

Journée de la Régionale APMEP 2013 à Vire

Chaînes de Markov au lycée

J. Faisant

26 mars 2013

Remerciements

C'est **Louis-Marie Bonneval** qui m'a fait découvrir les *chaînes de Markov sur un graphe*.

Voir les documents concernant l'atelier « P1-32 » qu'il animé à Metz lors des journées nationales de 2012 :

<http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-dimanche-matin,4799>

Je vous invite à consulter ces documents qui me semblent extrêmement judicieux.

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Enseignement de spécialité, série ES

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif.

L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples et de faire un lien avec les suites. Les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres. Au même titre que les graphes, elles apparaissent comme des outils pour résoudre des problèmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités. Les thèmes abordés ne doivent pas faire l'objet d'un développement théorique.

Exemples de problèmes	Contenus
<p>Recherche de courbes polynomiales passant par un ensemble donné de points.</p> <p>Gestion de flux, problèmes simples de partitionnement de graphes sous contraintes : problème du voyageur de commerce, gestion de trafic routier ou aérien, planning de tournois sportifs, etc.</p> <p>Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief).</p> <p>Codage par un graphe étiqueté, applications à l'accès à un réseau informatique, reconnaissance de codes.</p> <p>Minimisation d'une grandeur (coût, longueur, durée, etc.).</p> <p>Phénomènes évolutifs (variation d'une population, propagation d'une rumeur ou d'un virus, etc.).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Matrice carrée, <u>matrice colonne</u> : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. • Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré connexe. • Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Enseignement de spécialité , série S

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

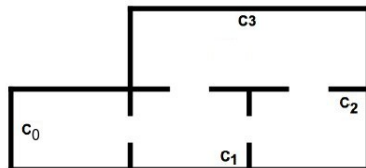
Exemples de problèmes	Contenus
<p>Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.</p> <p>Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n importe quel sommet avec une probabilité constante p.</p> <p>Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web.</p> <p>Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient.</p> <p>Modèle proie prédateur discrétisé :</p> <ul style="list-style-type: none"> - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Matrices carrées, <u>matrices colonnes</u> : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de <u>matrices colonnes</u> (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: <ul style="list-style-type: none"> - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Souris immortelle et sans mémoire

Une souris se déplace parmi les quatre compartiments : C_0 , C_1 , C_2 et C_3 correspondant au dessin ci-dessous :



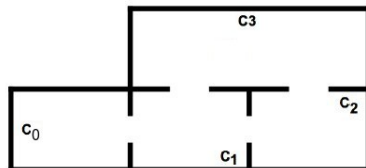
La souris

- se trouve dans le compartiment C_0 à l'instant initial
- et change **indéfiniment** de compartiment de la manière suivante :
 - ▶ lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$)

Quelles seront, à long terme, les proportions de temps que la souris passera dans chacun des compartiments ?

Souris immortelle et sans mémoire

Une souris se déplace parmi les quatre compartiments : C_0 , C_1 , C_2 et C_3 correspondant au dessin ci-dessous :



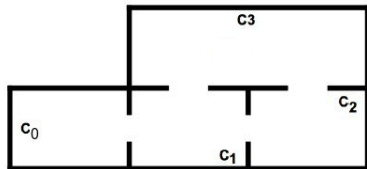
La souris

- se trouve dans le compartiment C_0 à l'instant initial
- et change **indéfiniment** de compartiment de la manière suivante :
 - ▶ lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$)

Quelles seront, à long terme, les proportions de temps que la souris passera dans chacun des compartiments ?

Souris immortelle et sans mémoire

Une souris se déplace parmi les quatre compartiments : C_0 , C_1 , C_2 et C_3 correspondant au dessin ci-dessous :



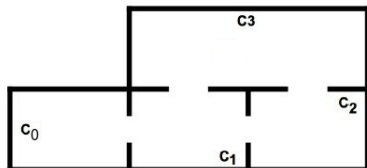
La souris

- se trouve dans le compartiment C_0 à l'instant initial
- et change **indéfiniment** de compartiment de la manière suivante :
 - ▶ lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$)

Quelles seront, à long terme, les proportions de temps que la souris passera dans chacun des compartiments ?

Souris immortelle et sans mémoire

Une souris se déplace parmi les quatre compartiments : C_0 , C_1 , C_2 et C_3 correspondant au dessin ci-dessous :



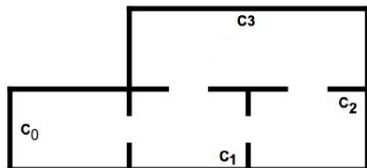
La souris

- se trouve dans le compartiment C_0 à l'instant initial
- et change **indéfiniment** de compartiment de la manière suivante :
 - ▶ lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$)

Quelles seront, à long terme, les proportions de temps que la souris passera dans chacun des compartiments ?

Souris immortelle et sans mémoire

Une souris se déplace parmi les quatre compartiments : C_0 , C_1 , C_2 et C_3 correspondant au dessin ci-dessous :



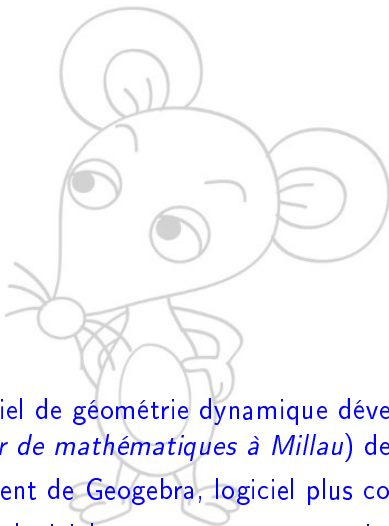
La souris

- se trouve dans le compartiment C_0 à l'instant initial
- et change **indéfiniment** de compartiment de la manière suivante :
 - ▶ lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$)

Quelles seront, à long terme, les proportions de temps que la souris passera dans chacun des compartiments ?

La souris

Simulation utilisant Carmetal



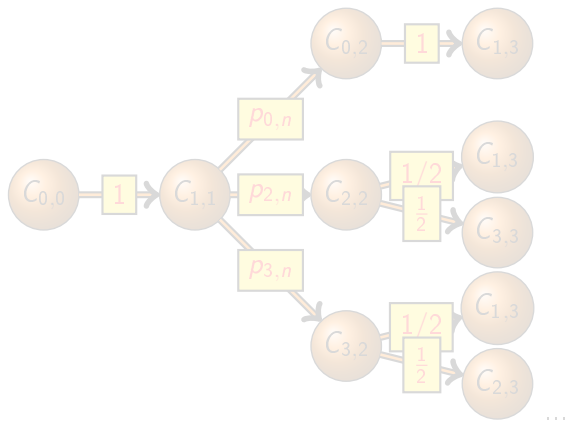
Carmetal est un logiciel de géométrie dynamique développé par Éric Hakenholz (*professeur de mathématiques à Millau*) depuis 2006.

- C'est un concurrent de Geogebra, logiciel plus connu.
- Chacun des deux logiciels a ses avantages, ses inconvénients ...

La souris

Formules de récurrence

On a l'habitude (?) d'obtenir des formules de récurrence à l'aide d'un arbre de probabilité. Notons $p_{i,n}$ la probabilité qu'à l'instant n , la souris soit dans le compartiment C_i .

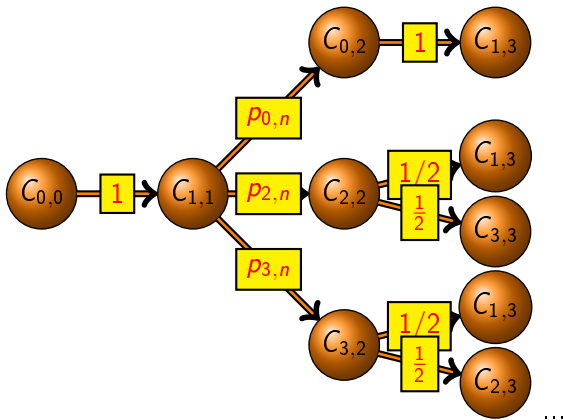


Finalement, un tel arbre n'est pas vraiment adapté à cette étude!

