
Autour du théorème de Pythagore

I. Le problème

C'est l'exercice 482-3 du *Bulletin n° 482* (mai-juin 2009) de l'APMEP.

1. Énoncé

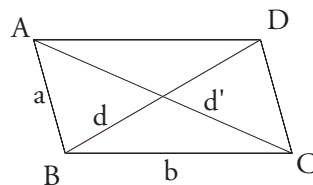
La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Établir ce résultat et proposer un puzzle.

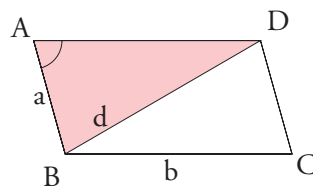
2. Démonstration

Elle repose sur le théorème d'Al-Kashi.

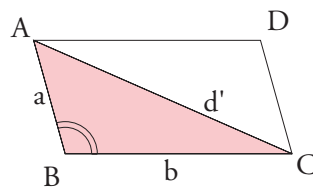
Notations : ABCD est un parallélogramme, on pose $a = AB = CD$, $b = AD = BC$, $d = BD$ et $d' = AC$.



Dans le triangle ABD, $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$:



Dans le triangle ABC, $d'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$:



Donc $d^2 + d'^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cos A - 2ab \cos B = 2a^2 + 2b^2 - 2ab (\cos A + \cos B)$.

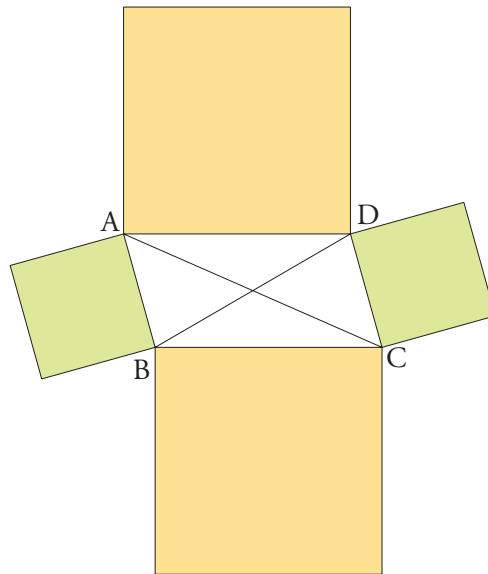
Mais comme les angles en A et en B sont supplémentaires, $\cos A + \cos B = 0$ on a $d^2 + d'^2 = 2a^2 + 2b^2$.

II. Interprétation géométrique

1. Somme des carrés des côtés

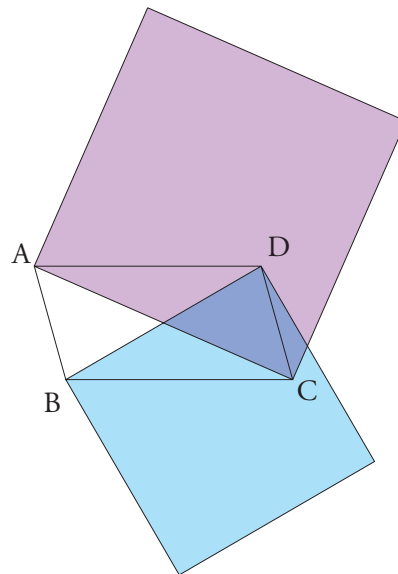
Elle est représentée par la somme des aires des carrés construits sur les côtés du parallélogramme

ABCD.



2. Somme des carrés des diagonales

Il s'agit de même de la somme des aires des carrés construits sur chacune des deux diagonales du parallélogramme ABCD.



3. Conséquence

Démontrer la propriété équivaut donc à montrer que la somme des aires des carrés construits sur les côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des aires des carrés construits sur ses diagonales.

Ce qui suit ne constitue pas une démonstration de cette propriété mais une double interprétation vue au travers du prisme de la démonstration du théorème de Pythagore par Euclide, les échanges de carrés rappelant en effet cette démonstration.

III. Intermède : le théorème de Pythagore dans *Les Éléments* d'Euclide

Le théorème de Pythagore dans *Les Éléments* est l'énoncé de la proposition 47 du Livre I.

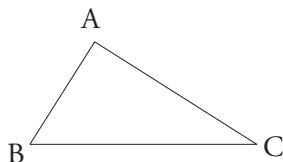
1. Énoncé

« Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. »

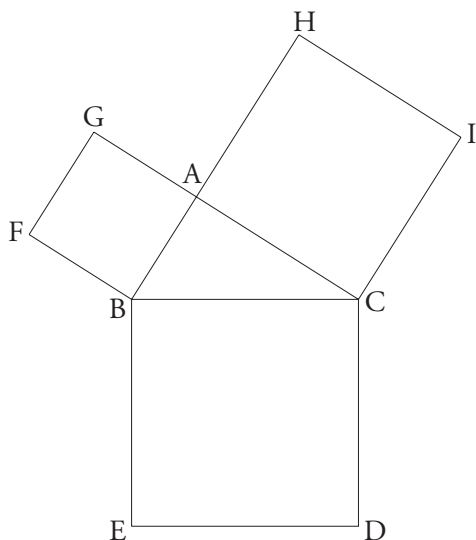
2. Démonstration

- Situation

ABC est un triangle rectangle en A.

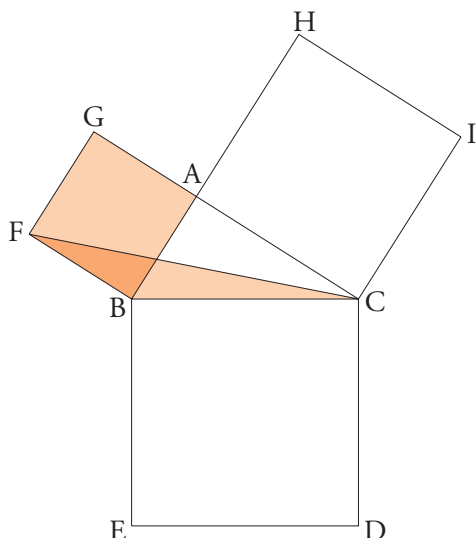


Démontrer le théorème consiste à montrer que l'aire d'un carré BCDE construit sur l'hypoténuse [BC] est égale à la somme des aires de carrés ABFG et ACIH respectivement construits sur les côtés [AB] et [AC] de l'angle droit.



- 1^{re} étape

L'aire du carré ABFG est le double de l'aire du triangle BFC parce que le parallélogramme (carré) ABFG a même base [BF] que le triangle BFC et qu'il est dans les mêmes parallèles (BF) et (CG). Cette propriété est la proposition 41 du même livre.

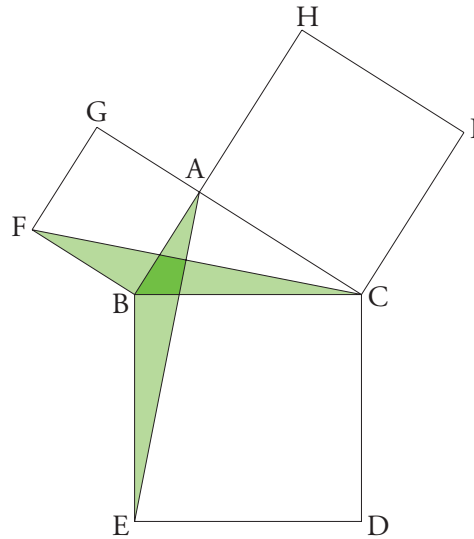


- 2^e étape

Dans les triangles BFC et ABE, on a $BF = BA$, $BC = BE$ et leurs angles en B sont égaux, tous deux égaux à un droit plus l'angle en B du triangle ABC.

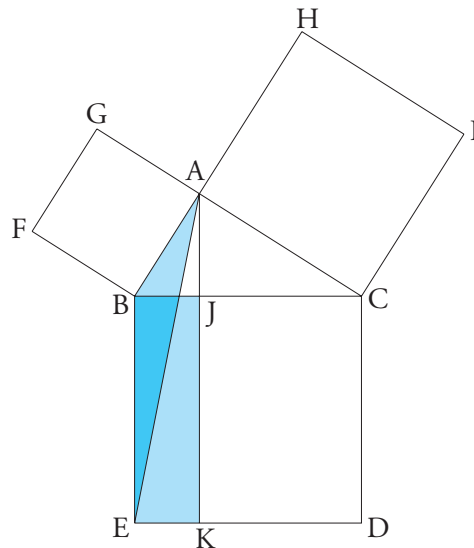
On en déduit (proposition 4 du livre I) qu'ils sont isométriques et de là qu'ils ont même aire.

L'aire du carré ABFG est donc égale au double de l'aire du triangle ABE.



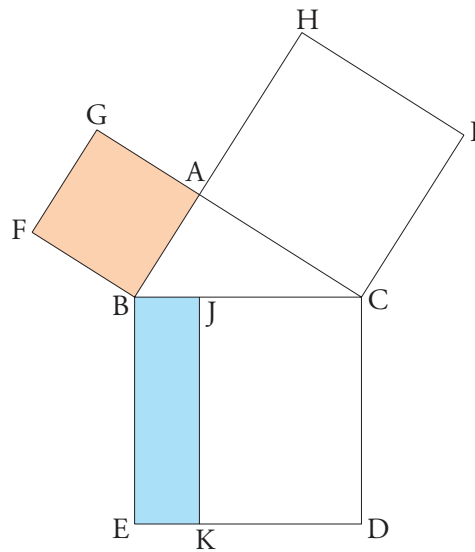
- 3^e étape

Comme à la première étape, l'aire du rectangle BEKJ est le double de l'aire du triangle BEA parce que le parallélogramme (rectangle) BEKJ a même base [BE] que le triangle BEA et qu'il est dans les mêmes parallèles (BE) et (AK).



- Conclusion partielle

Le carré ABFG et le rectangle BEKJ ont même aire.



- Conclusion

On démontrerait de même que le carré ACIH a même aire que le rectangle CDKJ.

De là, on peut affirmer que l'aire du carré BCDE est égale à la somme des aires des carrés ABFG et ACIH.

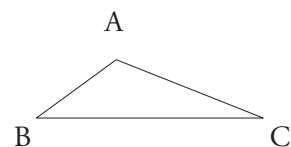
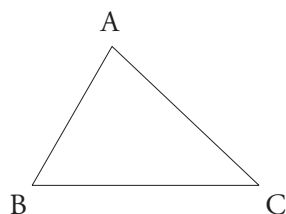
3 . Illustration dynamique de la démonstration par Euclide du théorème de Pythagore à l'aide du logiciel GeoGebra

Il s'agit de l'utilisation du fichier *Pythagore.ggb* qui est en annexe.

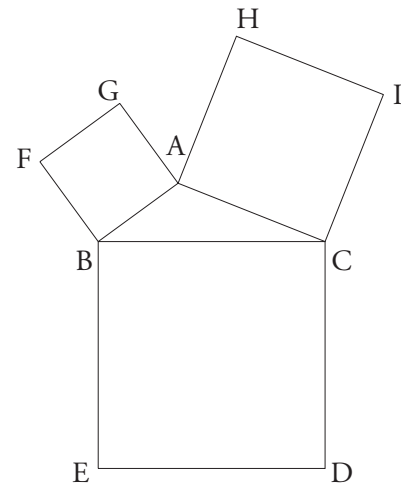
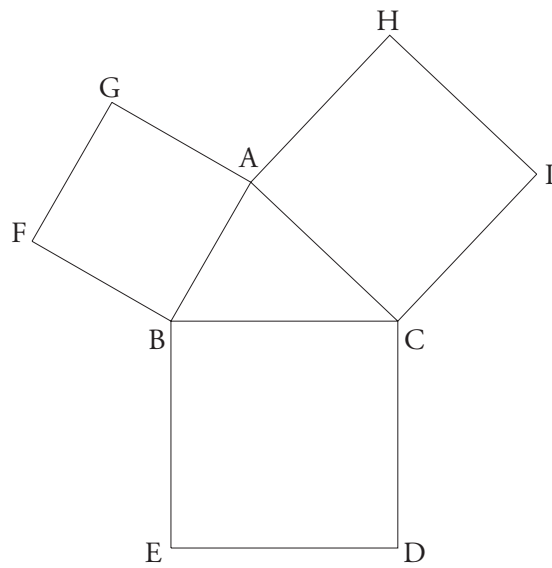
IV . Première utilisation de la démonstration du théorème de Pythagore par Euclide dans le cas d'un triangle quelconque

1 . Situation

ABC est un triangle. On distinguera deux cas selon que le triangle n'a aucun angle obtus ou que l'angle en A est obtus.

