Calcule-moi un parallélépipède…

Henry Plane

Ceux qui ont, peu ou prou, fréquenté Antoine de Saint-Exupéry rapportent qu'il ne fut pas seulement l'aviateur écrivain qui « combattait pour la primauté de l'Homme sur l'individu », mais qu'il s'intéressait également dans ce sens et avec compétence, aux techniques et à la science. Du côté des mathématiques, c'était sur l'arithmétique qu'il avait jeté son dévolu. Un problème de son cru a été recueilli. Il le proposait à ses amis.

Le problème du pharaon
Un pharaon décida d'ériger, en utilisant des pierres taillées en cubes de 10 centimètres de côté, une stèle massive géante en forme de parallélépipède rectangle dont la hauteur fût égale à la diagonale de la base.
Il ordonna à un certain nombre de fonctionnaires de rassembler chacun une part égale des matériaux prévue exactement pour l'érection de la stèle. Puis il mourut.
Les archéologues contemporains ne retrouvèrent qu'un seul de ces dépôts. Ils dénombrèrent 348 960 150 cubes de pierre. Ils ne surent rien des autres dépôts, sinon que le nombre total de ces dépôts était, pour des raisons mystiques, un nombre premier.
Cette découverte leur permit cependant de calculer rigoureusement les dimensions de la stèle prévue et de démontrer qu'il n'était qu'une solution possible.
Faites-en autant.

Amis prêts à en découdre avec ce problème, vous (re)découvrirez à cette occasion, qu'à l'instar de Pierre de Fermat, il ne faut pas toujours faire aveuglément confiance aux notes laissées par nos illustres maîtres ! Nous vous présentons ici la solution laissée par Saint-Exupéry lui-même avec ses imprécisions et lacunes… C'est pourquoi nous avons glissé quelques commentaires pour guider vos recherches.

La solution de Saint-Exupéry

Soient x, y, z, des entiers mesures des côtés de la stèle.
Nous savons que ce triplet est déterminé à un facteur entier près k à partir de deux entiers a et b premiers entre eux tels que :
$x = 2.k.a.b$
$y = k\,(a^2 - b^2) = k\,(a + b)\,(a - b)$
$z = k\,(a^2 + b^2)$
[Saint-Exupéry avait antérieurement rappelé ce théorème à ses amis.*]

Le volume V de la sphère peut donc s'écrire : $V = xyz$
$= 2\,k^3.a.b\,(a + b)\,(a - b)\,(a^2 + b^2)$.

Par ailleurs, la décomposition en facteurs premiers de 348 960 150 donne :
$2\ .\ 3^5\ .\ 5^2\ .\ 7\ .\ 11\ .\ 373$

* A l'adresse : http://fr.wikipedia.org/wiki/Triplet_pythagoricien vous trouverez une démonstration de ce théorème.

[ce qui nous donne une deuxième décomposition du volume, cette fois en facteurs premiers :
$V = 2 . 3^5 . 5^2 . 7 . 11 . 373 . p$, où p représente le nombre de dépôts de pierre.]
Il apparaît que k = 3 est seul possible.

[Ces deux décompositions du volume permettent également, par un raisonnement sur la parité de a et b, d'être sûr que p = 2.]

Avec les facteurs premiers restants, on dresse le tableau des décompositions possibles de V/k^3 :

18	*25*	*7*	*11*	*373*
9	*50*	*7*	*11*	*373*
9	*25*	*14*	*11*	*373*
9	*25*	*7*	*22*	*373*
9	*25*	*7*	*11*	*746*

[Las ! St-Exupéry a oublié d'autres possibilités :
2 9 25 77 373
9 10 35 11 373, etc.]

[A partir de son tableau, incomplet, des possibles, St Exupéry conclut ainsi :]
Seul est réalisable le groupement avec a = 18 et b = 7 car on a bien alors $a + b = 25$, $a – b = 11$, $a^2 + b^2 = 373$.
Dans ces conditions, les trois dimensions sont :
$x = 3 (2.18.7) = 3.252 = 756$
$y = 3(18^2 - 7^2) = 3.275 = 825$
$z = 3(18^2 + 7^2) = 3.373 = 1119$
Nous ajouterons que la stèle avait donc 111,9 mètres de haut.

Remarquons, pour terminer, qu'Antoine de St Exupéry a bien trouvé une solution à son problème… mais n'en a pas prouvé l'unicité ! Et vous, y êtes-vous parvenu(e) ?

Coup de cœur pour un site

Le CNRS

Valérie Larose

Le CNRS présente « aimer les maths, c'est possible ? » sur
http://www.cnrs.fr/sciencespourtous/aimerlesmaths/

Quatre courtes animations : « A quoi ça sert les maths ? » ; « C'est un truc qui bouge, les maths ? » ; « Tu trouves ça beau les maths ? » et « Les maths, c'est pas que du calcul ? » mettent en scène un personnage masculin posant les questions et une jolie demoiselle pour y apporter des réponses… tout cela parfaitement accessible à des collégiens et lycéens.

Les réponses ne sont pas détaillées mais montrent que notre discipline n'est pas figée et qu'elle est très présente dans notre quotidien. Le discours veut dédramatiser la prétendue difficulté des mathématiques et met l'accent sur le fait que comprendre comment ça marche prime sur les techniques d'application… Bref, à consulter seul, puis avec ses élèves !