La souris

Formules de récurrence

On a l'habitude (?) d'obtenir des formules de récurrence à l'aide d'un arbre de probabilité. Notons $p_{i,n}$ la probabilité qu'à l'instant n , la souris soit dans le compartiment C_i .

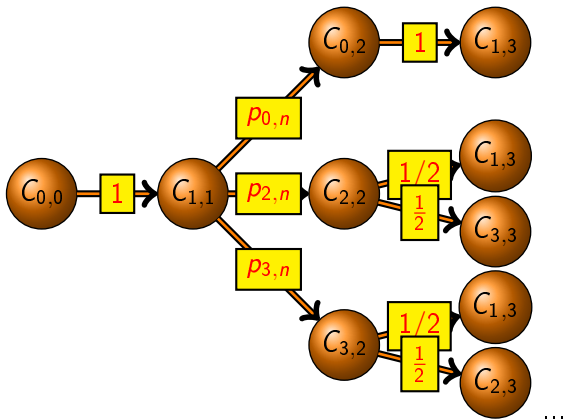


Finalement, un tel arbre n'est pas vraiment adapté à cette étude!

La souris

Formules de récurrence

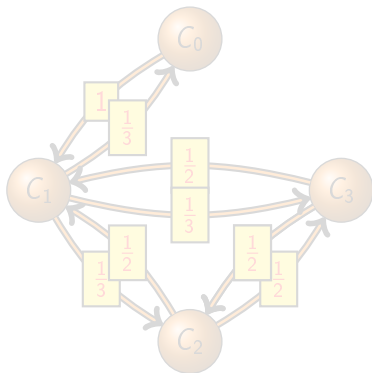
On a l'habitude (?) d'obtenir des formules de récurrence à l'aide d'un arbre de probabilité. Notons $p_{i,n}$ la probabilité qu'à l'instant n , la souris soit dans le compartiment C_i .



Finalement, un tel arbre n'est pas vraiment adapté à cette étude!

La souris

Utilisation d'un graphe probabiliste

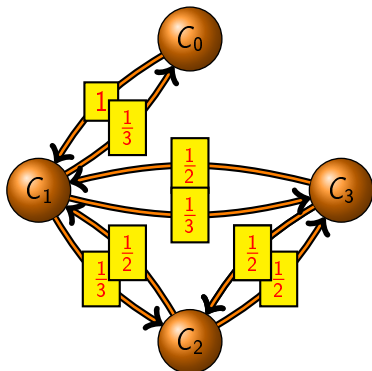


Avec ce graphe, on obtient :

$$\begin{cases} p_{0,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} \\ p_{1,n+1} = p_{0,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{2,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{3,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} \end{cases}$$

La souris

Utilisation d'un graphe probabiliste

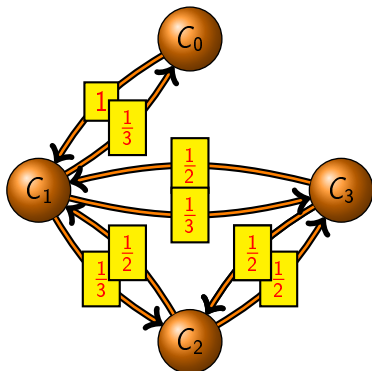


Avec ce graphe, on obtient :

$$\begin{cases} p_{0,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} \\ p_{1,n+1} = p_{0,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{2,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{3,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} \end{cases}$$

La souris

Utilisation d'un graphe probabiliste



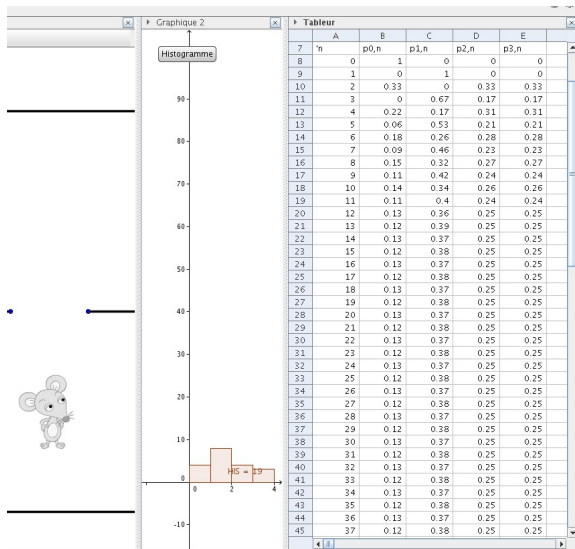
Avec ce graphe, on obtient :

$$\begin{cases} p_{0,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} \\ p_{1,n+1} = p_{0,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{2,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{3,n} \\ p_{3,n+1} = \frac{1}{3} \cdot p_{1,n} + \frac{1}{2} \cdot p_{2,n} \end{cases}$$

La souris

Exploration avec un tableur

Les dernières version de Geogebra ont un tableur intégré :



La souris

Avec les matrices

On sait qu'on peut représenter les formules de récurrence ci-dessus par une relation matricielle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{0,n+1} \\ p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{0,n} \\ p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \end{pmatrix}$$

Chacune des colonnes de la matrice carrée qui figure dans l'égalité ci-dessus a comme somme 1; malheureusement, la propriété de définition généralement donnée pour les matrices stochastiques est qu'elles ont des lignes de somme 1, tous leurs éléments devant de plus être des réels compris entre 0 et 1. Nous écrirons donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} p_{0,n+1} & p_{1,n+1} & p_{2,n+1} & p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,n} & p_{1,n} & p_{2,n} & p_{3,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La souris

Avec les matrices

On sait qu'on peut représenter les formules de récurrence ci-dessus par une relation matricielle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{0,n+1} \\ p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{0,n} \\ p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \end{pmatrix}$$

Chacune des colonnes de la matrice carrée qui figure dans l'égalité ci-dessus a comme somme 1 ; malheureusement, la propriété de définition généralement donnée pour les matrices stochastiques est qu'elles ont des lignes de somme 1, tous leurs éléments devant de plus être des réels compris entre 0 et 1. Nous écrivons donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} p_{0,n+1} & p_{1,n+1} & p_{2,n+1} & p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,n} & p_{1,n} & p_{2,n} & p_{3,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La souris

Avec les matrices

On sait qu'on peut représenter les formules de récurrence ci-dessus par une relation matricielle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{0,n+1} \\ p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{0,n} \\ p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \end{pmatrix}$$

Chacune des colonnes de la matrice carrée qui figure dans l'égalité ci-dessus a comme somme 1 ; malheureusement, la propriété de définition généralement donnée pour les matrices stochastiques est qu'elles ont des lignes de somme 1, tous leurs éléments devant de plus être des réels compris entre 0 et 1. Nous écrivons donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} p_{0,n+1} & p_{1,n+1} & p_{2,n+1} & p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,n} & p_{1,n} & p_{2,n} & p_{3,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La souris

Avec les matrices

On sait qu'on peut représenter les formules de récurrence ci-dessus par une relation matricielle :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{0,n+1} \\ p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \\ p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{0,n} \\ p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \end{pmatrix}$$

Chacune des colonnes de la matrice carrée qui figure dans l'égalité ci-dessus a comme somme 1 ; malheureusement, la propriété de définition généralement donnée pour les matrices stochastiques est qu'elles ont des lignes de somme 1, tous leurs éléments devant de plus être des réels compris entre 0 et 1. Nous écrivons donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} p_{0,n+1} & p_{1,n+1} & p_{2,n+1} & p_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,n} & p_{1,n} & p_{2,n} & p_{3,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La souris

Matrice de transition ; problème de convergence

La matrice carrée T maintenant utilisée est appelée la matrice de transition ; notons l'égalité précédente $P_{n+1} = P_n \times T$. On représente le fait que la souris se trouve initialement dans la case C_0 par la matrice-ligne

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Si les suites numériques que nous avons obtenues antérieurement sont convergentes, alors nous avons $P = P \times T$, P étant la matrice-ligne constituée par leurs limites p_0, p_1, p_2, p_3 . Nécessairement,

$$\begin{cases} -p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 = 0 \\ p_0 - p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 - p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{10} \\ p_1 = \frac{3}{10} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ p_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comment justifier la convergence des suites ? Idée : expliciter T^n . Mais cela peut souvent dépasser les limites ... du programme !