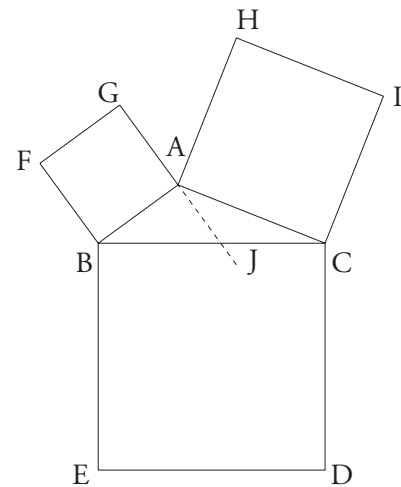
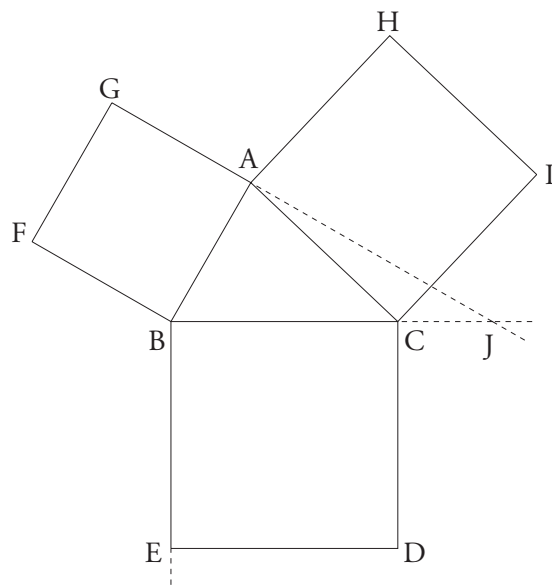


Sur ses côtés on construit les carrés ABFG, BCDE et ACIH.

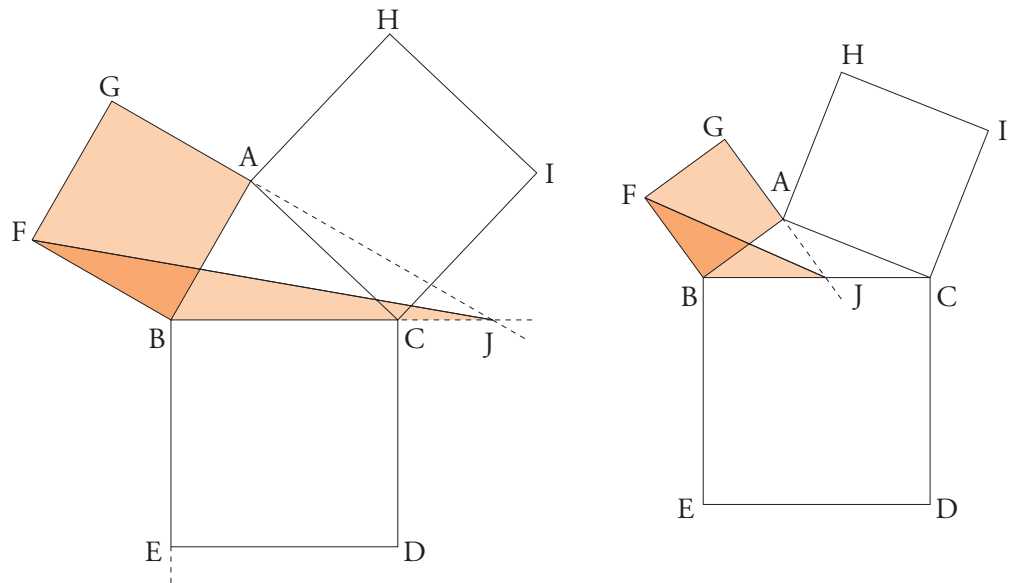


2. Application de la méthode au carré ABFG

On commence par prolonger les segments $[GA]$ et $[BC]$ de façon à placer le point d'intersection J des droites (GA) et (BC) .



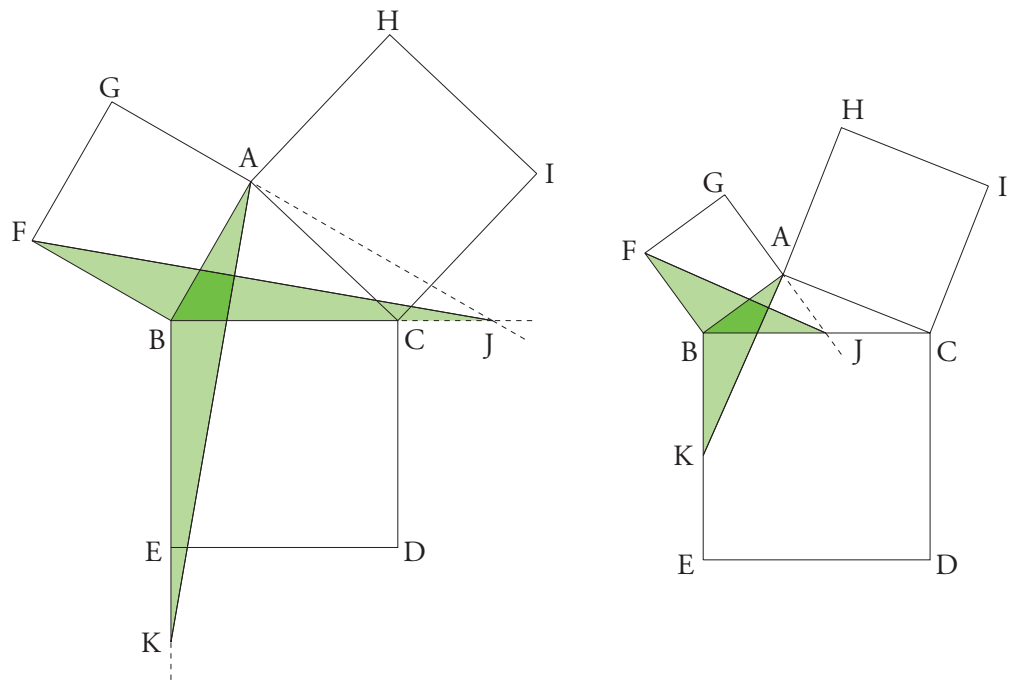
L'aire du carré ABFG est le double de celle du triangle BFJ (voir plus haut au théorème de Pythagore).



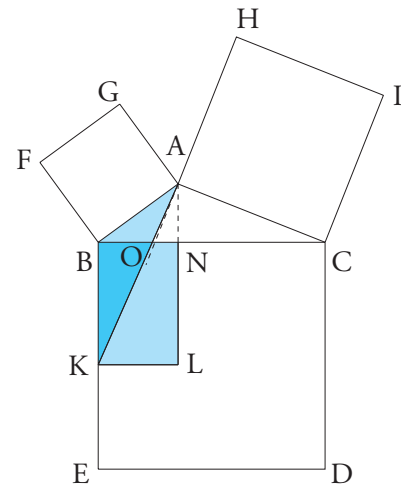
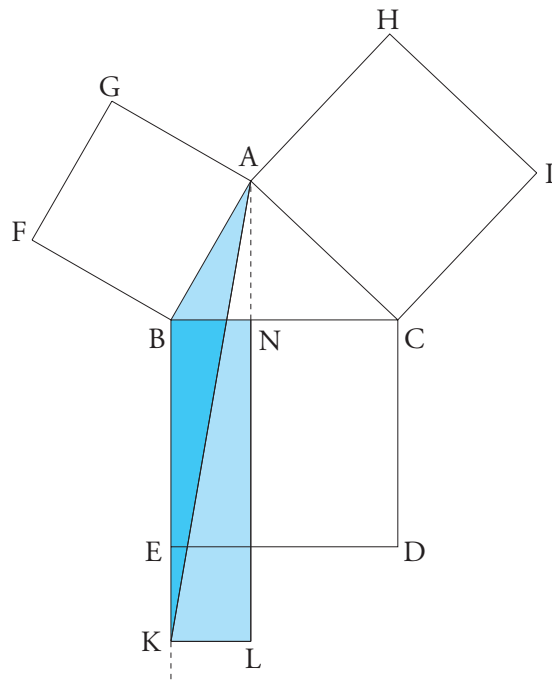
Soit K le point de la demi-droite $[BE)$ tel que $BK = BJ$.

Dans les triangles BFJ et BHK , on a donc $BF = BA$, $BK = BJ$ et leurs angles en B sont égaux, tous deux égaux à un droit plus l'angle en B du triangle ABC . On en déduit qu'ils sont isométriques et par suite qu'ils ont même aire.

L'aire du carré $ABFG$ est donc égale au double de l'aire du triangle ABK .



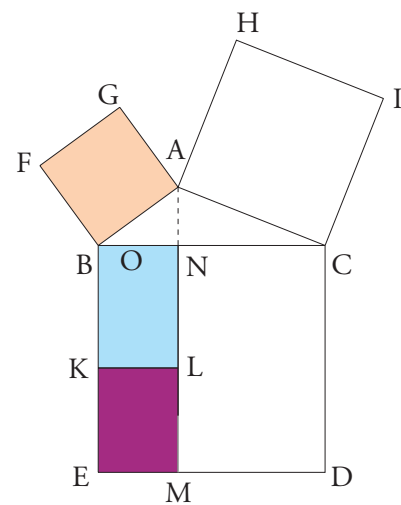
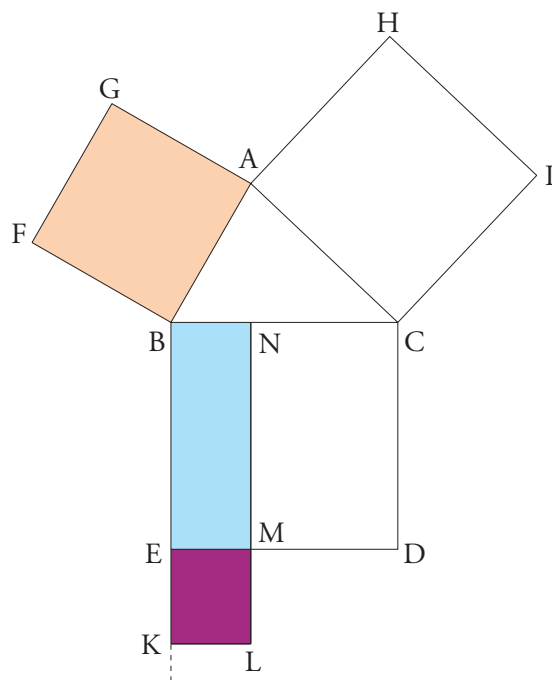
L'aire du rectangle $BKLN$ est le double de l'aire du triangle ABK .



Par conséquent, l'aire du carré ABFG est égale à celle du rectangle BKNL.

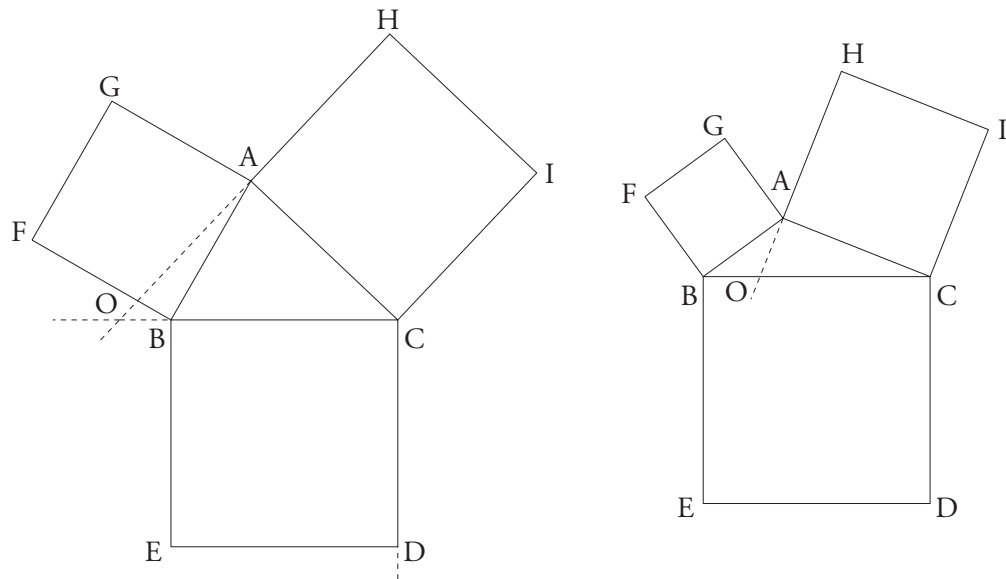
Dans le cas où le triangle ABC n'a aucun angle obtus, ceci peut aussi être énoncé sous la forme : l'aire du carré ABFG est égale à la somme de l'aire des rectangles BEMN et EKLM. Il est à noter que le rectangle EKLM est extérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC.

Dans le cas où l'angle en A est obtus, on peut dire que l'aire du carré ABFG est égale à la différence entre l'aire du rectangle BEMN et celle du rectangle EKLM. Dans ce cas, le rectangle EKLM est intérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC.

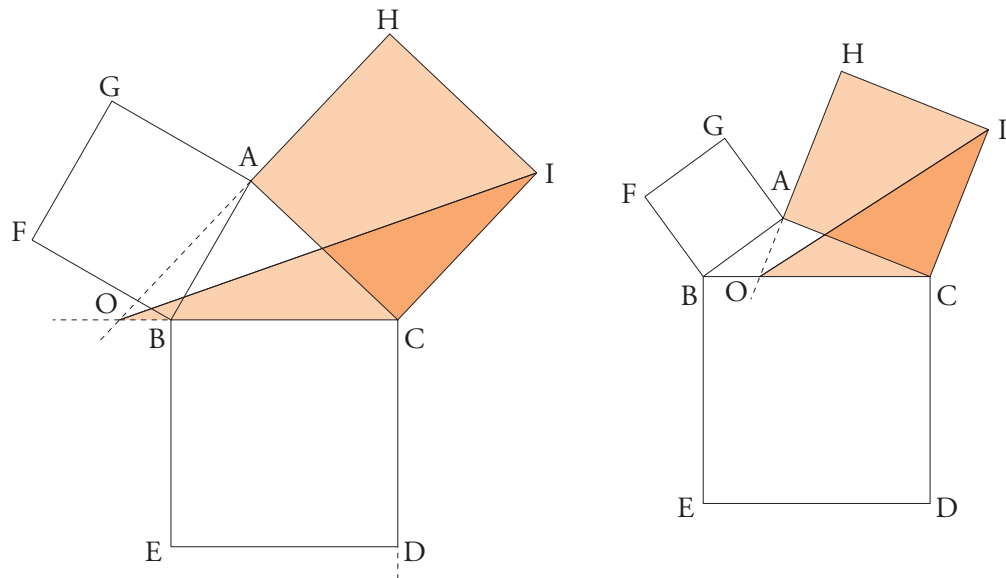


3 . Application de la méthode au carré ACIH

Comme précédemment, on commence par prolonger les segments $[HA]$ et $[BC]$ pour placer le point d'intersection O des droites (HA) et (BC) .



