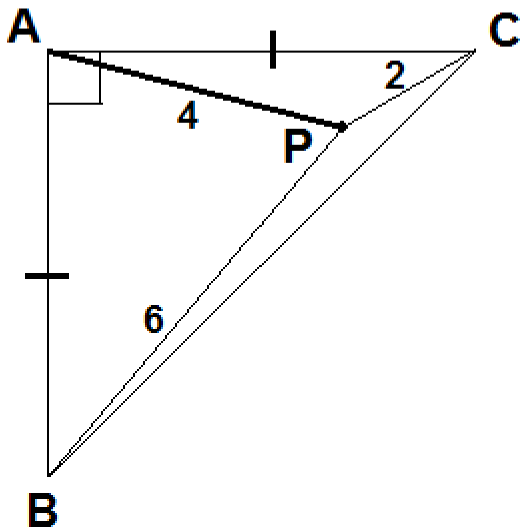
ENONCÉ 1

Soient A et P deux points du plan tels que AP = 4. Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que BP = 6 et CP = 2.

Solution



On considère 2 points fixes A et P du plan tels que [AP] mesure 4 cm.

Analyse :

Supposons qu'il existe 2 points B et C tels que ABC soit rectangle isocèle en A, BP = 6 et CP = 2.

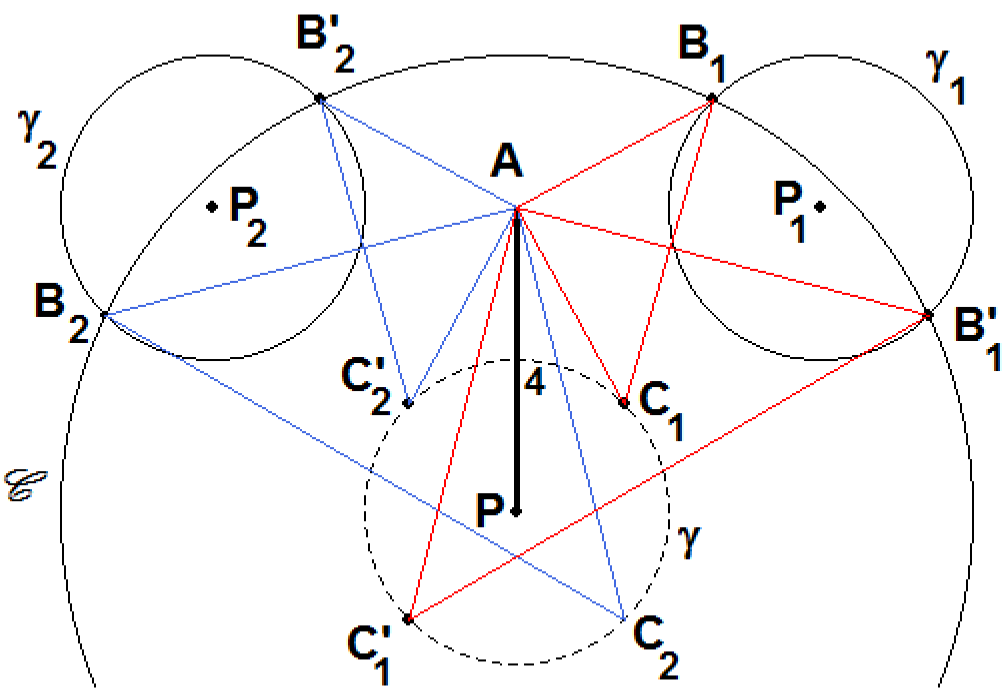
B et C appartiennent alors respectivement au cercle $\mathscr{C}$ de centre P, de rayon 6 cm et au cercle γ de centre P de rayon 2 cm.

De plus, ABC étant rectangle isocèle en A, B est l'image de C soit par le quart de tour direct r_1 de centre A soit par le quart de tour indirect r_2 de centre A.