La souris

Matrice de transition ; problème de convergence

La matrice carrée T maintenant utilisée est appelée la matrice de transition ; notons l'égalité précédente $P_{n+1} = P_n \times T$. On représente le fait que la souris se trouve initialement dans la case C_0 par la matrice-ligne

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Si les suites numériques que nous avons obtenues antérieurement sont convergentes, alors nous avons $P = P \times T$, P étant la matrice-ligne constituée par leurs limites p_0, p_1, p_2, p_3 . Nécessairement,

$$\begin{cases} -p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 = 0 \\ p_0 - p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 - p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{1000} \\ p_1 = \frac{1}{3000} \\ p_2 = \frac{1}{4000} \\ p_3 = \frac{1}{4000} \end{cases}$$

Comment justifier la convergence des suites ? Idée : expliciter T^n . Mais cela peut souvent dépasser les limites ... du programme !

La souris

Matrice de transition ; problème de convergence

La matrice carrée T maintenant utilisée est appelée la matrice de transition ; notons l'égalité précédente $P_{n+1} = P_n \times T$. On représente le fait que la souris se trouve initialement dans la case C_0 par la matrice-ligne

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Si les suites numériques que nous avons obtenues antérieurement sont convergentes, alors nous avons $P = P \times T$, P étant la matrice-ligne constituée par leurs limites p_0, p_1, p_2, p_3 . Nécessairement,

$$\begin{cases} -p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 = 0 \\ p_0 - p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 - p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{10} \\ p_1 = \frac{3}{10} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ p_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comment justifier la convergence des suites ? Idée : expliciter T^n . Mais cela peut souvent dépasser les limites ... du programme !

La souris

Matrice de transition ; problème de convergence

La matrice carrée T maintenant utilisée est appelée la matrice de transition ; notons l'égalité précédente $P_{n+1} = P_n \times T$. On représente le fait que la souris se trouve initialement dans la case C_0 par la matrice-ligne

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Si les suites numériques que nous avons obtenues antérieurement sont convergentes, alors nous avons $P = P \times T$, P étant la matrice-ligne constituée par leurs limites p_0, p_1, p_2, p_3 . Nécessairement,

$$\begin{cases} -p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 = 0 \\ p_0 - p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 - p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{8} \\ p_1 = \frac{3}{8} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ p_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comment justifier la convergence des suites ? Idée : expliciter T^n . Mais cela peut souvent dépasser les limites ... du programme !

La souris

Matrice de transition ; problème de convergence

La matrice carrée T maintenant utilisée est appelée la matrice de transition ; notons l'égalité précédente $P_{n+1} = P_n \times T$. On représente le fait que la souris se trouve initialement dans la case C_0 par la matrice-ligne

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Si les suites numériques que nous avons obtenues antérieurement sont convergentes, alors nous avons $P = P \times T$, P étant la matrice-ligne constituée par leurs limites p_0, p_1, p_2, p_3 . Nécessairement,

$$\begin{cases} -p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 = 0 \\ p_0 - p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 - p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{8} \\ p_1 = \frac{3}{8} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ p_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comment justifier la convergence des suites ? Idée : expliciter T^n . Mais cela peut souvent dépasser les limites ... du programme !

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - **Chaînes de Markov et matrices**
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Un processus aléatoire (ou processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) - qu'on suppose ici en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« Le futur dépend du présent, mais pas du passé »

Comme on l'a vu, on peut représenter une chaîne de Markov comme une marche (ou promenade) aléatoire sur un graphe :

- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Il va de soi que, pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Chaînes de Markov et matrices

Après avoir ordonné les états, on peut écrire la matrice de transition T :

Les éléments de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

- L'indice de ligne indique l'état de départ,
- l'indice de colonne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus commode, oblige à utiliser des matrices lignes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses éléments positifs, et de somme 1 pour chaque ligne.

Si P_n est la matrice ligne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n , le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$P_{n+1} = P_n \times T. \text{ On en déduit } P_n = P_0 \times T^n.$$

Si on dispose d'une formule explicite pour T_n , on peut donc en déduire une formule explicite pour P_n .

On a $P_{n+k} = P_n \times T^k$. Donc T_k est la matrice de transition pour k étapes.

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - **Théorème de Perron-Frobenius**
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Théorème de Perron-Frobenius

Théorème de Perron

(Oskar Perron, 1880-1975)

Soit A une matrice carrée à coefficients réels strictement positifs. Alors A a une valeur propre simple α qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. À cette valeur propre maximale α correspond (au moins) un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) étendit en 1912 le théorème de son jeune collègue Perron aux matrices à coefficients positifs ou nuls, dont une puissance entière a ses coefficients strictement positifs (matrices irréductibles). C'est la version qui est à la base de la plupart des applications, en particulier les chaînes et processus de Markov.

Théorème

Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :
il existe une répartition de probabilité P stable, c'est-à-dire telle que $P \times T = P$, et une seule ; de plus, la suite (P_n) converge vers P .

Théorème de Perron-Frobenius

Théorème de Perron

(Oskar Perron, 1880-1975)

Soit A une matrice carrée à coefficients réels strictement positifs. Alors A a une valeur propre simple α qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. À cette valeur propre maximale α correspond (au moins) un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) étendit en 1912 le théorème de son jeune collègue Perron aux matrices à coefficients positifs ou nuls, dont une puissance entière a ses coefficients strictement positifs (matrices irréductibles). C'est la version qui est à la base de la plupart des applications, en particulier les chaînes et processus de Markov.

Théorème

Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :
il existe une répartition de probabilité P stable, c'est-à-dire telle que $P \times T = P$, et une seule ; de plus, la suite (P_n) converge vers P .

Théorème de Perron-Frobenius

Théorème de Perron

(Oskar Perron, 1880-1975)

Soit A une matrice carrée à coefficients réels strictement positifs. Alors A a une valeur propre simple α qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. À cette valeur propre maximale α correspond (au moins) un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) étendit en 1912 le théorème de son jeune collègue Perron aux matrices à coefficients positifs ou nuls, dont une puissance entière a ses coefficients strictement positifs (matrices irréductibles). C'est la version qui est à la base de la plupart des applications, en particulier les chaînes et processus de Markov.

Théorème

Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :
il existe une répartition de probabilité P stable, c'est-à-dire telle que $P \times T = P$, et une seule ; de plus, la suite (P_n) converge vers P .

Théorème de Perron-Frobenius

Théorème de Perron

(Oskar Perron, 1880-1975)

Soit A une matrice carrée à coefficients réels strictement positifs. Alors A a une valeur propre simple α qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. À cette valeur propre maximale α correspond (au moins) un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) étendit en 1912 le théorème de son jeune collègue Perron aux matrices à coefficients positifs ou nuls, dont une puissance entière a ses coefficients strictement positifs (matrices irréductibles). C'est la version qui est à la base de la plupart des applications, en particulier les chaînes et processus de Markov.

Théorème

Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :
il existe une répartition de probabilité P stable, c'est-à-dire telle que $P \times T = P$, et une seule ; de plus, la suite (P_n) converge vers P .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
→ donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - ▶ donc P ne dépend pas de P_0 .

Théorème de Perron-Frobenius

Remarques :

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes « il n'est pas presque impossible » de passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence.
- La suite de matrices lignes (P_n) converge alors vers une matrice ligne P , égale à $P_0 \times T^*$.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = P_n \times T$, la matrice ligne P vérifie $P = P \times T$.
- Il y a unicité pour P car, parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est le seul dont la somme des éléments vaut 1,
 - ▶ donc P ne dépend pas de P_0 .