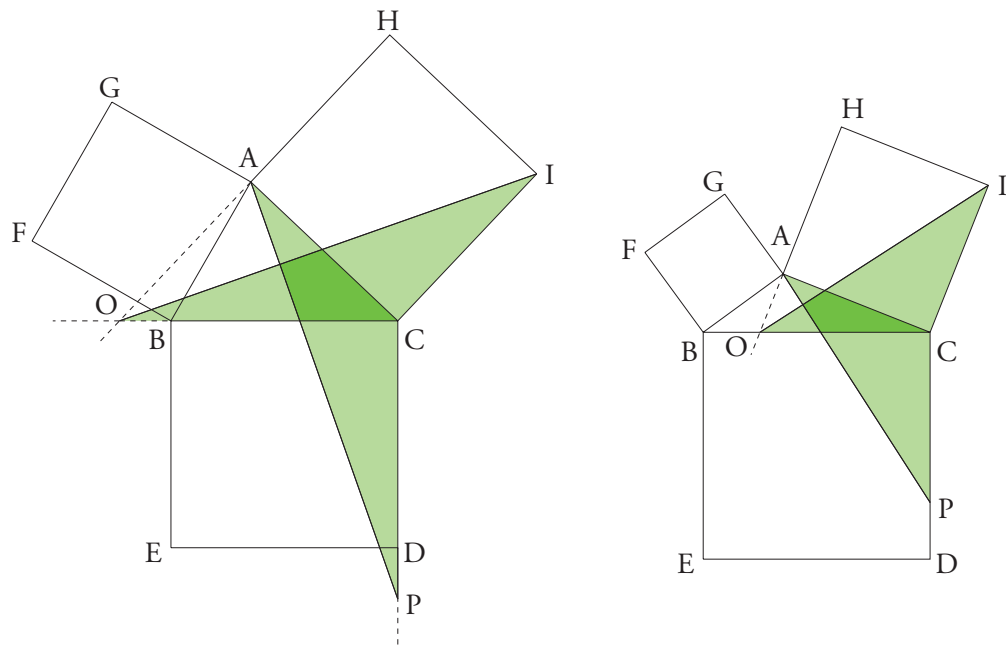
L'aire du carré ACIH est le double de celle du triangle ICO.



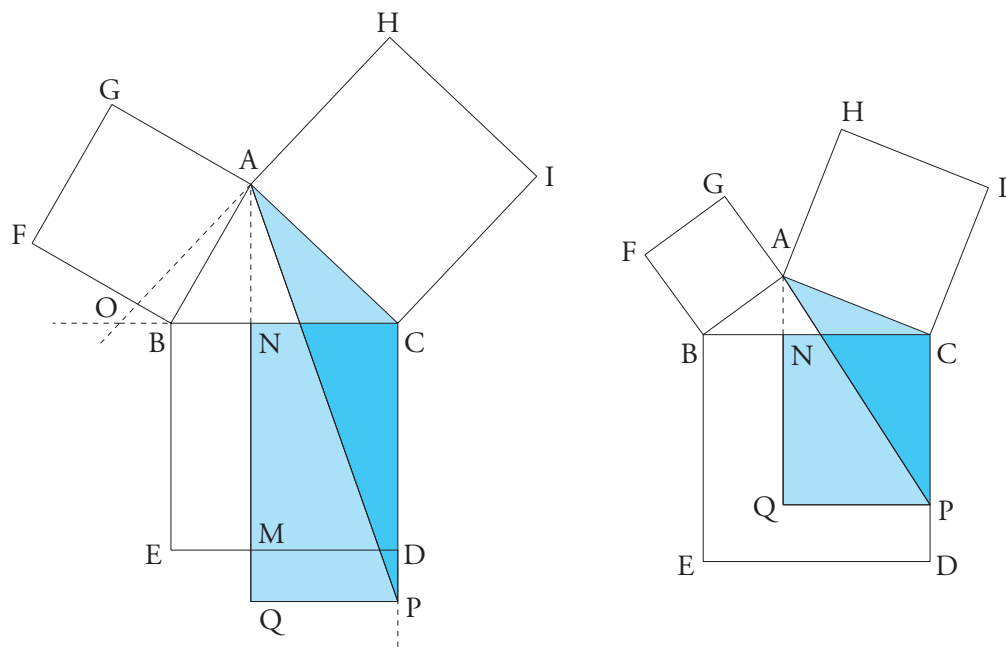
P désigne le point de la demi-droite $[CD)$ tel que $CP = CO$.

Dans les triangles ICO et ACP , on a donc $CI = CA$, $CO = CP$ et leurs angles en C sont égaux puisque tous deux égaux à un droit plus l'angle en C du triangle ABC . Ils sont par suite isométriques et ont même aire.

L'aire du carré ACIH est donc égale au double de l'aire du triangle ACP .

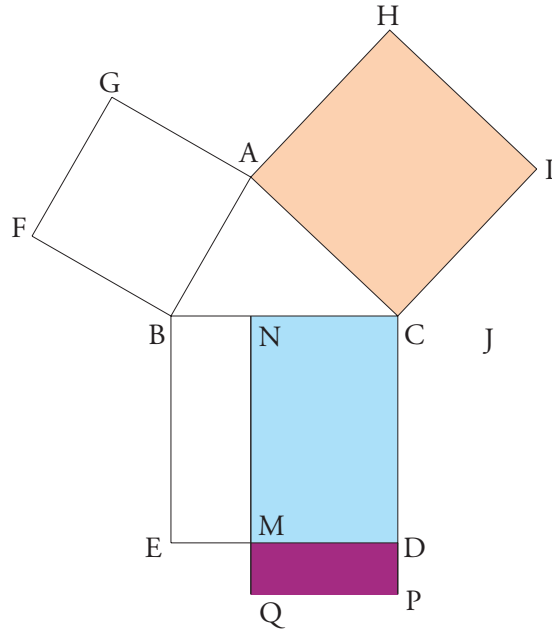


L'aire du rectangle CPQN est le double de l'aire du triangle ACP.

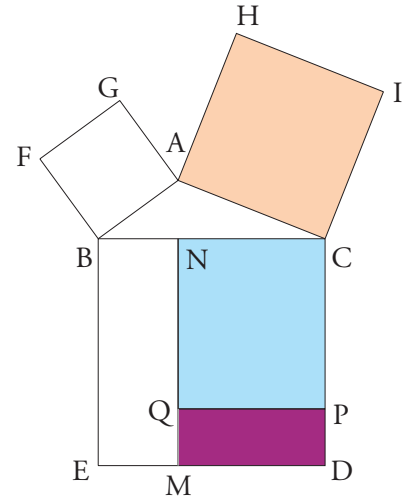


On en déduit que l'aire du carré ACIH est égale à celle du rectangle CPQN.

En d'autres termes, si tous les angles du triangle ABC sont aigus, l'aire du carré ACIH est égale à la somme de l'aire des rectangles CDMN et DPQM. Comme dans le premier cas, le rectangle DPQM est extérieur au carré BCDE.

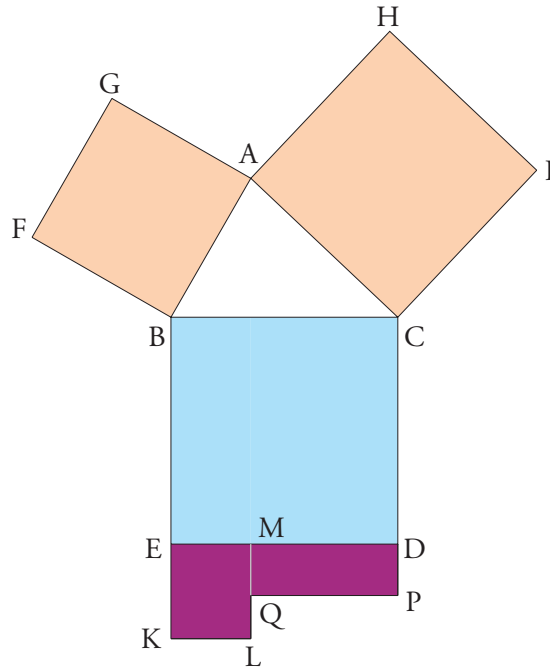


Si par contre l'angle en A est obtus, l'aire du carré ACIH est égale à la différence entre l'aire du rectangle CDMN et celle de DPQM. Ici encore, le rectangle DPQM est intérieur au carré BCDE.

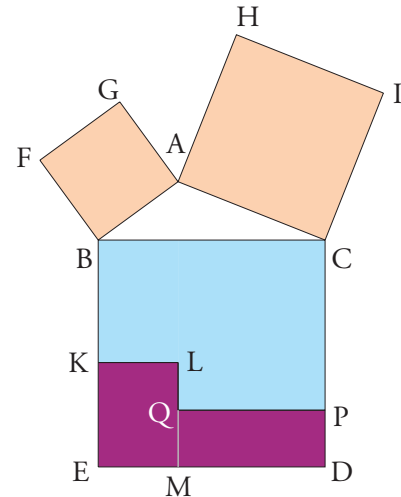


4. Conclusion n° 1

Lorsqu'aucun angle du triangle n'est obtus, la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la somme de l'aire du carré BCDE et de celle du polygone EDPQLK.



Quand l'angle en A est obtus, la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la différence entre l'aire du carré BCDE et celle du polygone EDPQLK.



5. Illustration dynamique des découpages précédents à l'aide de GeoGebra

On trouvera en annexe le descriptif nécessaire.

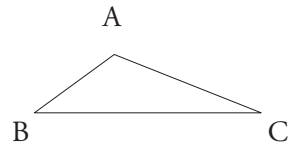
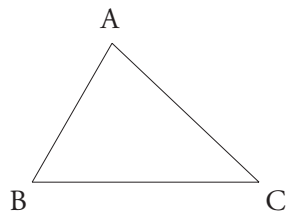
6. Remarques

- Les rectangles EMLK et DPQM ont même aire (non démontré ici, mais observé à l'aide de GeoGebra, voir plus loin).
- Donc dans le premier cas, la phrase « la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la somme de l'aire du carré BCDE et de celle du polygone EDPQLK » peut s'écrire : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2EK \times EM$ tandis que dans le cas de l'angle obtus, la phrase « la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la différence entre l'aire du carré BCDE et celle du polygone EDPQLK » se transforme en $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2EK \times EM$
- Le théorème d'al-Kashi donne $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$.
- L'aire de chacun des deux rectangles EMLK et DMQP vaut donc $AB \times AC \times |\cos A|$ soit $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$.

V. Seconde utilisation de la démonstration du théorème de Pythagore par Euclide dans le cas d'un triangle quelconque

1. Situation

Elle est inchangée : ABC est un triangle et on distingue de nouveau les deux cas selon que les angles sont aigus ou que l'angle en A est obtus.



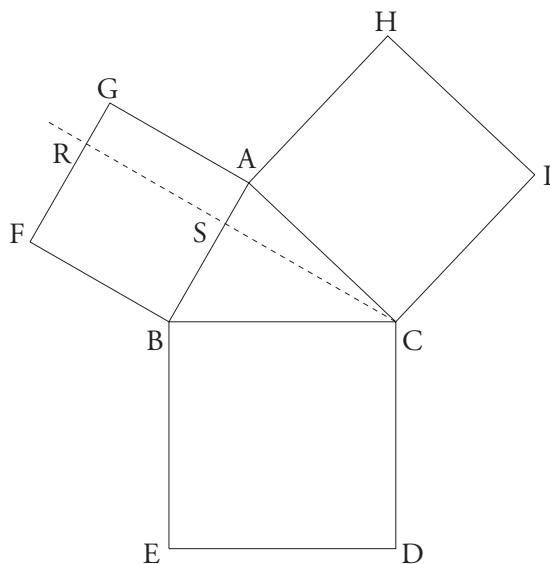
L'idée de cette autre utilisation de la démonstration du théorème de Pythagore qu'on lit dans *Les Éléments* d'Euclide provient de la recherche préalable du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{A\Phi}$ en notant Φ le projeté orthogonal de C sur (AB) ou bien $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{A\Psi} \times \overline{AC}$, Ψ désignant le projeté orthogonal de B sur (AC).

Ceci revient par conséquent à travailler avec ces projetés orthogonaux.

