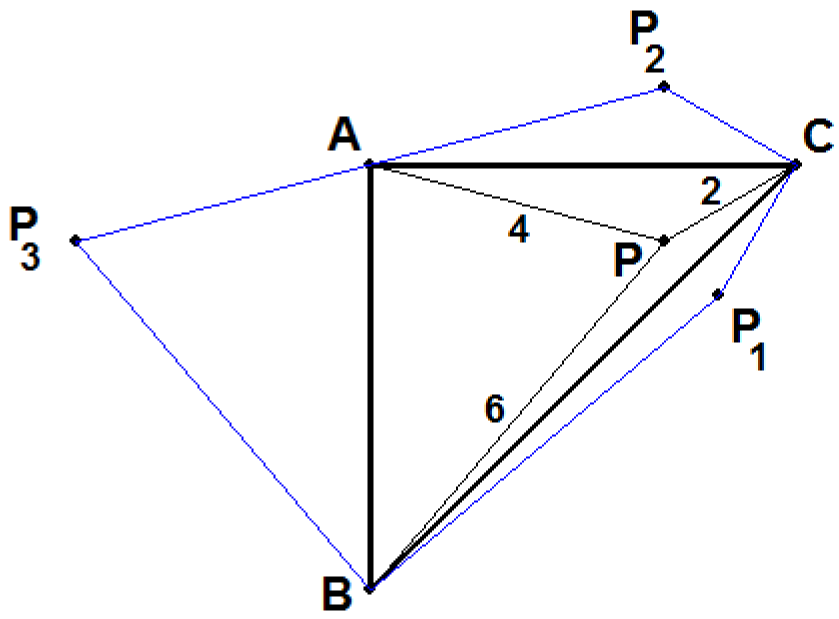
ENONCÉ 2

A l'intérieur d'un triangle ABC rectangle et isocèle en A, P est le point tel que AP = 4 , BP = 6 et CP = 2 (longueur mesurées en cm). Combien mesure l'aire du triangle ABC en cm^2 ?

Solution 1 (avec une symétrie axiale)



On considère les points P_1, P_2 et P_3 symétriques de P respectivement par rapport à (BC), (AC) et (AB).

Par conservation des angles géométriques par une réflexion, on a $\widehat{P_2AP_3} = 2 \times \widehat{CAB} = 180°$.

Les points P_2, A et P_3 sont donc alignés avec $AP_2 = AP_3 = 4$ (par conservation des longueurs par une réflexion). Dès lors, A est le milieu de $[P_2P_3]$.

Par conservation des aires par une symétrie axiale, on a alors Aire($BP_1CP_2P_3$) = 2 × Aire(ABC).

Or, Aire($BP_1CP_2P_3$) = Aire(CP_1P_2) + Aire($P_1P_2P_3$) + Aire(BP_1P_3).

On en déduit que Aire(ABC) = $\frac{1}{2}$ [Aire(CP_1P_2) + Aire($P_1P_2P_3$) + Aire(BP_1P_3)]. **(E)**

De plus, par conservation des angles géométriques par une réflexion, $\widehat{P_1CP_2} = 2\,\widehat{BCA}$ et $\widehat{P_1BP_3} = 2\,\widehat{CBA}$.

Ainsi, $\widehat{P_1CP_2} = \widehat{P_1BP_3} = 90°$. Avec la conservation des longueurs par une réflexion, on obtient ensuite que P_1CP_2 et P_1BP_3 sont deux triangles rectangles et isocèles respectivement en C et B.

Dès lors, Aire(CP_1P_2) = $\frac{CP_1^2}{2} = \frac{CP^2}{2} = 2$ et Aire(BP_1P_3) = $\frac{BP_1^2}{2} = \frac{BP^2}{2} = 18$.

Avec le théorème de Pythagore appliqué aux triangles CP_1P_2 et BP_1P_3, $P_1P_2^2 = 8$ et $P_1P_3^2 = 72$.

