



EXERCICE N° 4 : SUITE DÉFINIE PAR UN ALGORITHME

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) où u_n est le réel affiché par l'algorithme ci-contre lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

```
VARIABLES
   u EST DU TYPE NOMBRE
   n EST DU TYPE NOMBRE
   k EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
   LIRE n
   u PREND LA VALEUR 2
   k PREND LA VALEUR 0
TANT OUE (k < n) FAIRE
     DEBUT TANT OUE
     k PREND LA VALEUR k + 1
     u PREND LA VALEUR u + 2 ⋆ (k − 1) + 1
     FIN TANT OUE
AFFICHER u
FIN ALGORITHME
```

a. $u_3 = 11$.
b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
c. La suite (u_n) est strictement croissante.
d. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2$.

EXERCICE N° 5 : BASES SUR LES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \text{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ et $z_2 = \dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{3}+\text{i}}$.

a. $z_1^2 = 8\sqrt{3} + 8\text{i}$.
b. $|z_2| = \sqrt{2}$.
c. $\arg\left(z_1^2\right) = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.
d. $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE N° 6 : BASES DE LOGIQUE

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. x et y sont deux nombres réels et z est le nombre complexe $x + \text{i}y$.

a. La négation de la proposition : « $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ » est la proposition « $x < 0$ et $y < 0$ ».
b. Si $x = y$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π.
c. La réciproque de la proposition précédente est vraie.
d. On suppose $z \neq 0$. Si $z = \dfrac{1}{z}$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

EXERCICE N° 7 : CALCULS DE LIMITES

a. La fonction $x \longmapsto x \times \sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+x} = 1$.
c. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\text{e}^x + 3x}{x+1} = 0$.
d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 1$.

EXERCICE N° 8 : CALCULS D'INTÉGRALES

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{x^2}\,\text{d}x = \frac{5}{4}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

b. La fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = 1 + \dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{2}$ est une primitive de f.
c. $\displaystyle\int_2^{\text{e}} \frac{1+t}{t^2}\,\text{d}t = 2 - \frac{1}{\text{e}}$.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE N° 9 : TRANSFORMATION COMPLEXE

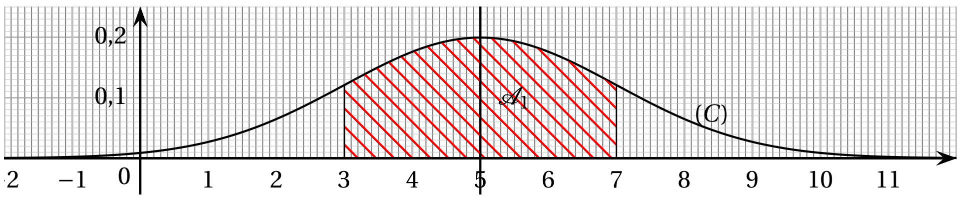
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 1.$$

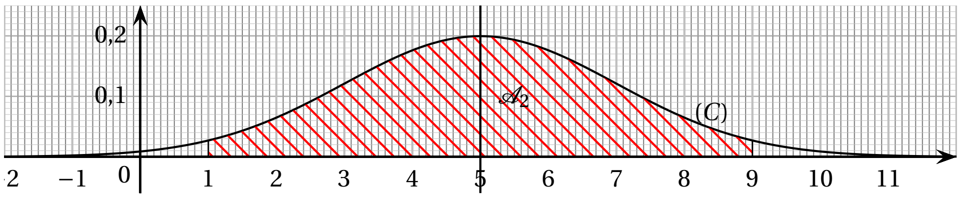
a. L'image, par f, du point B d'affixe 2 est le point C d'affixe $3+2\mathrm{i}$.
b. Le point A d'affixe i est le seul point invariant par f.
c. L'image, par f, de l'axe des réels est la droite (BC).
d. Soit D le point d'affixe 1. Pour tout point M distinct de A et de D, le triangle DMM' est isocèle en M.