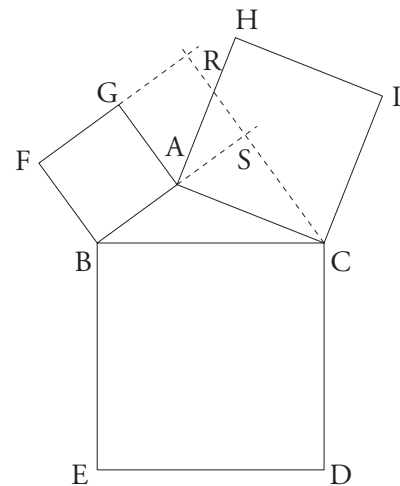
2. Pour le carré ABFG

La perpendiculaire à (FG) passant par C coupe (FG) et (AB) respectivement en R et S.



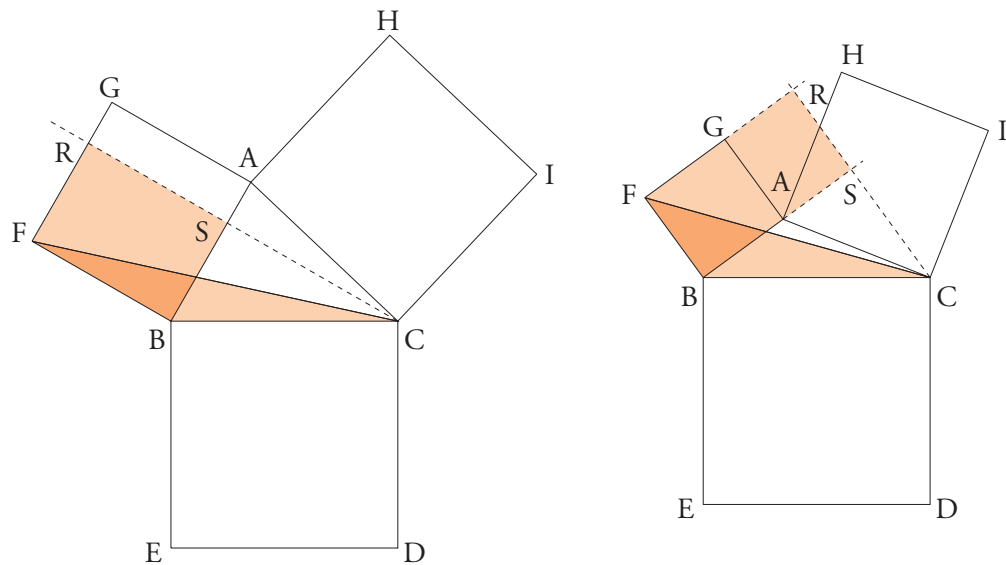
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AS} = AB \times AS = AG \times AS.$$

Dans les deux cas, $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$ est l'aire du rectangle AGRS.

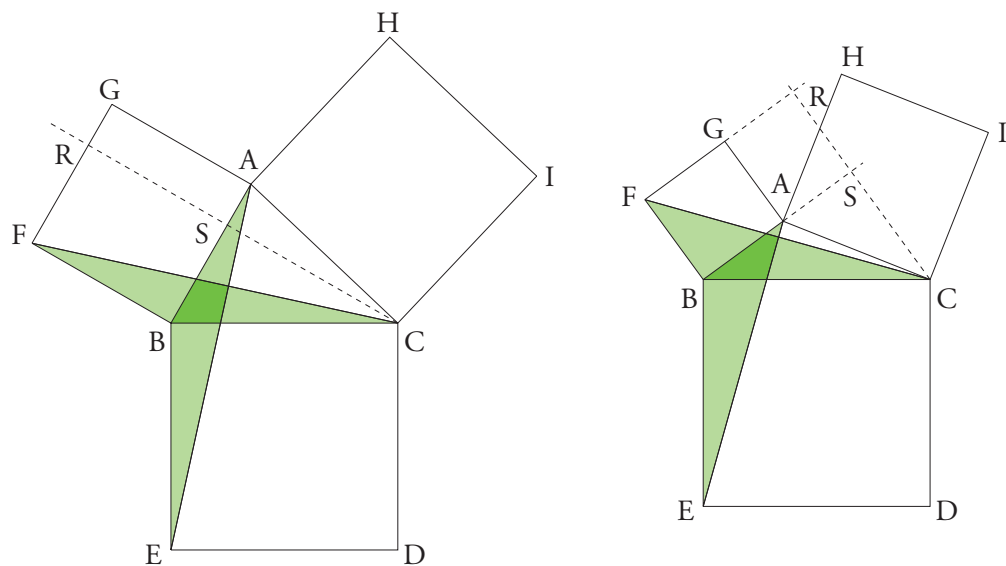


$$|\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = |\overline{AB} \times \overline{AS}| = AB \times AS$$

$$\text{d'où } |\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = AG \times AS.$$

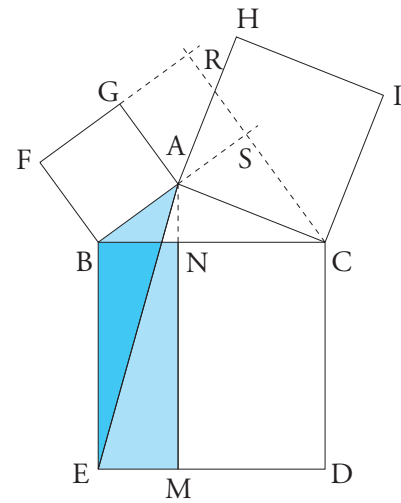
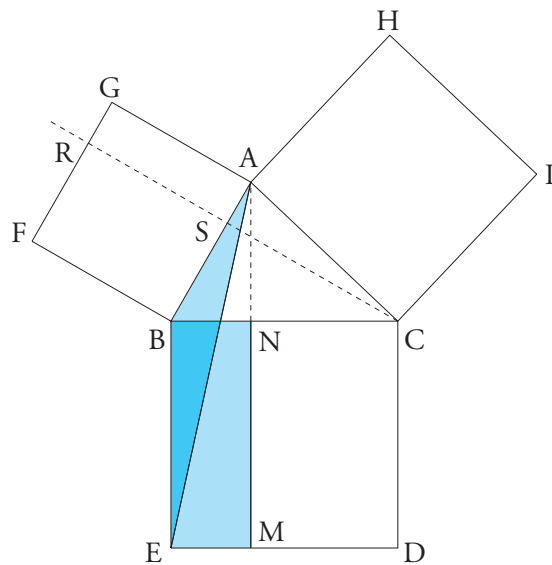


L'aire du rectangle BFRS est le double de celle du triangle BCF.



Dans les triangles BCF et BEA, on a donc $BC = BE$, $BF = BA$ et leurs angles en B sont égaux puisque tous deux égaux à un droit plus l'angle en B du triangle ABC. Ils sont donc isométriques et ont même aire.

L'aire du rectangle BFRS est donc le double de celle du triangle ABE.



L'aire du rectangle BEMN est le double de l'aire du triangle ABE.

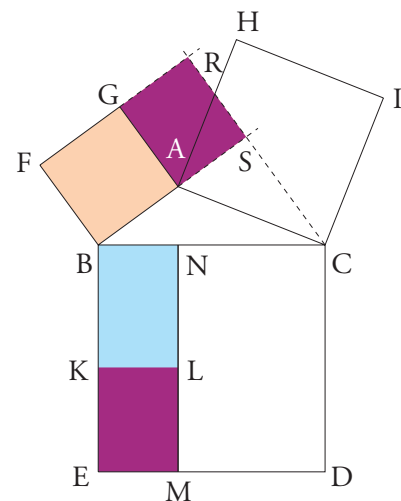
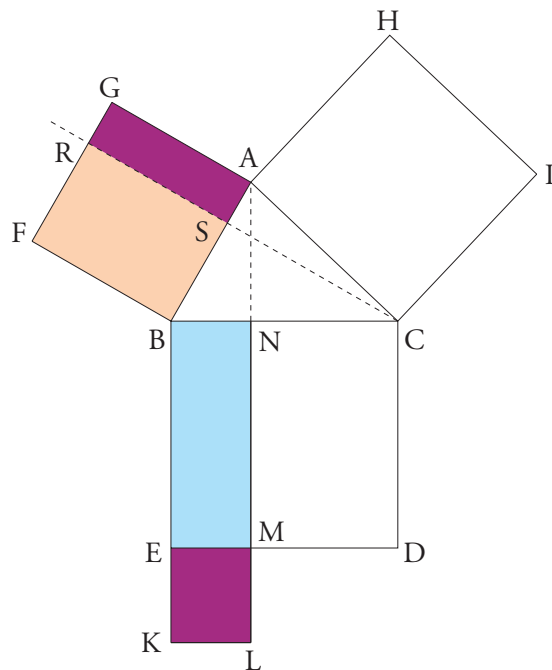
Par conséquent, l'aire du rectangle ABFG est égale à celle du rectangle BEMN.

Lorsque les angles du triangle ABC sont aigus, ceci peut aussi être transformé en : l'aire du carré ABFG est égale à la somme de l'aire des rectangles BEMN et EKLM. On retrouve le fait que le rectangle EKLM est extérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC.

Ceci achève de démontrer que l'aire du rectangle EKLM est égale à $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

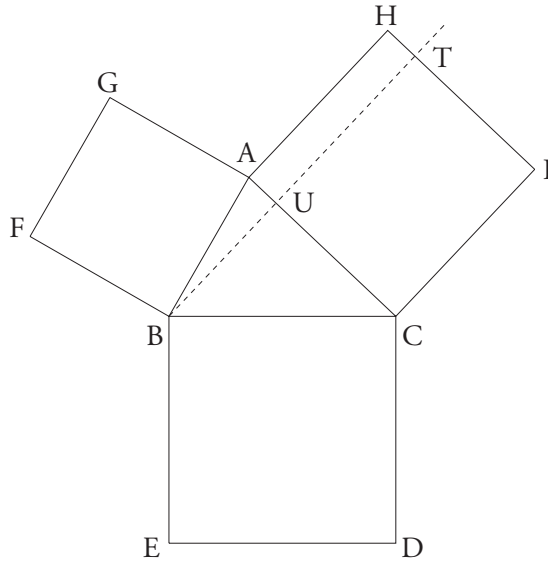
Si l'angle en A est obtus, l'aire du carré ABFG est égale à la différence entre l'aire du rectangle BEMN et celle du rectangle EKLM. Dans ce cas, le rectangle EKLM est intérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC.

Et ceci achève aussi de démontrer que l'aire du rectangle EKLM est égale à $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$.

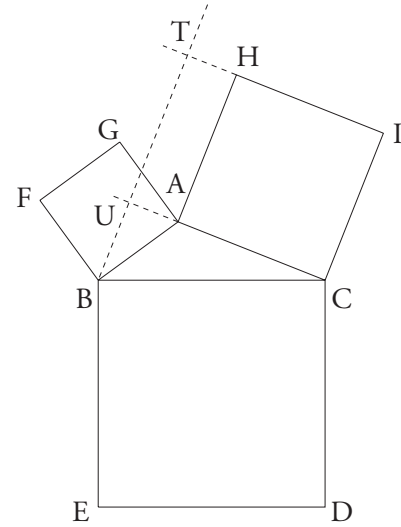


3. Pour le carré ACIH

On trace la perpendiculaire à (HI) passant par B. Elle coupe (HI) et (AC) respectivement en T et U.



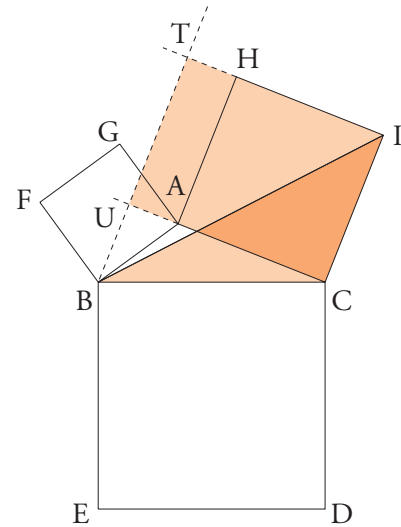
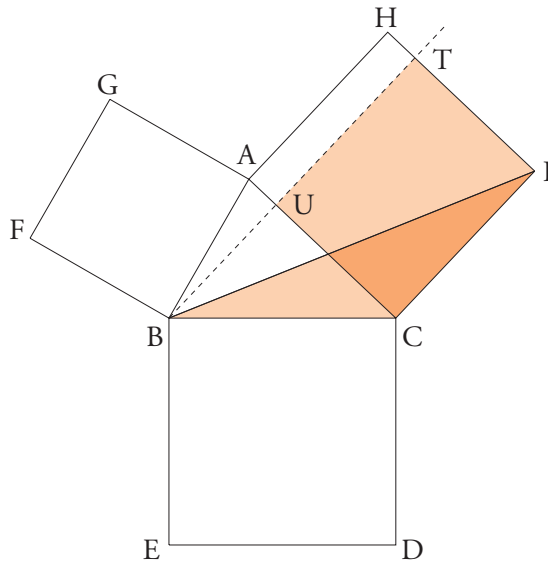
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AU} \times \overline{AC} = AU \times AC = AU \times AH.$$



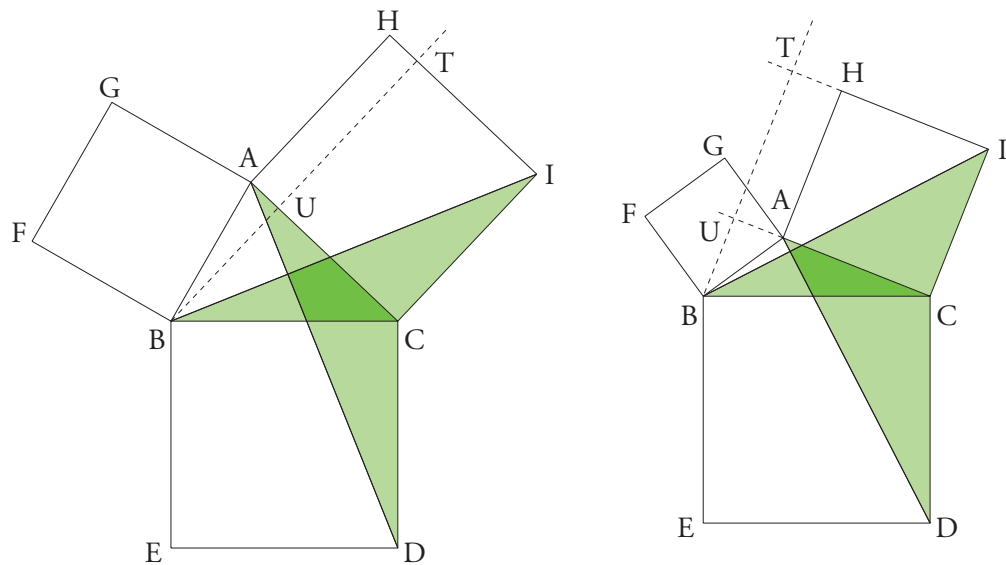
$$|\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = |\overline{AU} \times \overline{AC}| = AU \times AC$$

$$\text{d'où } |\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = AU \times AH.$$

Dans les deux cas, la valeur absolue du produit scalaire est l'aire du rectangle AUTH.