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Egalité au tennis

Deuxième exemple

Le jeu des sacs en papier

- Nous disposons de deux sacs, appelés A et B, ainsi que d'un ensemble de jetons numérotés a et b.
- Nous plaçons dans le sac A 19 jetons b et un seul jeton a.
- Dans le sac B, nous plaçons 4 jetons a et un seul jeton b.
- Nous commençons par piocher un jeton au hasard dans le sac A.
- Si l'on pioche un jeton a, on reste sur ce sac, si l'on pioche un jeton b, on passe au sac B.
- On note également quel jeton a été tiré et on le remet dans le sac.
- On recommence cela à l'infini.

Deuxième exemple

Le jeu des sacs en papier

- Nous disposons de deux sacs, appelés A et B, ainsi que d'un ensemble de jetons numérotés a et b.
- Nous plaçons dans le sac A 19 jetons b et un seul jeton a.
- Dans le sac B, nous plaçons 4 jetons a et un seul jeton b.
- Nous commençons par piocher un jeton au hasard dans le sac A.
- Si l'on pioche un jeton a, on reste sur ce sac, si l'on pioche un jeton b, on passe au sac B.
- On note également quel jeton a été tiré et on le remet dans le sac.
- On recommence cela à l'infini.

Deuxième exemple

Le jeu des sacs en papier

- Nous disposons de deux sacs, appelés A et B, ainsi que d'un ensemble de jetons numérotés a et b.
- Nous plaçons dans le sac A 19 jetons b et un seul jeton a.
- Dans le sac B, nous plaçons 4 jetons a et un seul jeton b.
- Nous commençons par piocher un jeton au hasard dans le sac A.
- Si l'on pioche un jeton a, on reste sur ce sac, si l'on pioche un jeton b, on passe au sac B.
- On note également quel jeton a été tiré et on le remet dans le sac.
- On recommence cela à l'infini.

Deuxième exemple

Le jeu des sacs en papier

- Nous disposons de deux sacs, appelés A et B, ainsi que d'un ensemble de jetons numérotés a et b.
- Nous plaçons dans le sac A 19 jetons b et un seul jeton a.
- Dans le sac B, nous plaçons 4 jetons a et un seul jeton b.
- Nous commençons par piocher un jeton au hasard dans le sac A.
- Si l'on pioche un jeton a, on reste sur ce sac, si l'on pioche un jeton b, on passe au sac B.
- On note également quel jeton a été tiré et on le remet dans le sac.
- On recommence cela à l'infini.

Deuxième exemple

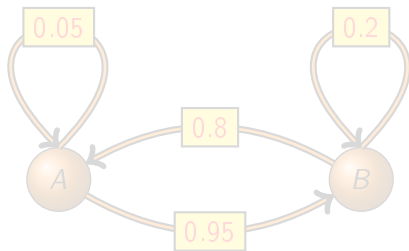
Le jeu des sacs en papier

- Nous disposons de deux sacs, appelés A et B, ainsi que d'un ensemble de jetons numérotés a et b.
- Nous plaçons dans le sac A 19 jetons b et un seul jeton a.
- Dans le sac B, nous plaçons 4 jetons a et un seul jeton b.
- Nous commençons par piocher un jeton au hasard dans le sac A.
- Si l'on pioche un jeton a, on reste sur ce sac, si l'on pioche un jeton b, on passe au sac B.
- On note également quel jeton a été tiré et on le remet dans le sac.
- On recommence cela à l'infini.

Le jeu des sacs en papier

Graphe et probabilités

Dans ce jeu, le rôle joué précédemment par les quatre compartiments de la cage de la souris est tenu par les deux sacs.



D'après ce graphe, nous avons les probabilités :

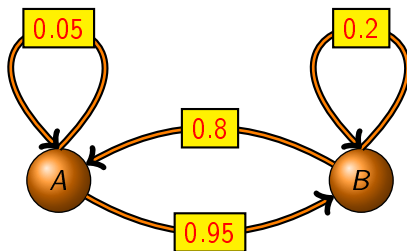
	vers A	vers B
De A	$p_{A,A} = \frac{1}{20}$	$p_{A,B} = \frac{19}{20}$
De B	$p_{B,A} = \frac{4}{5}$	$p_{B,B} = \frac{1}{5}$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{20} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Le jeu des sacs en papier

Graphe et probabilités

Dans ce jeu, le rôle joué précédemment par les quatre compartiments de la cage de la souris est tenu par les deux sacs.



D'après ce graphe, nous avons les probabilités :

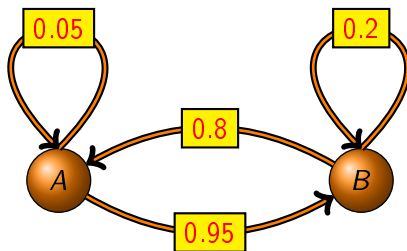
	vers A	vers B
De A	$p_{A,A} = \frac{1}{20}$	$p_{A,B} = \frac{19}{20}$
De B	$p_{B,A} = \frac{4}{5}$	$p_{B,B} = \frac{1}{5}$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{20} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Le jeu des sacs en papier

Grphe et probabilités

Dans ce jeu, le rôle joué précédemment par les quatre compartiments de la cage de la souris est tenu par les deux sacs.



D'après ce graphe, nous avons les probabilités :

	vers A	vers B
De A	$p_{A,A} = \frac{1}{20}$	$p_{A,B} = \frac{19}{20}$
De B	$p_{B,A} = \frac{4}{5}$	$p_{B,B} = \frac{1}{5}$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{20} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Le jeu des sacs en papier

Résultats

La matrice T n'ayant aucun élément nul, le théorème de Perron s'applique : la suite de matrices lignes (P_n) définie par P_0 et

$\forall n \in \mathbb{N} P_{n+1} = P_n \times T$ converge vers $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, définie par $P = P \times T$,

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} -\frac{19}{20} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ \frac{19}{20} \cdot x - \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = \frac{16}{35} \\ y = \frac{19}{35} \end{cases}.$$

Ceci nous donne la répartition à long terme des tirages dans les sacs A et B.

Le jeu des sacs en papier

Résultats

La matrice T n'ayant aucun élément nul, le théorème de Perron s'applique : la suite de matrices lignes (P_n) définie par P_0 et

$\forall n \in \mathbb{N} P_{n+1} = P_n \times T$ converge vers $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, définie par $P = P \times T$,

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} -\frac{19}{20} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ \frac{19}{20} \cdot x - \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = \frac{16}{35} \\ y = \frac{19}{35} \end{cases}.$$

Ceci nous donne la répartition à long terme des tirages dans les sacs A et B.

Le jeu des sacs en papier

Résultats

La matrice T n'ayant aucun élément nul, le théorème de Perron s'applique : la suite de matrices lignes (P_n) définie par P_0 et

$\forall n \in \mathbb{N} P_{n+1} = P_n \times T$ converge vers $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, définie par $P = P \times T$,

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} -\frac{19}{20} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ \frac{19}{20} \cdot x - \frac{4}{5} \cdot y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = \frac{16}{35} \\ y = \frac{19}{35} \end{cases}.$$

Ceci nous donne la répartition à long terme des tirages dans les sacs A et B.

Table des matières

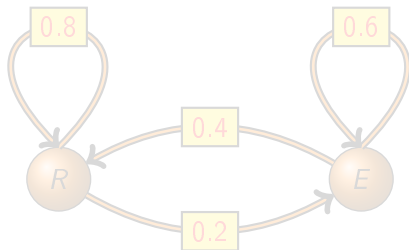
- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - **Les lancers francs au basket**
- 5 Présence d'états absorbants
 - La ruine du joueur
 - Égalité au tennis

Les lancers francs au basket

Lors des match, un joueur se comporte de la manière suivante :

- s'il réussit un lancer franc, il a la probabilité 0,8 de réussir le suivant ;
- s'il rate un lancer franc, il a la probabilité 0,6 de rater le suivant.

On peut représenter cela à l'aide du graphe probabiliste ci-dessous, dont les états sont R, réussite, et E, échec.



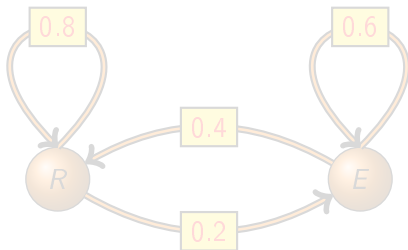
On voit que la seule différence avec le jeu précédent réside dans la valeur numérique des probabilités de transition.