EXERCICE N° 10 : LOI NORMALE

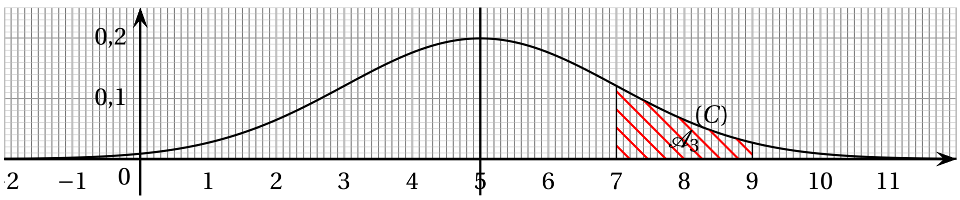
Dans tout l'exercice, on suppose T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ avec μ et σ deux entiers naturels.
La densité de probabilité de cette loi, notée f, est représentée ci-dessous par la courbe (C).
On suppose que (C) admet la droite $x = 5$ comme axe de symétrie et que l'aire du domaine $\mathcal{A}_1$ (représenté en gris) est environ égale à 0,68.



a. $\mu = 5$ et $\sigma = 4$.
b. L'aire du domaine $\mathcal{A}_2$, représenté ci-dessous, est environ égale à 0,8.



c. L'aire du domaine $\mathcal{A}_3$ représenté ci-dessous, est environ égale à 0,135.



d. On admet, dans cette question, que $P(T \in [\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) \approx 0,95$.

$P(T \leqslant 9) \approx 0,975$.

EXERCICE N$^{\text{o}}$ 11 : NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À chaque point M d'affixe $z \neq 0$, on associe l'unique point M' d'affixe z' tel que,

$$z' = \left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)^2.$$

a. En posant $z = x + \text{i}y$,avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et $z' = x' + \text{i}y'$, on a : $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.
b. M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = x$ privée de O.
c. M' est un point du cercle trigonométrique.
d. M' a pour affixe -1 si et seulement si $z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.

EXERCICE N$^{\text{o}}$ 12 : ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

de courbe représentative $(\mathcal{C})$.
a. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. $(\mathcal{C})$ admet une unique asymptote verticale.
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.
d. Il existe deux points de $(\mathcal{C})$ ayant une tangente à $(\mathcal{C})$ parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 7$.

EXERCICE N° 13 : ÉTUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 2\right)$.
b. Pour tout réel x, on a : $f(x) > \dfrac{3}{2}$.
c. $\left(C_f\right)$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.
d. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE N° 14 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,2$.
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,7$.
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,5$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'évènement : « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

a. $p_2 = 0,54$.
b. Le joueur gagne la deuxième partie. La probabilité qu'il ait perdu la première est $0,6$.
c. Pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{2}$.
Pour le **d.**, on donne l'algorithme ci-dessous :

```
Variables
    n EST DU TYPE NOMBRE
    p EST DU TYPE NOMBRE
    i EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
    LIRE n
    p PREND LA VALEUR 0,2
    POUR i ALLANT DE 2 À n
        DÉBUT POUR
        p PREND LA VALEUR 0,2 ⋆ p + 0,5
        FIN POUR
    AFFICHER p
FIN ALGORITHME
```

d. Si on teste le programme pour $n = 5$ alors cet algorithme restitue la probabilité que le joueur gagne la cinquième partie.

EXERCICE N° 15 : DIFFÉRENTES LOIS DE PROBABILITÉS

Les quatre questions sont indépendantes.

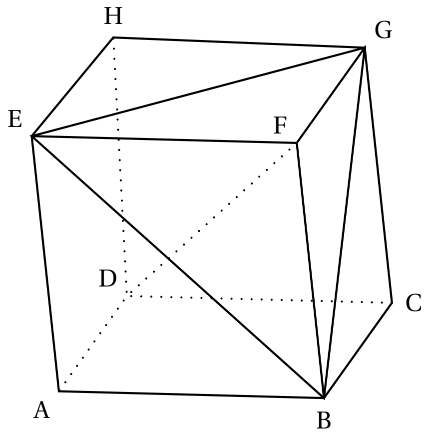
a. Soit $t > 0$. Si X suit une loi uniforme sur $[0\,;\,t]$ telle que $p(X < 5) = 0,4$ alors $t = 20$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0,3)$ d'espérance 12, alors $n = 40$.
c. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, alors $\mathrm{E}(X) = 5000$.
d. On considère A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Si $P_B(A) = P_A(B)$, alors $p(A) = p(B)$.

EXERCICE N° 16 : REPÉRAGE DANS UN CUBE

Dans le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, on considère le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}~;~\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On rappelle que :

- Le plan médiateur d'un segment est le plan passant par le milieu de ce segment tout en lui étant perpendiculaire.
- Si M est un point de l'espace et (P) un plan de l'espace, on appelle distance du point M au plan (P) la plus petite distance d entre le point M et un point H du plan (P).



a. (GDF) est le plan médiateur du segment [EB].

b. Le plan (BEG) a pour équation : $x - y + z = 1$.

c. $\mathrm{I}\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{1}{3}~;~\dfrac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (BEG).

d. La distance du point D au plan (BEG) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.