$C \in \gamma$ donc le point $B = r_1(C)$ appartient au cercle $\gamma_1 = r_1(\gamma)$ de centre $P_1 = r_1(P)$ et de rayon 2 cm. De même, le point $B = r_2(C)$ appartient au cercle $\gamma_2 = r_2(\gamma)$ de centre $P_2 = r_2(P)$ et de rayon 2 cm. Ainsi, $B \in \mathscr{C} \cap \gamma_1$ ou

$B \in \mathscr{C} \cap \gamma_2$.

Synthèse et construction :



Construisons d'abord les points P_1 et P_2 images respectives de P par le quart de tour direct r_1 de centre A et par le quart de tour indirect r_2 de centre A.
On trace alors le cercle γ_1 de centre P_1 et de rayon 2 cm, le cercle γ_2 de centre P_2 et de rayon 2 cm puis le cercle $\mathscr{C}$ de centre P et de rayon 6 cm.
D'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles APP_1 et APP_2 rectangles isocèles en A avec AP = 4, on obtient $PP_1 = PP_2 = 4\sqrt{2}$. Ainsi, $4 < PP_1 < 8$ donc **$\mathscr{C}$ et γ_1 sont sécants en deux points B_1 et B_1'.**
De même, $4 < PP_2 < 8$ donc **$\mathscr{C}$ et γ_2 sont sécants en deux points B_2 et B_2'.**

On construit alors $C_1 = r_2(B_1)$, $C_1' = r_2(B_1')$, $C_2 = r_1(B_2)$ et $C_2' = r_1(B_2')$.

Par définition de r_2, le triangle AB_1C_1 est rectangle et isocèle en A avec $PB_1 = 6$ (car $B_1 \in \mathscr{C}$).
De plus, $[PC_1]$ est l'image de $[P_1B_1]$ par r_2 donc $PC_1 = P_1B_1$. Or $B_1 \in \gamma_1$ donc $P_1B_1 = 2$. Dès lors, $PC_1 = 2$.

Le triangle AB_1C_1 est donc une solution au problème posé.

De même :
- $AB_1'C_1'$ est rectangle et isocèle en A avec $PB_1' = 6$ (car $B_1' \in \mathscr{C}$).
  $[PC_1']$ est l'image de $[P_1B_1']$ par r_2 donc $PC_1' = P_1B_1'$. Or $B_1' \in \gamma_1$ donc $P_1B_1' = 2$. Dès lors, $PC_1' = 2$.
  Le triangle $AB_1'C_1'$ est donc aussi une solution au problème posé.
- AB_2C_2 est rectangle et isocèle en A avec $PB_2 = 6$ (car $B_2 \in \mathscr{C}$).
  $[PC_2]$ est l'image de $[P_2B_2]$ par r_1 donc $PC_2 = P_2B_2$. Or $B_2 \in \gamma_2$ donc $P_2B_2 = 2$. Dès lors, $PC_2 = 2$.
  Le triangle AB_2C_2 est donc une troisième solution au problème posé.
- $AB_2'C_2'$ est rectangle et isocèle en A avec $PB_2' = 6$ (car $B_2' \in \mathscr{C}$).
  $[PC_2']$ est l'image de $[P_2B_2']$ par r_1 donc $PC_2' = P_2B_2'$. Or $B_2' \in \gamma_2$ donc $P_2B_2' = 2$. Dès lors, $PC_2' = 2$.
  Le triangle $AB_2'C_2'$ est donc une quatrième solution au problème posé.

Conclusion : Le problème posé admet exactement 4 solutions.

Remarque :
- Si l'on ne tient pas compte de la symétrie par rapport à (AP), ce problème admet deux triangles solutions non isométriques: par exemple AB_1C_1 et $AB_1'C_1'$.
- En démontrant que P, P_1, C_1 et C_1' appartiennent à la médiatrice de $[B_1B_1']$, on peut prouver que P est extérieur au triangle AB_1C_1 et que P est intérieur au triangle $AB_1'C_1'$.
- Il est aussi possible de déterminer les dimensions des deux triangles non isométriques :
  lorsque P est extérieur à ABC, on a $BC = 2\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$,
  lorsque P est intérieur à ABC, $BC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.