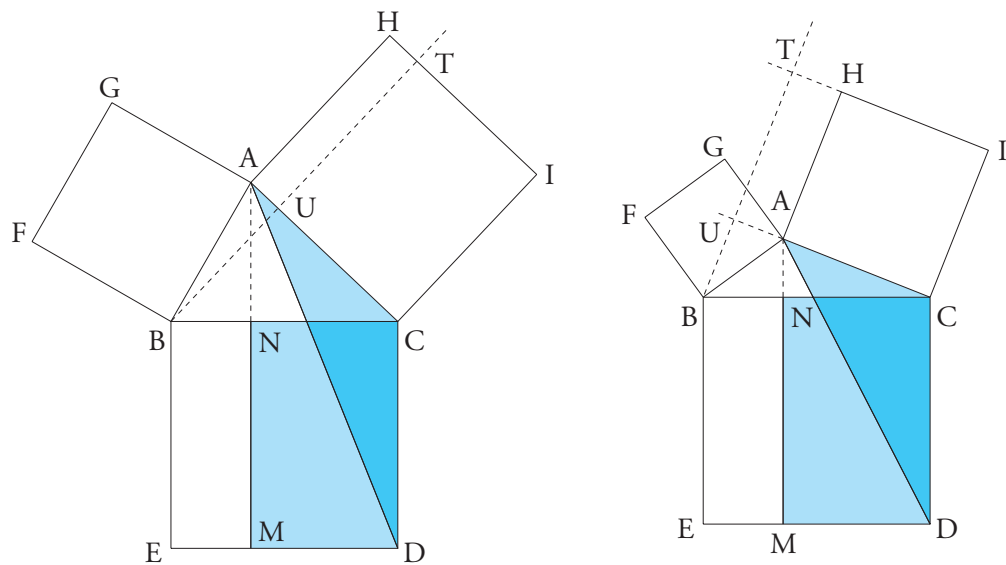


L'aire du rectangle CUTI est le double de celle du triangle CBI.



Les triangles CBI et CDA sont isométriques parce que $CB = CD$, $CI = CA$ et leurs angles en C sont égaux, tous deux à un droit plus l'angle en C du triangle ABC. Ils ont donc même aire.

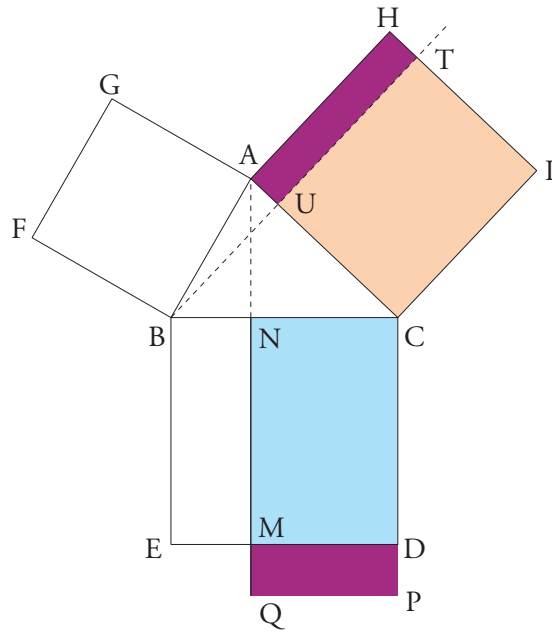
Par suite, l'aire du rectangle CUTI est le double de celle du triangle CDA.



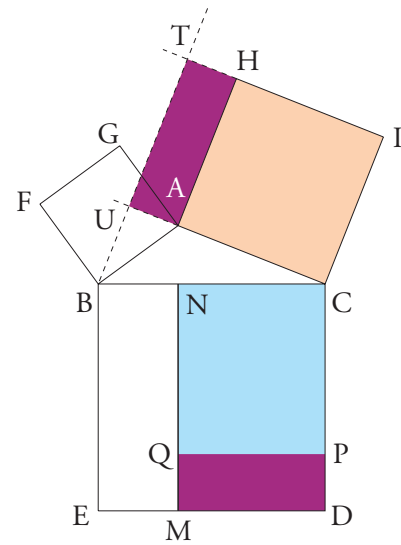
L'aire du rectangle CDMN est le double de l'aire du triangle CDA.

On en déduit que l'aire du rectangle CUTI est égale à celle du rectangle CDMN.

Ainsi, quand le triangle ABC n'a pas d'angle obtus, on peut dire que l'aire du carré ACIH est égale à la somme de l'aire des rectangles CDMN et DPQM. Une nouvelle fois, on retrouve le fait que le rectangle DPQM est extérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC. Et de nouveau, ceci démontre que l'aire du rectangle DPQM est égale à $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

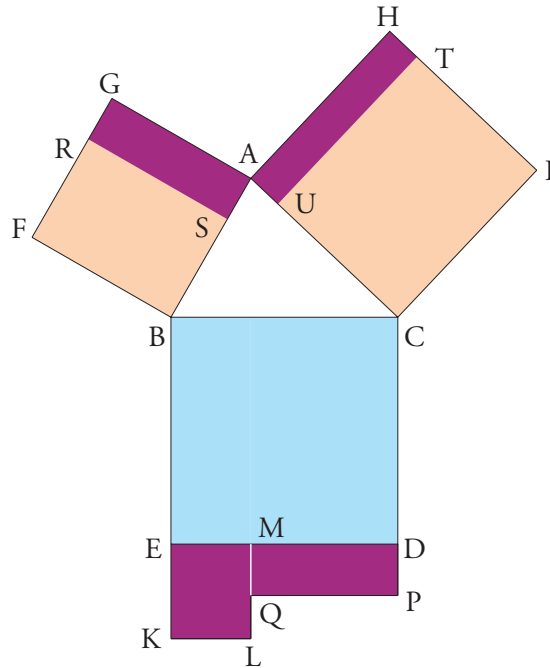


Lorsque l'angle en A est obtus, l'aire du carré ACIH est égale à la différence entre l'aire du rectangle CDMN et celle du rectangle DPQM. Le rectangle DPQM est intérieur au carré BCDE construit sur le côté [BC] du triangle ABC. Et, ici aussi, ceci démontre que l'aire du rectangle DPQM est égale à $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$.

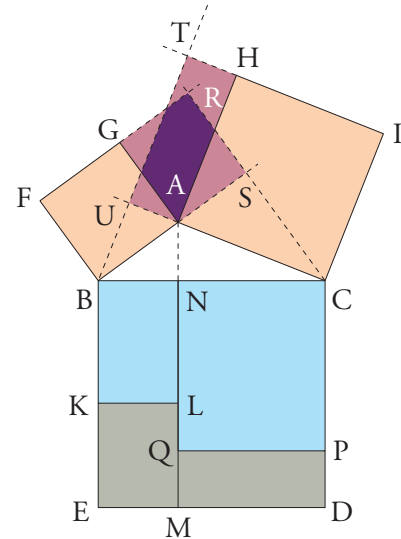


4. Conclusion n° 2

Dans la cas où les angles du triangle ABC sont aigus, la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la somme de l'aire du carré BCDE et de celle du polygone EDPQLK.



Si l'angle en A est obtus, la somme des aires des carrés ABFG et ACIH est égale à la différence entre l'aire du carré BCDE et celle du polygone EDPQLK.



- 5 . Illustration dynamique de ces découpages à l'aide de GeoGebra
Le descriptif nécessaire se trouve en annexe.

VI . Synthèse : suite du problème

1 . Situation et notations

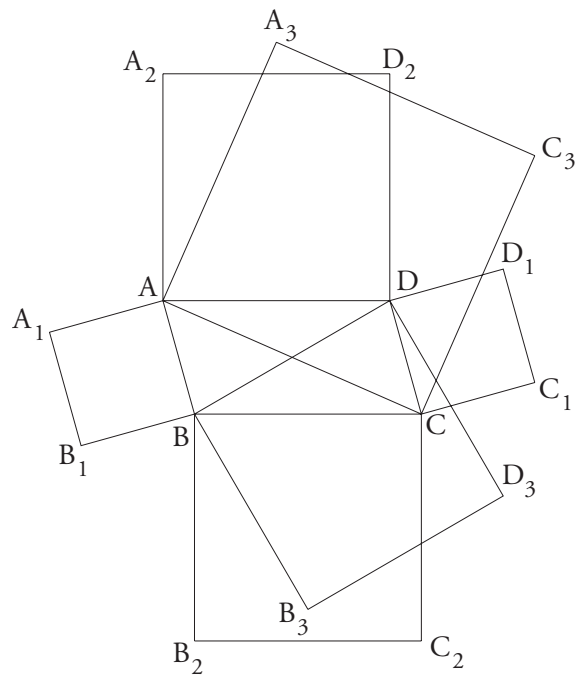
Dans la suite, on notera $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ l'aire du rectangle (éventuellement carré) \mathcal{R} .

ABCD est un parallélogramme. Sans perdre en généralité, on peut supposer l'angle en A aigu (ou droit¹). L'angle en B est alors obtus (ou droit), on supposera cependant que l'angle en B du triangle ABD est aigu.

Remarque : $|\vec{BA} \cdot \vec{BC}| = |\vec{AB} \cdot \vec{AD}|$.

Sur ses côtés [AB], [BC], [CD] et [DA], on construit les carrés respectifs ABB_1A_1 , BCC_2B_2 , CDD_1C_1 et DAA_2D_2 et sur ses diagonales [AC] et [BD] les carrés respectifs ACC_3A_3 et BDD_3B_3 .

1 . Ce cas ne présente que peu d'intérêt dans la mesure où l'on retrouve le théorème de Pythagore.



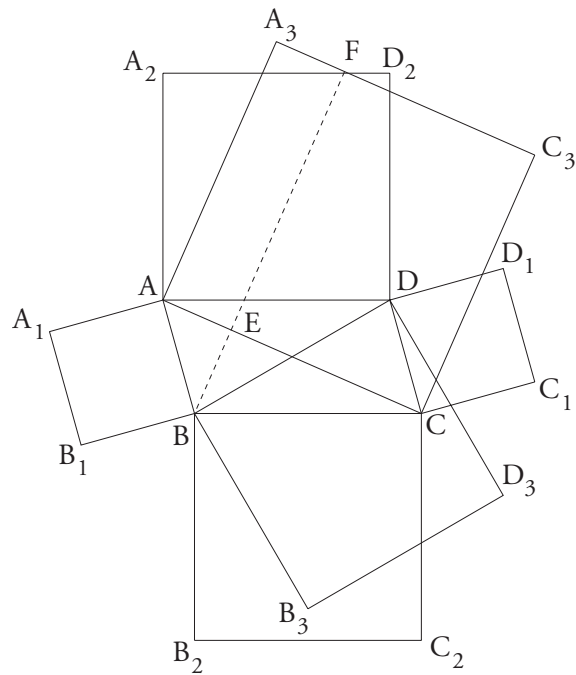
Il s'agit de prouver que

$$\mathcal{A}(ACC_3A_3) + \mathcal{A}(BDD_3B_3) = \mathcal{A}(ABB_1A_1) + \mathcal{A}(BCC_2B_2) + \mathcal{A}(CDD_1C_1) + \mathcal{A}(DAA_2D_2).$$

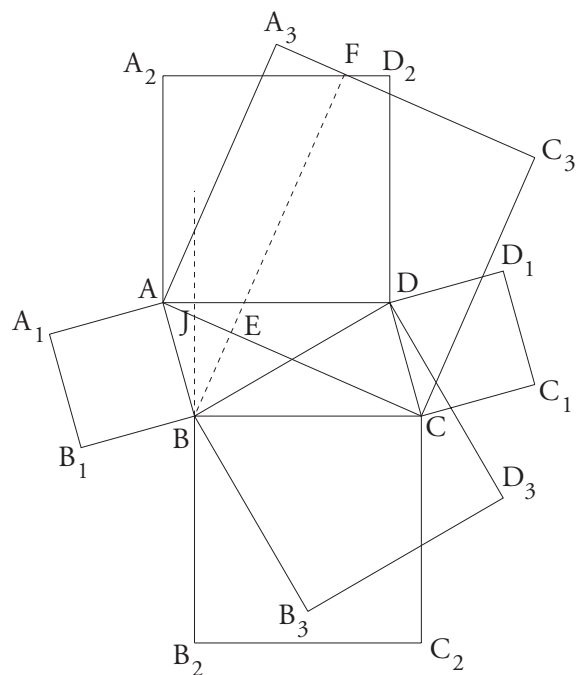
2. Travail avec la diagonale [AC]

Ce travail s'effectue comme il a été fait plus haut dans le triangle ABC et l'angle en B est obtus.

