Première lettre

Le 28 septembre 2010, à M. Fromentin.

Exercice 489-2 APMEP n° 489 p.501

Cher Collègue,

Je ne vous ennuierai pas (faute de moyen moderne de communication) avec une démonstration écrite de cet exercice, au demeurant simple.

Si on pose $u_n = \underbrace{66 6 \dots\dots 6}_{n\ \text{chiffres}}7$ et si on admet que $u_n^2 = \underbrace{44 \dots\dots 4}_{n+1\ \text{chiffres}}\underbrace{8 \dots\dots 8}_{n\ \text{chiffres}}9$,

on démontre par récurrence que $u_{n+1} = \underbrace{666 \dots\dots 66}_{n+1\ \text{chiffres}}7$ implique que $u_{n+1}^2 = \underbrace{44 \dots\dots 44}_{n+2\ \text{chiffres}}\underbrace{8 \dots\dots 88}_{n+1\ \text{chiffres}}9$,

avec $u_{n+1} = (6.10^{n+1} + u_n)^2$, mais en voyant que le double produit fait apparaître 12 $u_n = 8\underbrace{00 \dots\dots 0}_{n\ \text{chiffres}}4$,

ce qui se montre aussi par récurrence.

Du coup, postulant cette condition comme nécessaire, je me suis demandé s'il y avait d'autres nombres $\overline{ab}$ tels que

$2a \times \overline{ab} = \overline{n_1 0 n}$

En faisant varier a, j'en trouve 1 et un seul : 34.

$4^2 = 16$ $34^2 = 1156$ $334^2 = 111556$ $3334^2 = 11115556$

$2 \times 2 \times 34 = 204$ $6 \times 334 = 2004$ $6 \times 3334 = 20004$

Curieux, non ?

Bravo et bon courage pour votre activité. Meilleurs sentiments.

Seconde lettre

Le 2 octobre 2010, à M. Fromentin.

Cher collègue,

Merci de vos remerciements. Mais vous avez eu tort de me dire que cela vous a intéressé ! Cela m'incite à poursuivre et à vous ennuyer !!!

Rappel Je pose $u_n = \underbrace{666 \dots\dots 6}_{n\ \text{fois le chiffre } 6}7$ donc $u_{n+1} = 6\text{x}10^{n+1} + u_n$ et $u_{n+1}^2 = 36.10^{2n+2} + 12\, u_n 10^{n+1} + u_n^2$

La loi ne fonctionne que parce que $12u_n = 8000\dots04$ en partant de $12 \times 67 = 804$ (quand on pose l'addition pour u_{n+1}^2, on voit apparaître 36 + 8 = 44, donnant le chiffre 4 supplémentaire ; et 4 + 4 = 8, donnant le 8 de plus[1]).

D'où la question : si je pars de $u_1 = \overline{ab}$, quand aurai-je $2a \times \overline{ab} = \overline{m0p}$? et j'ai essayé "a" de 1 à 9.

[1] NDLR: pour des explications, voir en dernière page dans précisions et commentaires

Exemples

a= 1 $2 \times 1 \times \overline{1b} = \overline{m0p}$? $2 \times \overline{1b}$ ne dépasse pas 38 donc impossible ;

a= 2 $2 \times 2 \times \overline{2b} = 80 + 4b = \overline{m0p}$?

b = 5 80 + 20 = 100, p = 0 , non ;

b =6 80 + 24 = 104 ah ? Quid de 26 ? $26^2 = 576$, $226^2 = 51076$ NON ;

b =7 80 + 28 = 108 Quid de 27 ? $27^2 = 729$, $227^2 = 51529$ NON.

La règle en $\overline{m0p}$ est bien nécessaire mais pas suffisante.

a= 3 $2 \times 3 \times \overline{3b} = 6 \times 30 + 6b = 180 + 6b = \overline{m0p}$?

b = 4 donne 204 Quid de 34 ? $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$ …

On peut considérer 34 comme possiblement valable. Même démonstration que pour 67.

Et j'ai continué en oubliant a = 9 !