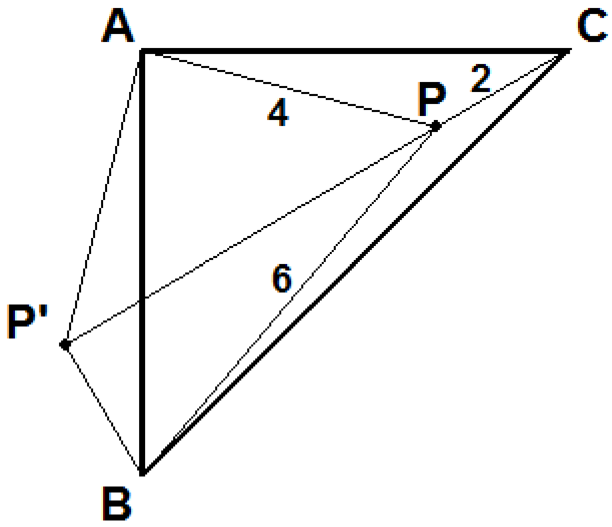
Or, $P_2P_3 = 2AP_2 = 2AP = 8$ d'où $P_2P_3^2 = 64$.

Ainsi, $P_2P_3^2 + P_1P_2^2 = P_1P_3^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, $P_1P_2P_3$ est rectangle en P_2.

On obtient donc Aire($P_1P_2P_3$) = $\frac{P_1P_2 \times P_2P_3}{2} = \frac{\sqrt{8} \times 8}{2} = 8\sqrt{2}$.

Enfin, avec l'égalité (E), on obtient Aire(ABC) = $\frac{1}{2}$ (2 + $8\sqrt{2}$ + 18) = $\mathbf{10 + 4\sqrt{2}}$.

Solution 2 (avec une rotation)



On construit le point P' image de P par le quart de tour r de centre A qui transforme C en B.

Par conservation de l'aire par une rotation, on a aire(APC) = aire(AP'B). Or, aire(ABPC) = aire(ABP) + aire(APC) et aire(ABP) + aire(AP'B) = aire(APBP'). On obtient donc aire(ABPC) = aire(APBP').

De plus, aire(APBP') = aire(APP') + aire(PP'B) avec aire(APP') = $\frac{4 \times 4}{2}$ = 8.

D'après le théorème de Pythagore appliqué à APP' , on a alors PP' = $4\sqrt{2}$.
Par conservation des longueurs par une rotation, PC = P'B. Ainsi, P'B = 2.
Par ailleurs, $PP'^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$, $P'B^2 = 4$ et $PB^2 = 6^2 = 36$. Dès lors, $PP'^2 + P'B^2 = PB^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, PP'B est rectangle en P'. On en déduit que aire(PP'B) = $\frac{PP' \times P'B}{2}$ = $\frac{4\sqrt{2} \times 2}{2} = 4\sqrt{2}$.

On obtient donc aire(APBP') = $8 + 4\sqrt{2}$ = aire(ABPC).
De plus, un quart de tour transforme une droite en une droite perpendiculaire donc (PC) $\perp$ (P'B).
Comme PP'B est rectangle en P', (PP') $\perp$ (P'B). Les droites (PC) et (PP') étant perpendiculaires à (P'B), elles sont parallèles, avec P pour point commun ; elles sont donc confondues. Ainsi, P' $\in$ (PC) et (PC) $\perp$ (P'B) donc [BP'] est la hauteur issue de B du triangle BPC. On a donc aire(BPC) = $\frac{PC \times BP'}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Finalement, aire(ABC) = aire(ABPC) + aire(BPC) = $8 + 4\sqrt{2} + 2$ = $\mathbf{10 + 4\sqrt{2}}$.

Remarque : Cette solution donne une méthode de construction de A, B, C et P plus simple que celle présentée à l'exercice 1.
On trace d'abord un triangle APP' rectangle isocèle en A tel que AP = 4.
Ensuite, on peut par exemple construire C tel que C $\in$ [P'P) \ [P'P] et PC = 2.
On termine alors en construisant B de sorte que ABC soit rectangle et isocèle en A, avec P intérieur à ABC.

Solution 3 (avec les coordonnées barycentriques)

P est à l'intérieur du triangle ABC donc P = bar{(A ; aire(PBC)) ; (B ; aire(PAC)) ; (C ; aire(PAB))}
On pose x = aire(PBC), y = aire(PAC) et z = aire(PAB)
On a donc : $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$. On en déduit les 3 égalités suivantes :
$(x + y + z)\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$
$(x + y + z)\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$
$(x + y + z)\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$ avec x + y + z = aire(ABC) = $\frac{b^2}{2}$ en posant b = AC = AB

On élève alors au carré chaque membre de ces égalités puis on développe, avec AP = 4, BP = 6 et CP = 2.