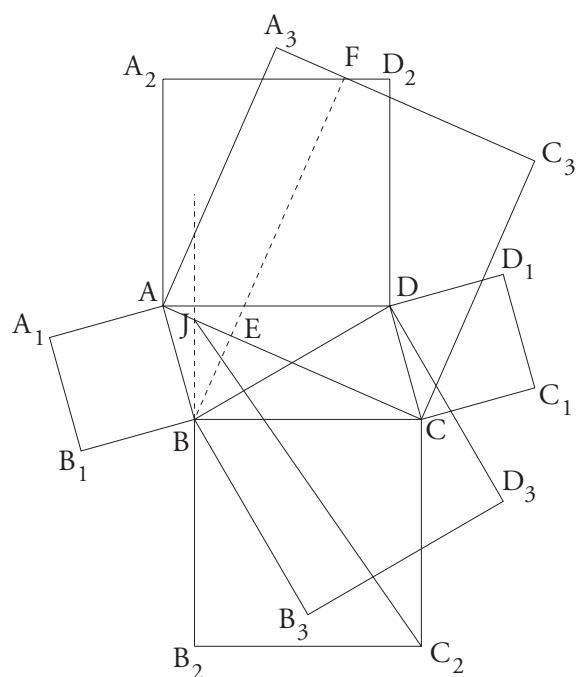
La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) et (A_3C_3) respectivement en E et F.



Les droites (BB_2) et (AC) se coupent en J .



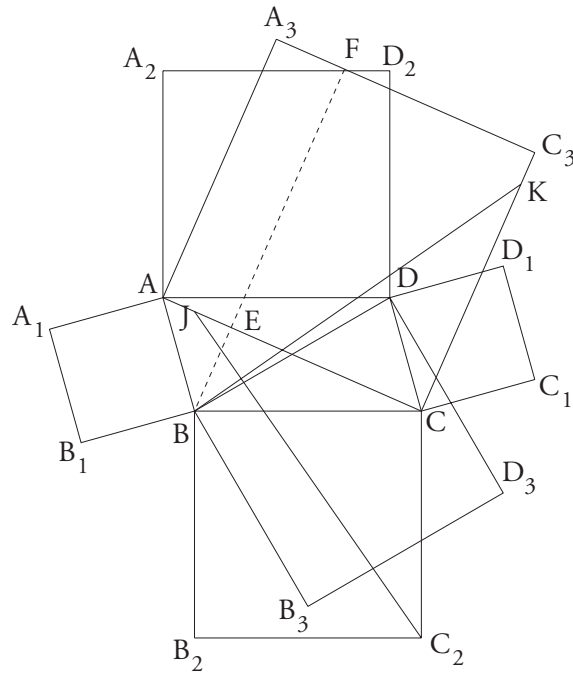
On trace le segment $[C_2J]$.



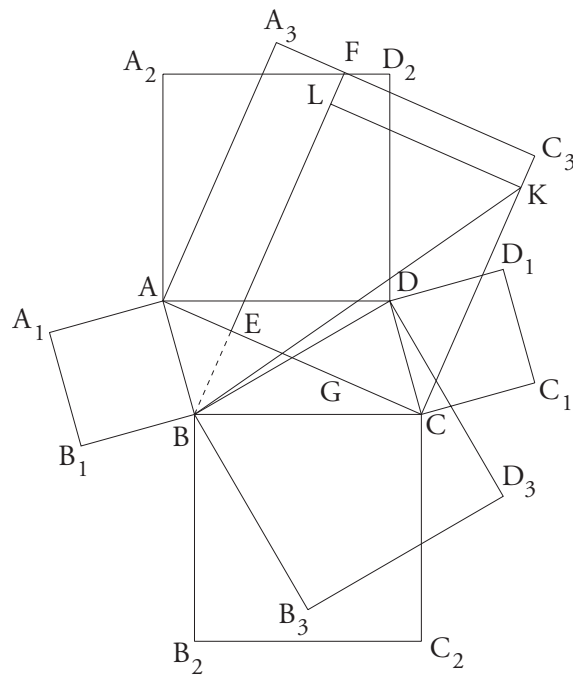
Son image par la¹ rotation de centre C et d'angle droit est $[BK]$. D'après l'étude précédente, on

1 . Le sens n'est pas précisé, il est évident une fois les points A, B, C et D choisis. Il en sera de même dans la suite.

sait que le point K se trouve sur le segment $[CC_3]$.

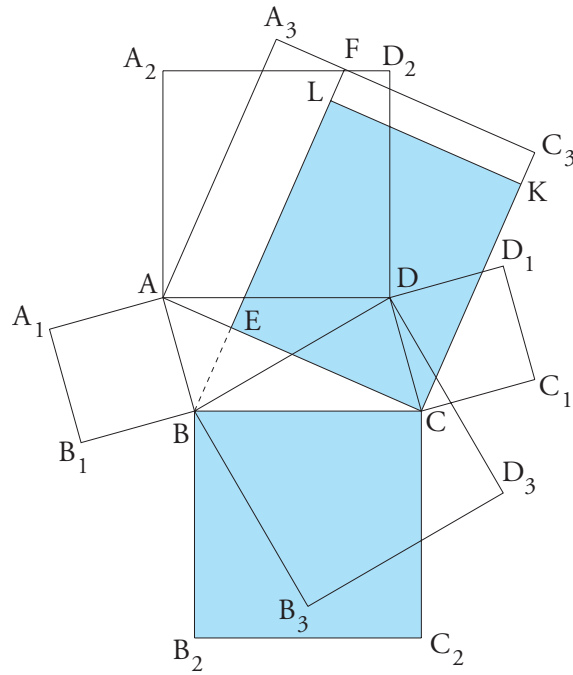


La parallèle à (AC) passant par K coupe $[BF]$ en L.

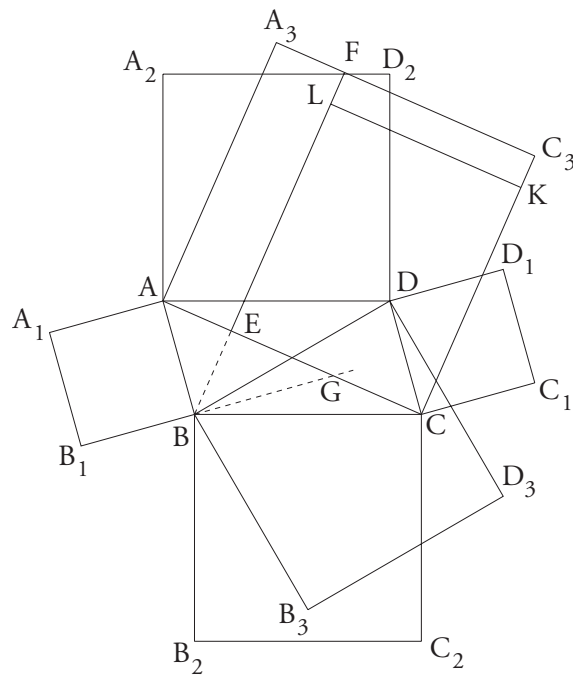


Toujours d'après les paragraphes précédents, on sait que $\mathcal{A}(C_3KLF) = \left| \vec{BA} \cdot \vec{BC} \right|$ et que

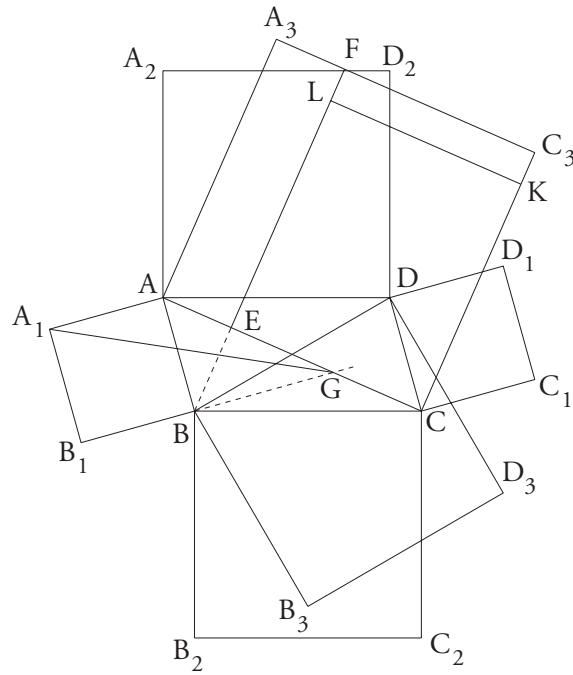
$$\mathcal{A}(CKLE) = \mathcal{A}(BCC_2B_2) :$$



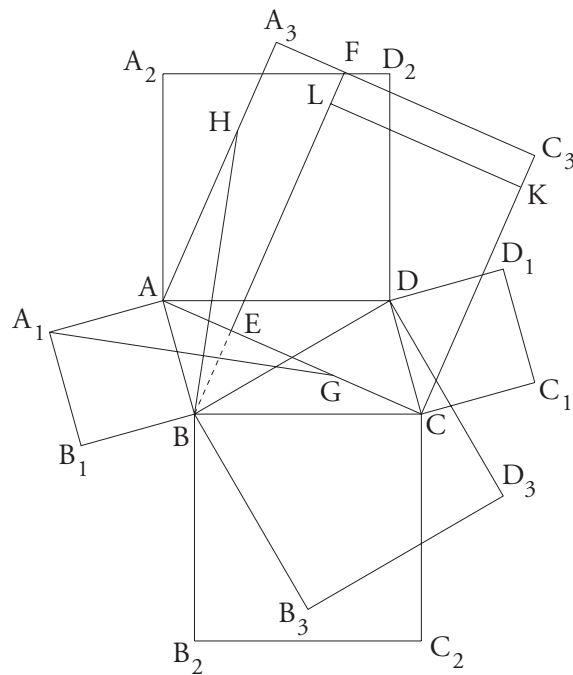
On procède de la même manière avec le carré ABB_1A_1 : la droite (BB_1) coupe $[AC]$ en G .



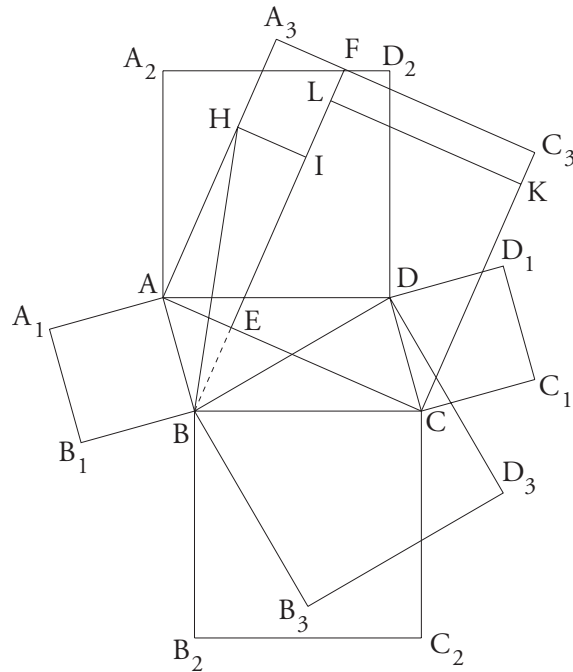
On trace le segment $[A_1G]$.



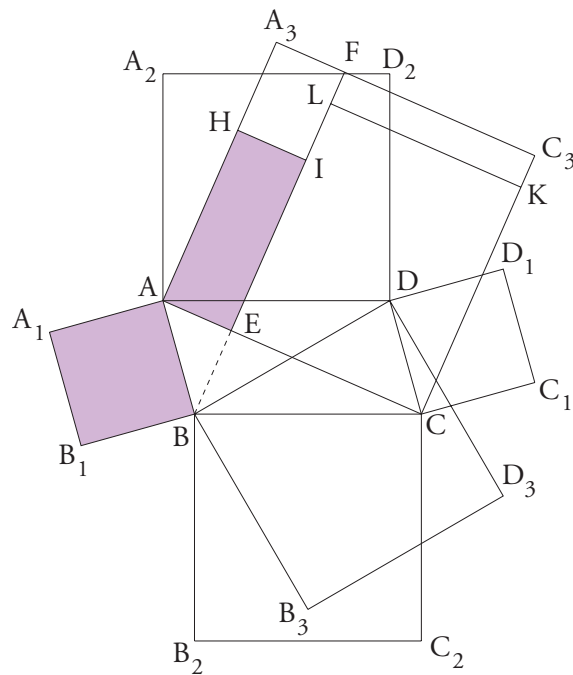
Son image par la rotation de centre A et d'angle droit est le segment $[BH]$ dont on sait que l'extrémité H appartient au côté $[AA_3]$ du carré CAA_3C_3 .