Les lancers francs au basket

Lors des match, un joueur se comporte de la manière suivante :

- s'il réussit un lancer franc, il a la probabilité 0,8 de réussir le suivant ;
- s'il rate un lancer franc, il a la probabilité 0,6 de rater le suivant.

On peut représenter cela à l'aide du graphe probabiliste ci-dessous, dont les états sont R, réussite, et E, échec.



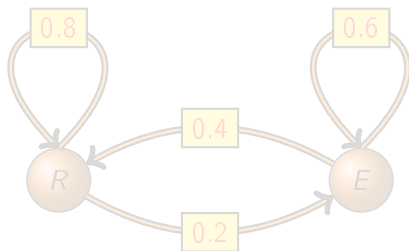
On voit que la seule différence avec le jeu précédent réside dans la valeur numérique des probabilités de transition.

Les lancers francs au basket

Lors des match, un joueur se comporte de la manière suivante :

- s'il réussit un lancer franc, il a la probabilité 0,8 de réussir le suivant ;
- s'il rate un lancer franc, il a la probabilité 0,6 de rater le suivant.

On peut représenter cela à l'aide du graphe probabiliste ci-dessous, dont les états sont R, réussite, et E, échec.



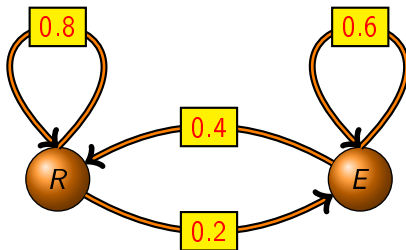
On voit que la seule différence avec le jeu précédent réside dans la valeur numérique des probabilités de transition.

Les lancers francs au basket

Lors des match, un joueur se comporte de la manière suivante :

- s'il réussit un lancer franc, il a la probabilité 0,8 de réussir le suivant ;
- s'il rate un lancer franc, il a la probabilité 0,6 de rater le suivant.

On peut représenter cela à l'aide du graphe probabiliste ci-dessous, dont les états sont R, réussite, et E, échec.



On voit que la seule différence avec le jeu précédent réside dans la valeur numérique des probabilités de transition.

Les lancers francs au basket

Résultats

Il aurait donc été préférable de faire, alors, le calcul avec des lettres :

D'après le graphe, nous avons les probabilités :

	vers A ou R	vers B ou E
De A ou R	$p_{A,A} = a$	$p_{A,B} = 1 - a$
De B ou E	$p_{B,A} = 1 - b$	$p_{B,B} = b$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $P = P \times T$ équivaut à $\begin{cases} (a-1).x + (1-b).y = 0 \\ (1-a).x + (b-1).y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = \frac{b-1}{a+b-2} \\ y = \frac{a-1}{a+b-2} \end{cases}$, ce qui donne ici $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ceci nous donne la répartition à long terme des succès et des échecs pour les lancers francs A et B.

Les lancers francs au basket

Résultats

Il aurait donc été préférable de faire, alors, le calcul avec des lettres :
D'après le graphe, nous avons les probabilités :

	vers A ou R	vers B ou E
De A ou R	$p_{A,A} = a$	$p_{A,B} = 1 - a$
De B ou E	$p_{B,A} = 1 - b$	$p_{B,B} = b$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $P = P \times T$ équivaut à $\begin{cases} (a-1).x + (1-b).y = 0 \\ (1-a).x + (b-1).y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = \frac{b-1}{a+b-2} \\ y = \frac{a-1}{a+b-2} \end{cases}$, ce qui donne ici $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ceci nous donne la répartition à long terme des succès et des échecs pour les lancers francs A et B.

Les lancers francs au basket

Résultats

Il aurait donc été préférable de faire, alors, le calcul avec des lettres :
D'après le graphe, nous avons les probabilités :

	vers A ou R	vers B ou E
De A ou R	$p_{A,A} = a$	$p_{A,B} = 1 - a$
De B ou E	$p_{B,A} = 1 - b$	$p_{B,B} = b$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $P = P \times T$ équivaut à $\begin{cases} (a-1).x + (1-b).y = 0 \\ (1-a).x + (b-1).y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = \frac{b-1}{a+b-2} \\ y = \frac{a-1}{a+b-2} \end{cases}$, ce qui donne ici $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ceci nous donne la répartition à long terme des succès et des échecs pour les lancers francs A et B.

Les lancers francs au basket

Résultats

Il aurait donc été préférable de faire, alors, le calcul avec des lettres :
D'après le graphe, nous avons les probabilités :

	vers A ou R	vers B ou E
De A ou R	$p_{A,A} = a$	$p_{A,B} = 1 - a$
De B ou E	$p_{B,A} = 1 - b$	$p_{B,B} = b$

et la matrice T de transition $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

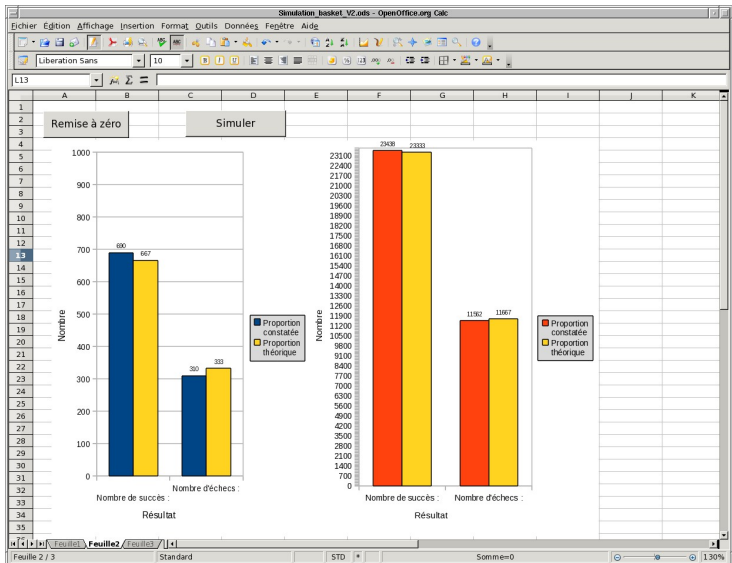
Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $P = P \times T$ équivaut à $\begin{cases} (a-1).x + (1-b).y = 0 \\ (1-a).x + (b-1).y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = \frac{b-1}{a+b-2} \\ y = \frac{a-1}{a+b-2} \end{cases}$, ce qui donne ici $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ceci nous donne la répartition à long terme des succès et des échecs pour les lancers francs A et B.

Les lancers francs au basket

Simulation utilisant le tableur OpenOffice.org



Les lancers francs au basket

Simulation utilisant le tableur OpenOffice.org

	A	B	C	D
1	$P_R(R)$	0,8	Nb succès :	=SOMME(B4:B1003)
2	$P_E(E)$	0,6	Nb échecs :	=SOMME(C4:C1003)
3				=SOMME(D1:D2)
4	1	=SI(A4=1 ; SI(ALEA()<\$B\$1;1;0); SI(ALEA()<\$B\$2;0;1))	=1-B4	
5	=B4	<i>idem</i>	<i>idem</i>	

Pourquoi des sacs en papier?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Pendant, il est tentant d'en sortir ...

Pourquoi des sacs en papier ?

On peut consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

On trouve dans cette page le jeu des sacs en papier, suivi d'un autre qui utilise, lui, deux fois deux sacs en papier et que l'auteur emploie pour introduire la notion de *Modèle de Markov caché*.

Il indique que cette notion a beaucoup d'applications :

- Reconnaissance de la parole.
- Traitement automatique du langage naturel (traduction automatique, étiquetage de texte, reconstruction de texte bruités...).
- Reconnaissance de l'écriture manuscrite.
- Bio-informatique (génomique).

Ceci est, bien, sûr, en dehors du programme de Terminale.

Cependant, il est tentant d'en sortir ...