Quand je m'en suis aperçu, j'ai repris pour écrire $2 \times 9 \times \overline{9b} = 18 \times \overline{9b} = 1620 + 9b$ (au lieu de 1620 + <u>**18b**</u>) ;

et du coup b = 9 donne 1620 + 81 = 1701. Ce n'est pas $\overline{m0p}$ mais $\overline{mp0q}$. Voyons quand même …

$99^2 = 9801$ $999^2 = 998001$ $9999^2 = 99980001$ Intéressant, non ?

J'avais découvert une nouvelle règle de calcul avec 99 !

… jusqu'à ce que je m'aperçoive de mon erreur de calcul.

Avec 1620 + 18b je n'aurais rien trouvé !

<u>Moralité</u> Avec des erreurs de calcul on fait avancer les mathématiques ! Ce n'est pas nouveau ?
Mais, à moi, c'est bien la première fois que ça m'arrive.

Allez, je cesse de vous ennuyer avec mes stupidités.

Merci et encore bien cordialement cher collègue.

<u>Précisions et commentaires</u>

$\underbrace{44\ldots\ldots4}_{n\ \text{chiffres}}\underbrace{8\ldots\ldots8}_{n\,-1\ \text{chiffres}}9$, est un carré parfait ?

n = 1 $49 = 7^2$; n = 2 $4489 = 67^2$; n = 3 $444889 = 667^2$; etc.

Soit ainsi $\underbrace{666\ldots\ldots6}_{n\ \text{chiffres}}7^2 = \underbrace{44\ldots\ldots4}_{n\ \text{chiffres}}\underbrace{8\ldots\ldots8}_{n\,-1\ \text{chiffres}}9$

Par récurrence ?

n = 0 $\quad 7^2 = 49$

n = 1 $\quad 67^2 = (6 \times 10 + 7)^2 = 36 \times 100 + 2 \times 6 \times 7 \times 10 + 49$

$$= 3600 + 840 + 49$$

$$= 4489$$

$$\begin{array}{r} 3\,600 \\ 840 \\ 49 \\ \hline 4\,489 \end{array}$$

n = 2 $\quad 667^2 = (6 \times 100 + 67)^2 = 36 \times 10000 + 12 \times 67 \times 100 + 4489$

$$= 360000 + 80400 + 4489$$

$$= 444889$$

$$\begin{array}{r} 360\,000 \\ 80\,400 \\ 4\,489 \\ \hline 444\,889 \end{array}$$

n = 3 $\quad 6667^2 = (6 \times 103 + 667)^2 = 36 \times 10^6 + 12 \times 667 \times 10^3 + 444889$

$$= 36 \times 10^6 + 8004 \times 10^3 + 444889$$

$$= 44448889$$

$$\begin{array}{r} 36\,000\,000 \\ 8\,004\,000 \\ 444\,889 \\ \hline 44\,448\,889 \end{array}$$

Etc. À condition que $\quad 12 \times \underbrace{666\ldots\ldots 67}_{p\ \text{chiffres}} = 8\underbrace{00\ldots\ldots 0}_{p\ \text{chiffres}}4$ $\quad$; ce qui se démontre par récurrence.

C'est ce qui motive la recherche d'éventuels autres nombres possédant le même type de propriété du double produit ;

à savoir : $2a \times \overline{ab} = \overline{n_1 0 n}$.

Ce pourquoi cette condition n'est pas suffisante :

avant de chercher à placer des 0 entre les deux chiffres n_1 et n, on a déjà obtenu ces deux chiffres !

Par exemple, avec 6 et 7, le premier double produit – calculé dans 67^2 – est $2 \times 6 \times 7 = 84$.

C'est le rang initial de la récurrence, qui amènera au deuxième rang $2 \times 6 \times 67 = 804$; etc.

Il faudrait donc chercher a et b tels que $\quad 2 \times a \times b = \overline{n_1 0 n} \quad$ et $\quad 2a \times \overline{ab} = \overline{n_1 0 n}$.

Mais il n'est pas dit que cela rende la recherche plus rapide …

Une remarque.

Au « Tiens! Deux tiers » que le nombre 6666…67 a suggéré à Michel Sarrouy[2], le 3333…34 trouvé par Robert Bourdon semble bien nous faire penser à un tiers …!

---

[2] Voir III. Heuristique, dans son document