La parallèle à (AC) passant par H coupe [BF] en I.



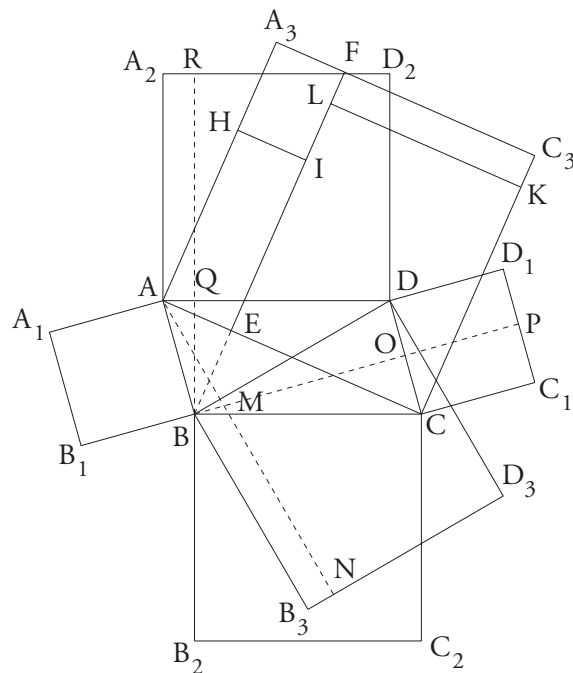
Toujours d'après les paragraphes précédents, on sait que $\mathcal{A}(A_3HIF) = |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$ et que $\mathcal{A}(AEIH) = \mathcal{A}(ABB_1A_1)$:



3 . Travail avec la diagonale [BD]

Il repose sur le triangle ABD dans lequel l'angle en A est aigu.

La hauteur issue de A coupe (BD) et (B_3D_3) respectivement en M et N.



En utilisant la perpendiculaire issue de B à (DC) qui coupe (DC) en O et (D_1C_1) en P, l'étude préalable a montré que :

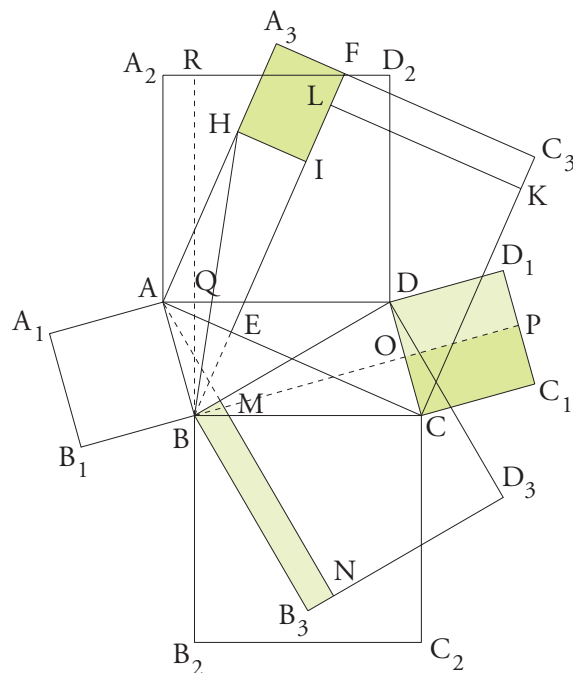
$$\mathcal{A}(DD_1PO) = \mathcal{A}(BB_3NM) \text{ et } \mathcal{A}(CC_1PO) = \mathcal{A}(A_3HIF)$$

$$\text{d'où } \mathcal{A}(CDD_1C_1) = \mathcal{A}(A_3HIF) + \mathcal{A}(BB_3NM)$$

$$\text{ou bien encore } \mathcal{A}(BB_3NM) = \mathcal{A}(CDD_1C_1) - \mathcal{A}(A_3HIF).$$

$$\text{On sait aussi que } \mathcal{A}(A_3HIF) = |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$$

$$\text{ce qui donne } \mathcal{A}(BB_3NM) = \mathcal{A}(CDD_1C_1) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|.$$



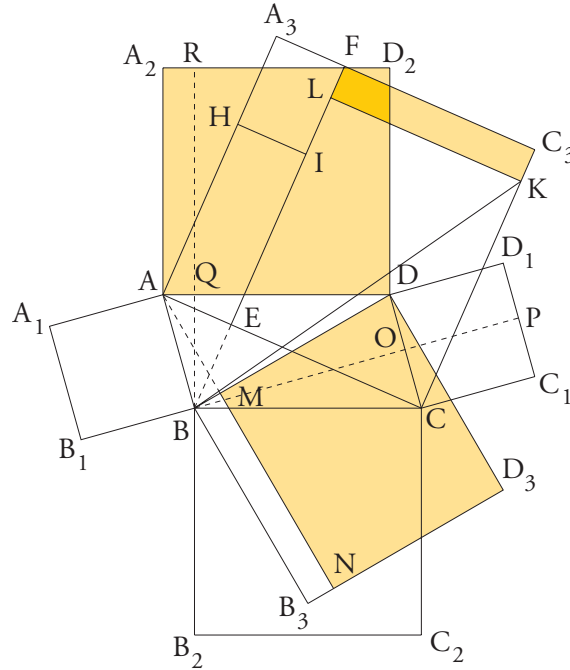
De même, la perpendiculaire à (AD) qui passe par B coupant (AD) en Q et (A_2D_2) en R, on

sait que $\mathcal{A}(DD_2RQ) = \mathcal{A}(DD_3NM)$ et $\mathcal{A}(AA_2RQ) = \mathcal{A}(C_3KLF)$

d'où $\mathcal{A}(ADD_2A_2) = \mathcal{A}(C_3KLF) + \mathcal{A}(DD_3NM)$

soit $\mathcal{A}(DD_3NM) = \mathcal{A}(ADD_2A_2) - \mathcal{A}(C_3KLF)$.

Comme $\mathcal{A}(C_3KLF) = |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$, on a $\mathcal{A}(DD_3NM) = \mathcal{A}(ADD_2A_2) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$.



4. Bilan

D'une part, $\mathcal{A}(ACC_3A_3) = \mathcal{A}(CKLE) + \mathcal{A}(C_3KLF) + \mathcal{A}(AEIH) + \mathcal{A}(A_3HIF)$ soit

$$\mathcal{A}(ACC_3A_3) = \mathcal{A}(BCC_2B_2) + |\vec{BA} \cdot \vec{BC}| + \mathcal{A}(ABB_1A_1) + |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|.$$

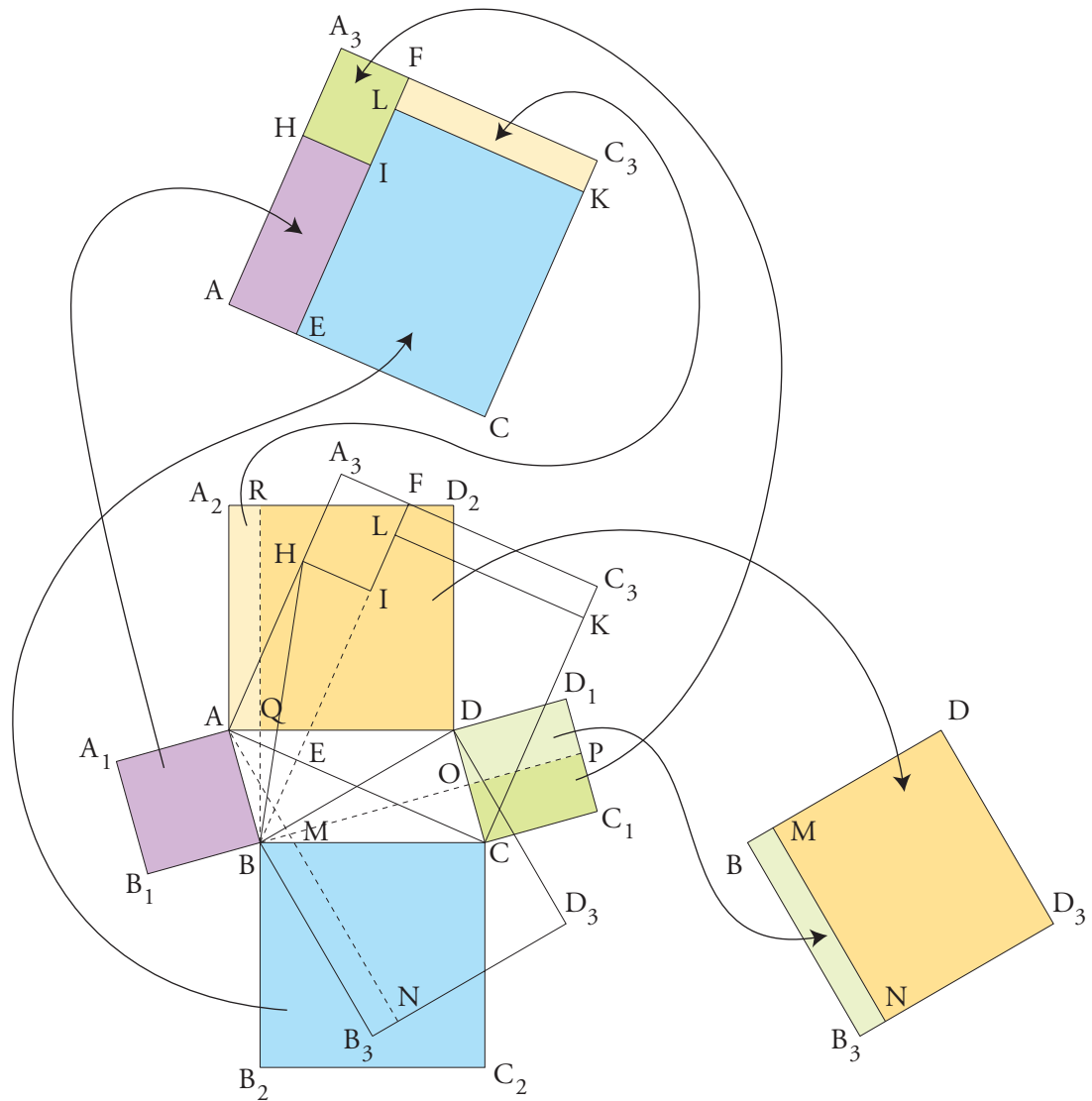
D'autre part $\mathcal{A}(BDD_3B_3) = \mathcal{A}(DD_3NM) + \mathcal{A}(BB_3NM)$ ce qui donne

$$\mathcal{A}(BDD_3B_3) = \mathcal{A}(ADD_2A_2) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}| + \mathcal{A}(CDD_1C_1) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(ACC_3A_3) + \mathcal{A}(BDD_3B_3) = \mathcal{A}(BCC_2B_2) + |\vec{BA} \cdot \vec{BC}| + \mathcal{A}(ABB_1A_1) + |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$$

$$+ \mathcal{A}(ADD_2A_2) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}| + \mathcal{A}(CDD_1C_1) - |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$$

$$\mathcal{A}(ACC_3A_3) + \mathcal{A}(BDD_3B_3) = \mathcal{A}(BCC_2B_2) + \mathcal{A}(ABB_1A_1) + \mathcal{A}(ADD_2A_2) + \mathcal{A}(CDD_1C_1) :$$



5. Remarques

L'étude précédente est incomplète puisqu'elle omet le cas où l'angle en B du triangle ABD est obtus.

Elle ne donne pas un puzzle au sens usuel du terme mais donne un découpage des différentes surfaces en parts dont on retrouve les aires ailleurs. Il s'agit par conséquent d'une démonstration par équivalence d'aires.

Bien que l'exposé eût pu être allégé des paragraphes III et IV, ils ont été maintenus d'une part parce qu'il n'est pas certain que la démonstration du théorème de Pythagore donnée dans *Les Éléments* d'Euclide soit connue et d'autre part en raison du caractère heuristique de la démarche.

6. Illustration dynamique

Le fichier de géométrie dynamique associé est *Parallelogramme.ggb*.

VII . Bibliographie

Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, vol. 1, PUF, Paris 1990

Bulletin n° 482, APMEP, mai-juin 2009

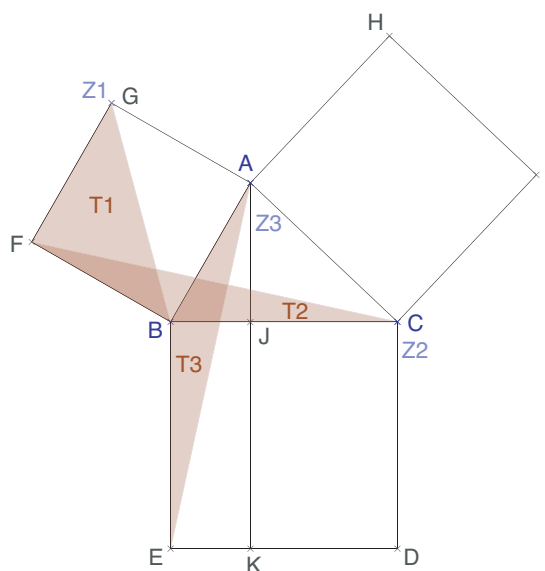
Annexes : illustrations dynamiques des découpages

I. Fichier *Pythagore.ggb*

Dans le déplacement d'un des points A, B ou C, le triangle ABC reste rectangle, le point A étant astreint à parcourir un demi-cercle d'extrémités B et C.