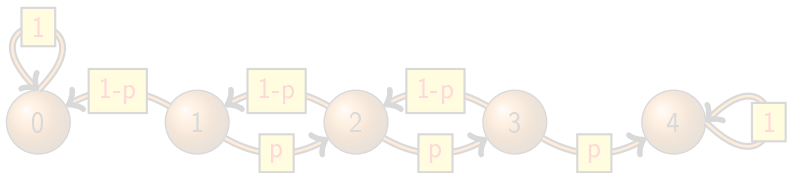
Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 **Présence d'états absorbants**
 - **La ruine du joueur**
 - Egalité au tennis

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

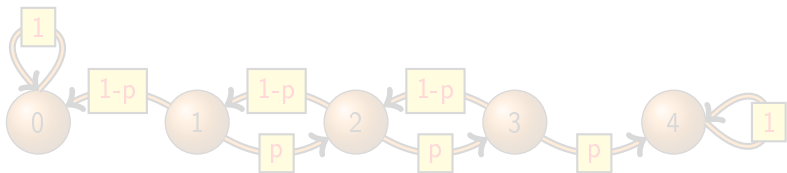
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

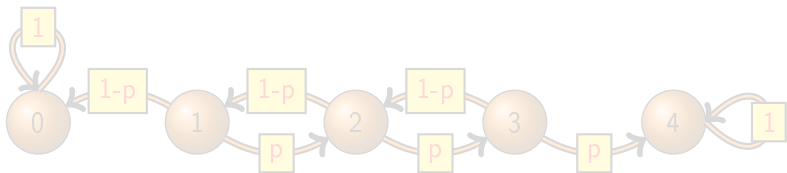
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

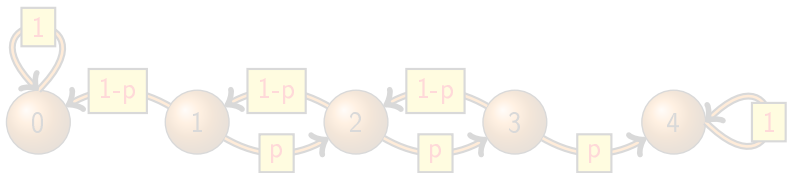
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

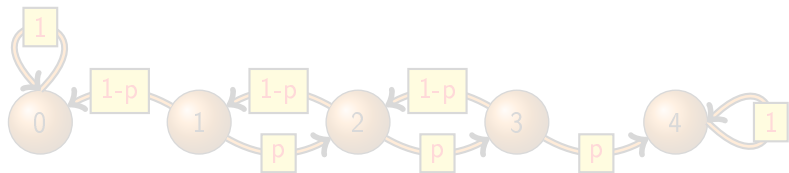
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

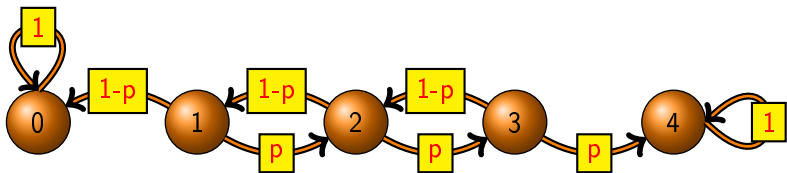
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

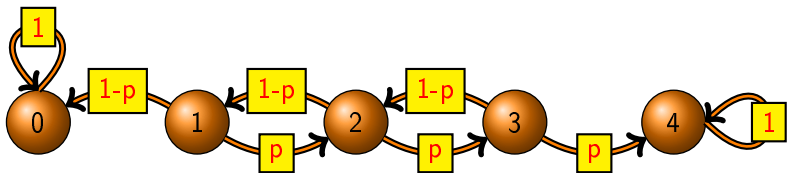
En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face :

- lors d'un lancer, la probabilité que pile sorte est égale à p ;
- chaque fois que pile sort, X gagne et Y lui donne 1€ ; sinon, c'est X qui donne 1€ à Y ;
- au départ, ils ont comme capital total 4€ ;
- le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.



Nous prendrons le capital k possédé par X comme ensemble des états, mais dans l'ordre 1, 2, 3, 0, 4.

En effet, les états 0 et 4 stoppent le jeu. On dit qu'ils sont absorbants.

Il est préférable de regrouper les états absorbants.

La ruine du joueur

Matrice de transition

D'après le graphe, on a $T = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

mais **le théorème de Perron-Frobenius ne s'applique pas**. Calculons d'abord T^n pour une grande valeur de n .

Si $p = 0,5$, T^{100} semble très proche (à 10^{-15} près pour chaque élément) de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ruine du joueur

Matrice de transition

D'après le graphe, on a $T = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

mais le **théorème de Perron-Frobenius ne s'applique pas**. Calculons *d'abord* T^n pour une grande valeur de n .

Si $p = 0,5$, T^{100} semble très proche (à 10^{-15} près pour chaque élément) de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ruine du joueur

Conclusions lorsque $p = 0,5$

Les trois premières colonnes de 0 signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

La petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indique seulement que les deux derniers états sont absorbants.

La matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ indique les probabilités d'arriver à l'un ou l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Conclusions lorsque $p = 0,5$

Les trois premières colonnes de 0 signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

La petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indique seulement que les deux derniers états sont absorbants.

La matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ indique les probabilités d'arriver à l'un ou l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Conclusions lorsque $p = 0,5$

Les trois premières colonnes de 0 signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

La petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indique seulement que les deux derniers états sont absorbants.

La matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ indique les probabilités d'arriver à l'un ou l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Cas où $p = 0,6$

Si $p = 0,6$, T^{100} a une forme analogue.

Les trois premières colonnes, très proches de 0, signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

Il y a aussi la petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui indique seulement que les deux derniers états sont absorbants,

et la matrice $\begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{57} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{65} \end{pmatrix}$, qui indique les probabilités d'arriver à l'un ou

l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Cas où $p = 0,6$

Si $p = 0,6$, T^{100} a une forme analogue.

Les trois premières colonnes, très proches de 0, signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

Il y a aussi la petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui indique seulement que les deux derniers états sont absorbants,

et la matrice $\begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{57} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{65} \end{pmatrix}$, qui indique les probabilités d'arriver à l'un ou

l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Cas où $p = 0,6$

Si $p = 0,6$, T^{100} a une forme analogue.

Les trois premières colonnes, très proches de 0, signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

Il y a aussi la petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui indique seulement que les deux derniers états sont absorbants,

et la matrice $\begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{57} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{65} \end{pmatrix}$, qui indique les probabilités d'arriver à l'un ou l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

La ruine du joueur

Cas où $p = 0,6$

Si $p = 0,6$, T^{100} a une forme analogue.

Les trois premières colonnes, très proches de 0, signifient que la probabilité, partant d'un état quelconque, d'être arrivé au centième lancer à un des trois états non absorbants est négligeable.

Il y a aussi la petite matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui indique seulement que les deux derniers états sont absorbants,

et la matrice $\begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{4}{9} & \frac{13}{57} \\ \frac{13}{65} & \frac{57}{65} \end{pmatrix}$, qui indique les probabilités d'arriver à l'un ou

l'autre des états absorbants en partant du cas où X a respectivement comme capital initial 1€, 2€ ou 3€.

Table des matières

- 1 Le bulletin officiel
 - Section ES
 - Section S
- 2 Un premier problème
 - Souris sans mémoire
- 3 Un peu de théorie
 - Chaînes de Markov et matrices
 - Théorème de Perron-Frobenius
- 4 Quelques jeux
 - Le jeu des sacs en papier
 - Les lancers francs au basket
- 5 **Présence d'états absorbants**
 - La ruine du joueur
 - **Egalité au tennis**

« Egalité » au tennis

Considérons un match de tennis au moment où l'arbitre vient de crier « Egalité ».

- Si le joueur A gagne le prochain point, il aura l'« avantage ».
- Au point suivant,
 - ▶ soit il gagne le jeu,
 - ▶ soit le jeu revient à « égalité ».

Supposons que, à chaque point, le joueur A a la probabilité $0,6$ de gagner ce point. Prenons comme états, dans cet ordre :

- a : avantage A
- b : avantage B
- E : égalité
- A : A gagne
- B : B gagne

(Les deux états absorbants, A et B , ont également été placés à la fin.)