On obtient : $\frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 4^2 = y^2 \times b^2 + z^2 \times b^2$ car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 6^2 = x^2b^2 + 2xz\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + z^2BC^2 \text{ où } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 \text{ et } BC = b\sqrt{2}$$

$$\frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 2^2 = x^2b^2 + 2xy\,\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + y^2CB^2 \text{ où } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2$$

Dès lors, après simplification de chaque égalité par b^2, on a le système suivant :

$$\begin{cases} 4b^2 = y^2 + z^2 \\ 9b^2 = x^2 + 2xz + 2z^2 \\ b^2 = x^2 + 2xy + 2y^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ (x + z)^2 - z^2 + 2z^2 = 9b^2 \\ (x + y)^2 - y^2 + 2y^2 = b^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ \left(\frac{b^2}{2} - y\right)^2 + z^2 = 9b^2 \\ \left(\frac{b^2}{2} - z\right)^2 + y^2 = b^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \quad (E) \end{cases}$$

Les 3 premières équations forment un sous-système d'inconnues b, y et z :

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ y^2 + z^2 - b^2y + \frac{b^4}{4} = 9b^2 \\ y^2 + z^2 - b^2z + \frac{b^4}{4} = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ 4b^2 + \frac{b^4}{4} - b^2y = 9b^2 \\ 4b^2 + \frac{b^4}{4} - b^2z = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ 4 + \frac{b^2}{4} - y = 9 \\ 4 + \frac{b^2}{4} - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ z - y = 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (z - 8)^2 + z^2 = 16(z - 3) \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 - 32z + 112 = 0 \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 8 + 2\sqrt{2} \text{ ou } z = 8 - 2\sqrt{2} \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases}$$

Avec $z = 8 - 2\sqrt{2}$, on a $y = z - 8 = -2\sqrt{2}$ donc $y < 0$. Or $y > 0$. La valeur $z = 8 - 2\sqrt{2}$ est donc à exclure.

Avec $z = 8 + 2\sqrt{2}$, $b^2 = 4(z - 3) = 4(5 + 2\sqrt{2})$. Dès lors, (E) donne $x + y + z = \frac{b^2}{2} = 2(5 + 2\sqrt{2})$.

Finalement, aire(ABC) = $\mathbf{10 + 4\sqrt{2}}$.

Remarque :
Le seul avantage de cette méthode est qu'elle permet de connaître simplement l'aire des 3 triangles de sommet P.
$z = 8 + 2\sqrt{2}$ = aire(PAB),
$y = 2\sqrt{2}$ = aire(PAC),
et x = aire(ABC) – y – z = $2 + 4\sqrt{2} = 2$ = aire(PBC) (valeur déjà obtenue avec la solution 2)

Solution 4 (avec les coordonnées cartésiennes, bien sûr)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(A ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère $B(b ; 0)$, $C(0 ; b)$ et $P(x ; y)$ avec : $AP = 4$, $CP = 2$ et $BP = 6$. Sans perte de généralité, on peut choisir $b > 0$ ce qui conduit à $x > 0$ et $y > 0$ puisque P est intérieur à ABC.

L'aire du triangle ABC est alors égale à $\frac{b^2}{2}$.

Les 3 égalités précédentes se traduisent par le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + (y - b)^2 = 4 \\ (x - b)^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 16 - 2by + b^2 = 4 \\ 16 - 2bx + b^2 = 36 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = \dfrac{b^2 + 12}{2b} \\ x = \dfrac{b^2 - 20}{2b} \end{cases}.$$

Dès lors, $\left(\frac{b^2 + 12}{2b}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{b^2 - 20}{2b}\right)^{\mathbf{2}} = 16 \Leftrightarrow 2b^{\mathbf{4}} - 80b^2 + 544 = 0 \Leftrightarrow b^{\mathbf{4}} - 40b^2 + 272 = 0$.

Avec $\Delta' = 128$, on obtient $b^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ou $b^2 = 20 - 8\sqrt{2}$.

1[er] cas : $b^2 = 20 - 8\sqrt{2}$. On a alors $b^2 - 20 < 0$, $b > 0$, et $x = \frac{b^2 - 20}{2b}$ d'où $x < 0$ ce qui est exclu.

Ce cas conduirait à un point P extérieur au triangle ABC.

2[ème] cas : $b^2 = 20 + 8\sqrt{2}$. Comme $b > 0$, on a bien $x > 0$ et $y > 0$.

$\frac{b^2}{2} = 10 + 4\sqrt{2}$.

Finalement, on obtient aire(ABC) = $\mathbf{10 + 4\sqrt{2}}$.