L'aire du triangle BFG est égale à la moitié de l'aire du carré ABFG.

Le triangle T1 est le triangle BFZ1 où Z1 est un point du segment [GC]. Lorsque Z1 est en G, on retrouve le triangle précédent. Lorsque Z1 se déplace sur son support [GC], l'aire de BFZ1 ne change pas puisque sa base BF est fixe et que son sommet Z1 se déplace sur une parallèle à la base. Lorsque Z1 est en C, on obtient le triangle BFC dont l'aire est donc la moitié de celle du carré BCFG.



Z2 parcourt le quart de cercle \mathcal{C} de centre B et d'extrémités C et E. Lorsque Z2 est en C, T2 est le triangle BFC. Lorsque Z2 se déplace sur \mathcal{C} , l'aire du triangle T2 ne change pas puisqu'il s'agit d'un mouvement de rotation. Lorsque Z2 est en E, T2 devient le triangle BAE dont l'aire est par conséquent la moitié de celle du carré BCFG.

Z3 est un point du segment [AJ] et T3 est le triangle Z3BE. Lorsque Z3 est en A, T3 est le triangle BAE. Le déplacement de Z3 sur [AJ] ne modifie pas son aire : sa base est fixe, BE, et son troisième sommet, Z3, se déplace sur une parallèle à la base. Lorsque Z3 se trouve en J, on obtient le triangle BJE dont l'aire est par suite la moitié de celle du carré BCFG.

Cette aire étant égale à la moitié de celle du rectangle BEKJ, le carré BCFG et le rectangle BEKJ ont même aire.

II. Fichiers *alKashi1.ggb* et *alKashi2.ggb*

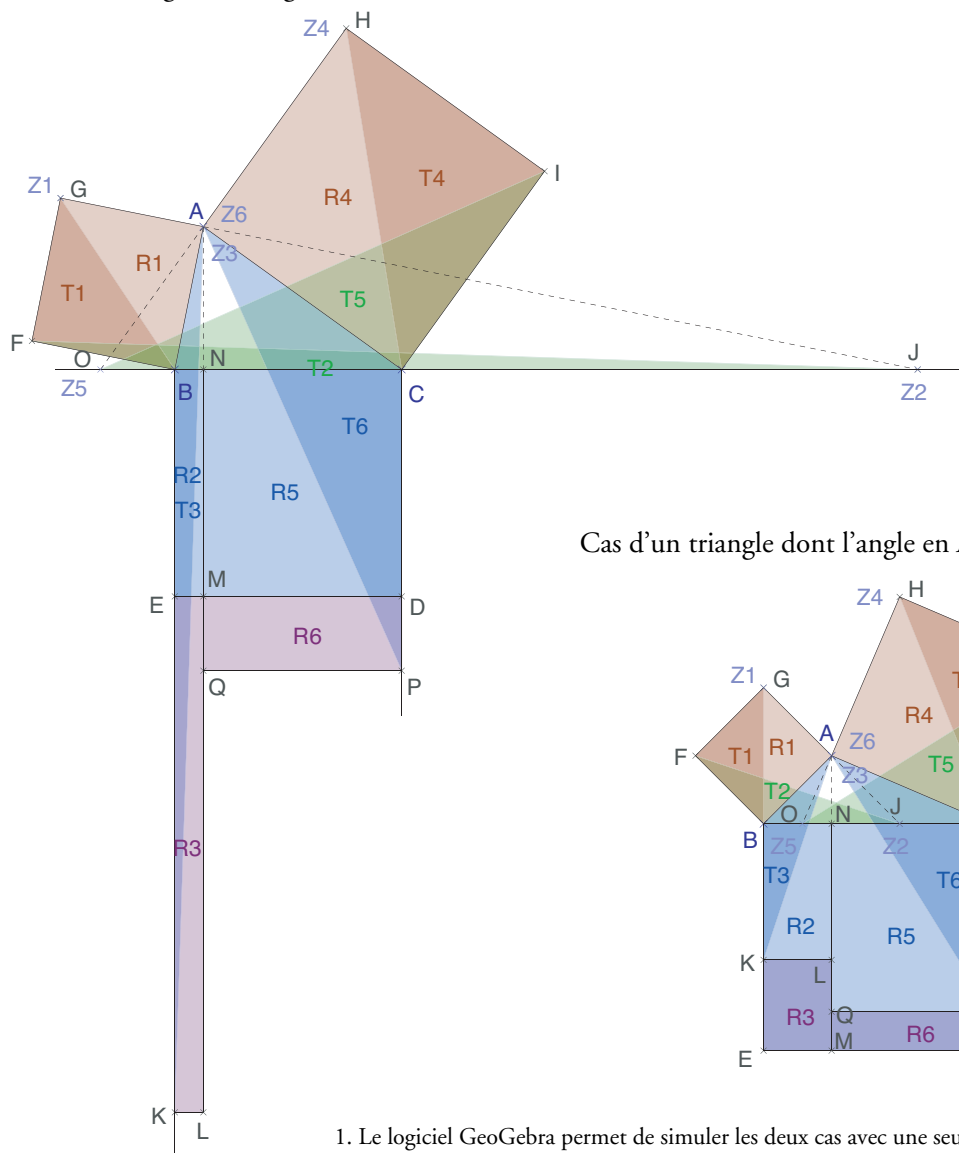
Bien que les points A, B et C puissent être déplacés sans contrainte, seul le déplacement du point A donne à voir les transformations de la figure dans son ensemble.

Des tableaux donnent un aperçu rapide des différentes parties de la figure et des aires :

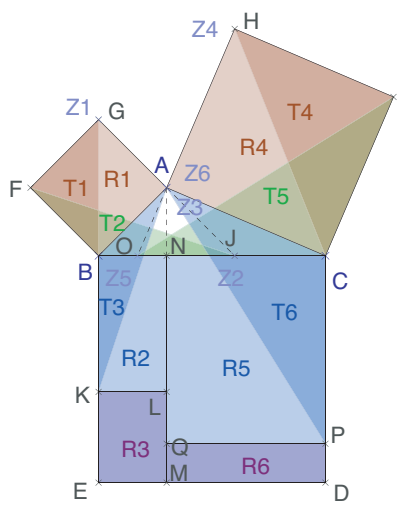
Figure	Point mobile	Support du point mobile	Aire	Position initiale	Position finale
R1			aire du carré ABFG		
T1	Z1	segment [GJ]	la moitié de l'aire du carré ABFG	BFG	BFJ
T2	Z2	quart de cercle de centre B et d'extrémités J et K	la moitié de l'aire du carré ABFG	BFJ	BAK
T3	Z3	segment [AN]	la moitié de l'aire du carré ABFG et aussi la moitié de l'aire du rectangle BKLN	BAK	BNK
R2 \cup R3 ou R2 \setminus R3			aire du rectangle BKLN égale à l'aire du carré ABFG		

Figure	Point mobile	Support du point mobile	Aire	Position initiale	Position finale
R4			aire du carré CAHI		
T4	Z4	segment [HO]	la moitié de l'aire du carré CAHI	CIH	CIO
T5	Z5	quart de cercle de centre C et d'extrémités O et P	la moitié de l'aire du carré CAHI	CIO	CAP
T6	Z6	segment [AN]	la moitié de l'aire du carré CAHI et aussi la moitié de l'aire du rectangle CPQN	CAP	CNP
R5 \cup R6 ou R5 \setminus R6			aire du rectangle CPQN égale à l'aire du carré CAHI		

Cas d'un triangle sans angle obtus¹ :



Cas d'un triangle dont l'angle en A est obtus¹ :



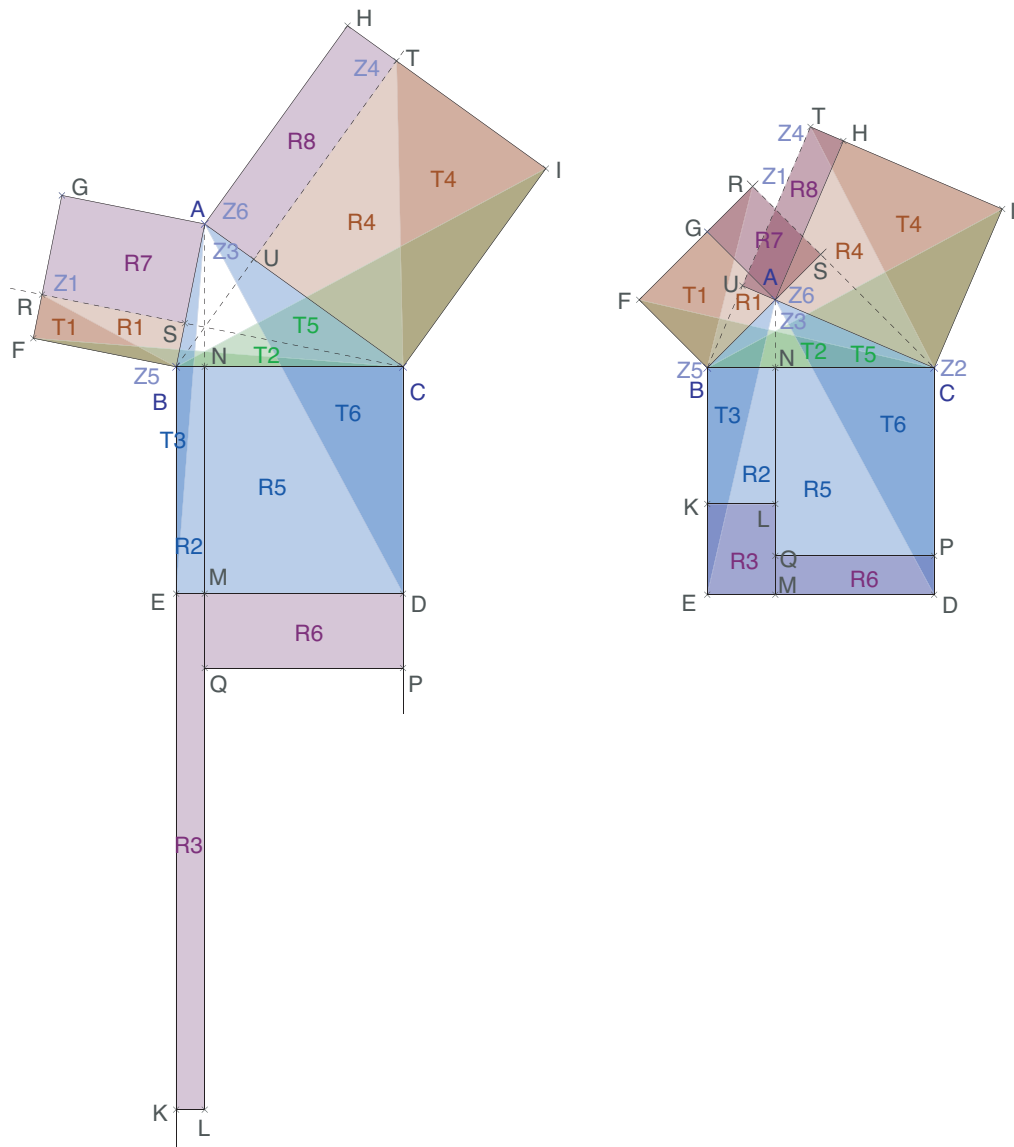
1. Le logiciel GeoGebra permet de simuler les deux cas avec une seule construction.

III . Fichiers *alKashi3.ggb* et *alKashi4.ggb*

De nouveau, les points A, B et C peuvent être déplacés sans contrainte, mais le seul déplacement du point A montre les transformations de la figure dans son ensemble.

Les tableaux qui donnent l'aperçu des parties de la figure et des aires sont :

Figure	Point mobile	Support du point mobile	Aire	Position initiale	Position finale
R1			l'aire du rectangle BFRS		
T1	Z1	le segment [RC]	la moitié de l'aire du rectangle BFRS	BFR	BFC
T2	Z2	le quart de cercle de centre B et d'extrémités C et E	la moitié de l'aire du rectangle BFRS	BFC	BAE
T3	Z3	le segment [AN]	la moitié de l'aire du rectangle BFRS et aussi la moitié de l'aire du rectangle BEMN	BAE	BNE
R2			l'aire du rectangle BEMN égale à l'aire du rectangle BFRS		
R4			l'aire du rectangle CUTI		
T4	Z4	le segment [TB]	la moitié de l'aire du rectangle CUTI	CIT	CIB
T5	Z5	le quart de cercle de centre C et d'extrémités B et D	la moitié de l'aire du rectangle CUTI	CIB	CAD
T6	Z6	le segment [AN]	la moitié de l'aire du rectangle CUTI et aussi la moitié de l'aire du rectangle CDMN	CAD	CND
R5			l'aire du rectangle CDMN égale à l'aire du rectangle CUTI		



IV . Fichier *Parallelogramme.ggb*

De nouveau les points A, B et C peuvent être déplacés mais le seul déplacement du point A permet de voir la décomposition dans tous les cas de figures où l'angle en B du triangle ABD est aigu.