« Egalité » au tennis

Considérons un match de tennis au moment où l'arbitre vient de crier « Egalité ».

- Si le joueur A gagne le prochain point, il aura l'« avantage ».
- Au point suivant,
 - ▶ soit il gagne le jeu,
 - ▶ soit le jeu revient à « égalité ».

Supposons que, à chaque point, le joueur A a la probabilité $0,6$ de gagner ce point. Prenons comme états, dans cet ordre :

- a : avantage A
- b : avantage B
- E : égalité
- A : A gagne
- B : B gagne

(Les deux états absorbants, A et B , ont également été placés à la fin.)

« Egalité » au tennis

Considérons un match de tennis au moment où l'arbitre vient de crier « Egalité ».

- Si le joueur A gagne le prochain point, il aura l'« avantage ».
- Au point suivant,
 - ▶ soit il gagne le jeu,
 - ▶ soit le jeu revient à « égalité ».

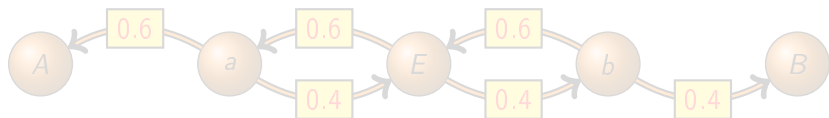
Supposons que, à chaque point, le joueur A a la probabilité $0,6$ de gagner ce point. Prenons comme états, dans cet ordre :

- a : avantage A
- b : avantage B
- E : égalité
- A : A gagne
- B : B gagne

(Les deux états absorbants, A et B , ont également été placés à la fin.)

« Égalité » au tennis

Graphe probabiliste



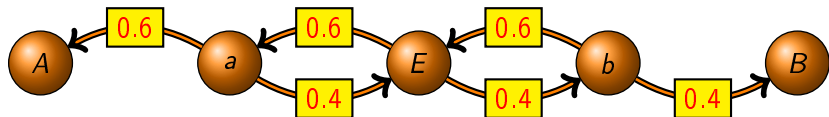
La matrice de transition est donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve que T^{100} est très proche de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ceci nous donne les probabilités que A gagne ou B gagne, selon qu'on part de « avantage A », « avantage B » ou « égalité ».

« Égalité » au tennis

Graphe probabiliste



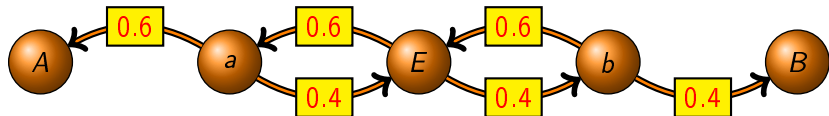
La matrice de transition est donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve que T^{100} est très proche de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ceci nous donne les probabilités que A gagne ou B gagne, selon qu'on part de « avantage A », « avantage B » ou « égalité ».

« Égalité » au tennis

Graphe probabiliste



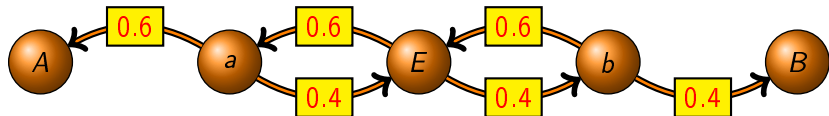
La matrice de transition est donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve que T^{100} est très proche de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ceci nous donne les probabilités que A gagne ou B gagne, selon qu'on part de « avantage A », « avantage B » ou « égalité ».

« Égalité » au tennis

Grphe probabiliste



La matrice de transition est donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve que T^{100} est très proche de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ceci nous donne les probabilités que A gagne ou B gagne, selon qu'on part de « avantage A », « avantage B » ou « égalité ».

Compléments concernant les deux derniers exemples

Matrices par blocs

On remarque que T est sous la forme $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où I représente ici une

matrice identité, 0 représente une matrice nulle, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

et $R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que, si $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} Q^n & ? \\ 0 & I \end{pmatrix}$, ce

qui nous montre que Q^n donne les probabilités de transition après n étapes concernant les états a , b et E .

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{25} & \frac{6}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{24}{125} \\ 0 & 0 & \frac{36}{125} \\ \frac{36}{125} & \frac{24}{125} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{72}{625} & \frac{48}{625} & 0 \\ \frac{108}{625} & \frac{72}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{144}{625} \end{pmatrix} \dots$$

Compléments concernant les deux derniers exemples

Matrices par blocs

On remarque que T est sous la forme $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où I représente ici une

matrice identité, 0 représente une matrice nulle, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

et $R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que, si $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} Q^n & ? \\ 0 & I \end{pmatrix}$, ce

qui nous montre que Q^n donne les probabilités de transition après n étapes concernant les états a , b et E .

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{25} & \frac{6}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{24}{125} \\ 0 & 0 & \frac{36}{125} \\ \frac{36}{125} & \frac{24}{125} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{72}{625} & \frac{48}{625} & 0 \\ \frac{108}{625} & \frac{72}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{144}{625} \end{pmatrix} \dots$$

Compléments concernant les deux derniers exemples

Matrices par blocs

On remarque que T est sous la forme $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où I représente ici une

matrice identité, 0 représente une matrice nulle, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

et $R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que, si $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} Q^n & ? \\ 0 & I \end{pmatrix}$, ce

qui nous montre que Q^n donne les probabilités de transition après n étapes concernant les états a , b et E .

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{25} & \frac{6}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{24}{125} \\ 0 & 0 & \frac{36}{125} \\ \frac{36}{125} & \frac{24}{125} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{72}{625} & \frac{48}{625} & 0 \\ \frac{108}{625} & \frac{72}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{144}{625} \end{pmatrix} \dots$$

Compléments concernant les deux derniers exemples

Matrices par blocs

On remarque que T est sous la forme $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où I représente ici une

matrice identité, 0 représente une matrice nulle, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

et $R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que, si $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} Q^n & ? \\ 0 & I \end{pmatrix}$, ce

qui nous montre que Q^n donne les probabilités de transition après n étapes concernant les états a , b et E .

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{25} & \frac{6}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{24}{125} \\ 0 & 0 & \frac{36}{125} \\ \frac{36}{125} & \frac{24}{125} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{72}{625} & \frac{48}{625} & 0 \\ \frac{108}{625} & \frac{72}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{144}{625} \end{pmatrix} \dots$$

Compléments concernant les deux derniers exemples

Matrices par blocs

On remarque que T est sous la forme $\begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où I représente ici une

matrice identité, 0 représente une matrice nulle, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

et $R = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que, si $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} Q^n & ? \\ 0 & I \end{pmatrix}$, ce

qui nous montre que Q^n donne les probabilités de transition après n étapes concernant les états a , b et E .

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ \frac{9}{25} & \frac{6}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{24}{125} \\ 0 & 0 & \frac{36}{125} \\ \frac{36}{125} & \frac{24}{125} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{72}{625} & \frac{48}{625} & 0 \\ \frac{108}{625} & \frac{72}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{144}{625} \end{pmatrix} \dots$$

Compléments concernant les deux derniers exemples

Propriétés

On peut montrer que :

- tous les éléments de la matrice Q^n ont comme limite 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0$;
- la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ existe et son élément $n_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passages à l'état n° j si on part de l'état n° i (ceci avant d'entrer dans un état absorbant).

(Ceci se justifie du fait que $N = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n$.)

En conséquence,

- l'espérance du nombre d'étapes franchies en partant de l'état n° i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne $N \times 1$ où 1 représente la matrice colonne dont tous les éléments sont égaux à 1 ;
- l'élément $b_{i,j}$ de la matrice $B = N \times R$ est la probabilité que, partant du $i^{\text{ème}}$ état non absorbant n° i , on finisse par « tomber » dans le $j^{\text{ème}}$ état absorbant.

Compléments concernant les deux derniers exemples

Propriétés

On peut montrer que :

- tous les éléments de la matrice Q^n ont comme limite 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0$;
- la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ existe et son élément $n_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passages à l'état n° j si on part de l'état n° i (ceci avant d'entrer dans un état absorbant).

(Ceci se justifie du fait que $N = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n$.)

En conséquence,

- l'espérance du nombre d'étapes franchies en partant de l'état n° i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne $N \times 1$ où 1 représente la matrice colonne dont tous les éléments sont égaux à 1 ;
- l'élément $b_{i,j}$ de la matrice $B = N \times R$ est la probabilité que, partant du $i^{\text{ème}}$ état non absorbant n° i , on finisse par « tomber » dans le $j^{\text{ème}}$ état absorbant.

Compléments concernant les deux derniers exemples

Propriétés

On peut montrer que :

- tous les éléments de la matrice Q^n ont comme limite 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0$;
- la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ existe et son élément $n_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passages à l'état n° j si on part de l'état n° i (ceci avant d'entrer dans un état absorbant).

(Ceci se justifie du fait que $N = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n$.)

En conséquence,

- l'espérance du nombre d'étapes franchies en partant de l'état n° i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne $N \times 1$ où 1 représente la matrice colonne dont tous les éléments sont égaux à 1 ;
- l'élément $b_{i,j}$ de la matrice $B = N \times R$ est la probabilité que, partant du $i^{\text{ème}}$ état non absorbant n° i , on finisse par « tomber » dans le $j^{\text{ème}}$ état absorbant.

Compléments concernant les deux derniers exemples

Propriétés

On peut montrer que :

- tous les éléments de la matrice Q^n ont comme limite 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0$;
- la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ existe et son élément $n_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passages à l'état n° j si on part de l'état n° i (ceci avant d'entrer dans un état absorbant).

(Ceci se justifie du fait que $N = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n$.)

En conséquence,

- l'espérance du nombre d'étapes franchies en partant de l'état n° i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne $N \times \mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ représente la matrice colonne dont tous les éléments sont égaux à 1 ;
- l'élément $b_{i,j}$ de la matrice $B = N \times R$ est la probabilité que, partant du $i^{\text{ème}}$ état non absorbant n° i , on finisse par « tomber » dans le $j^{\text{ème}}$ état absorbant.

Compléments concernant les deux derniers exemples

Propriétés

On peut montrer que :

- tous les éléments de la matrice Q^n ont comme limite 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0$;
- la matrice $N = (I - Q)^{-1}$ existe et son élément $n_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passages à l'état n° j si on part de l'état n° i (ceci avant d'entrer dans un état absorbant).

(Ceci se justifie du fait que $N = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n$.)

En conséquence,

- l'espérance du nombre d'étapes franchies en partant de l'état n° i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne $N \times 1$ où 1 représente la matrice colonne dont tous les éléments sont égaux à 1;
- l'élément $b_{i,j}$ de la matrice $B = N \times R$ est la probabilité que, partant du $i^{\text{ème}}$ état non absorbant n° i , on finisse par « tomber » dans le $j^{\text{ème}}$ état absorbant.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{13}{15} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{10}{13} & \frac{25}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88% ;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58% ;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{13}{15} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{10}{13} & \frac{25}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88% ;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58% ;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{13}{15} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{10}{13} & \frac{25}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88%;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58%;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{15}{13} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}; N \times \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88%;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58%;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{15}{13} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88%;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58%;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{15}{13} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{10}{13} & \frac{25}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88%;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58%;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

« Égalité » au tennis

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{4}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{13}{19} & \frac{15}{13} \\ \frac{13}{15} & \frac{13}{10} & \frac{25}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{10}{13} & \frac{25}{13} \end{pmatrix}; N \times \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{43}{13} \\ \frac{13}{50} \\ \frac{13}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{57}{65} & \frac{8}{65} \\ \frac{27}{65} & \frac{38}{65} \\ \frac{65}{9} & \frac{65}{4} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant de « avantage A », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 points;
- en partant de « avantage B », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 points;
- en partant de « égalité », le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,69 points;
- en partant de « avantage A », la probabilité que A gagne est 88%;
- en partant de « avantage B », la probabilité que B gagne est 58%;
- en partant de « égalité », la probabilité que A gagne est 69%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; N \times \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; N \times \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; \quad N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

La ruine du joueur

Nouveaux résultats

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} & \frac{15}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{25}{13} & \frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{10}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}; \quad N \times 1 = \begin{pmatrix} \frac{43}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{38}{65} & \frac{27}{65} \\ \frac{65}{4} & \frac{65}{9} \\ \frac{13}{8} & \frac{13}{57} \\ \frac{65}{65} & \frac{65}{65} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

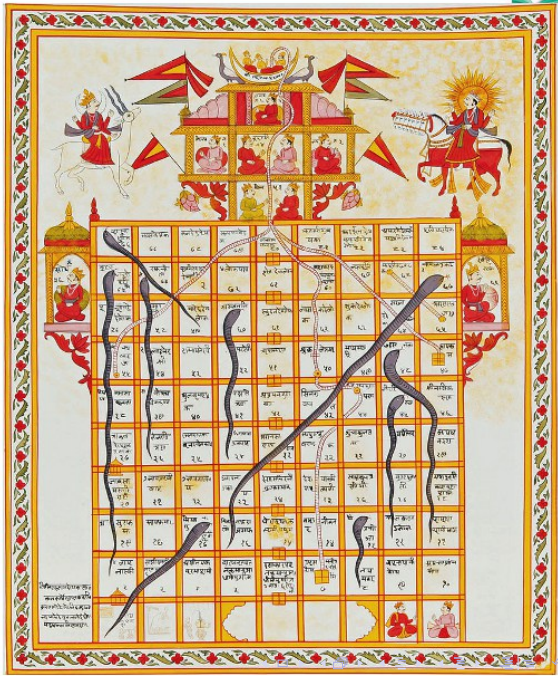
- En partant du capital 1€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,31 lancers ;
- en partant du capital 2€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 3,85 lancers ;
- en partant du capital 3€ pour X , le jeu en cours sera fini après, en moyenne, 2,54 lancers ;
- en partant du capital 1€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 58% ;
- en partant du capital 2€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 31% ;
- en partant du capital 3€ pour X , la probabilité que X soit ruiné est 12%.

Un jeu de société

Serpents et Echelles

Les jeux de société ont généralement un grand nombre d'états...

Voici un jeu (anglo-américain), Snakes and Ladders, correspondant à une chaîne de Markov et qui a été l'objet d'un article de mathématique.



Serpents et Echelles

Conclusions de l'article

Les auteurs trouvent que

- dans le cas où on utilise un jeu comprenant 10×10 cases, dix serpents et 9 échelles,
 - ▶ la durée moyenne d'une partie est d'environ 39,2 lancers.

Article de S.C. ALTHOEN. L. KING. K. SCHILLING, Department of Mathematics. The University of Michigan - Flint, Flint, Michigan. U.S.A. The Mathematical Gazette Vol. 77, No. 478, Mar., 1993

<http://www.jstor.org/>

Comme cet article de vulgarisation date de 1993, la description de l'emploi d'un ordinateur date énormément, ce qui est assez amusant (ou émouvant ?)

Obtenir cet article est payant, mais on peut s'inscrire sur jstor pour le consulter gratuitement.

De plus, il est en accès libre sur

<https://wiki.sfu.ca/personal/aoberman/images/c/cc/SnakesandLadders.pdf>

Quelques liens

Les documents de Louis-Marie Bonneval :

<http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-dimanche-matin,4799>

L'atelier que j'avais proposé :

<http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-lundi-apres-midi,4801>

Les programmes de TES et de TS :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/2/mathematiques_ES_L_195982.pdf

http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

Documents concernant les propriétés des matrices utilisées ici :

<http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Perron-Frobenius.pdf>

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregExterne/MatricesPositives.pdf>

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/malbos/lib/exe/fetch.php?media=ens_algapp12_algapiichapiii.pdf

modèle de Markov caché :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Markov_cach%C3%A9

CaRMetal :

<http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/>

GeoGebra :

<http://www.geogebra.org/cms/>