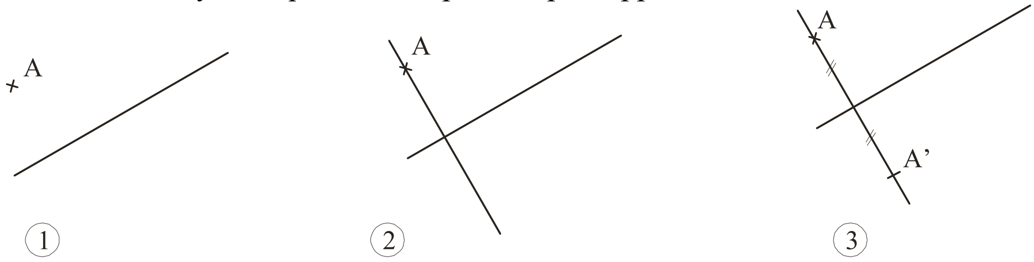
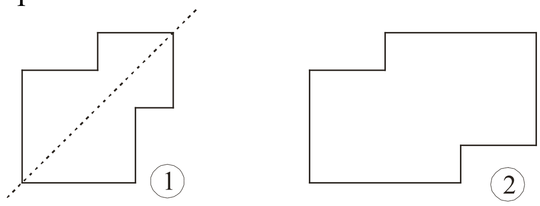
POLYGONES ET AXES DE SYMETRIE

RAPPELS :

1) Pour tracer le symétrique A' d'un point A par rapport à la droite "d".



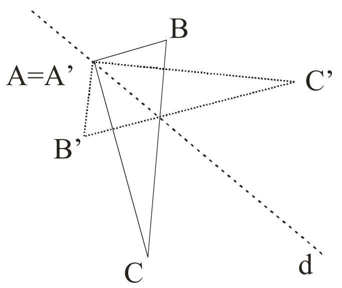
2) Une figure géométrique possède un axe de symétrie lorsqu'elle se retrouve à la même place après avoir fait un retournement autour d'une droite.



La figure ① possède un axe de symétrie.

La figure ② ne possède pas d'axe de symétrie.

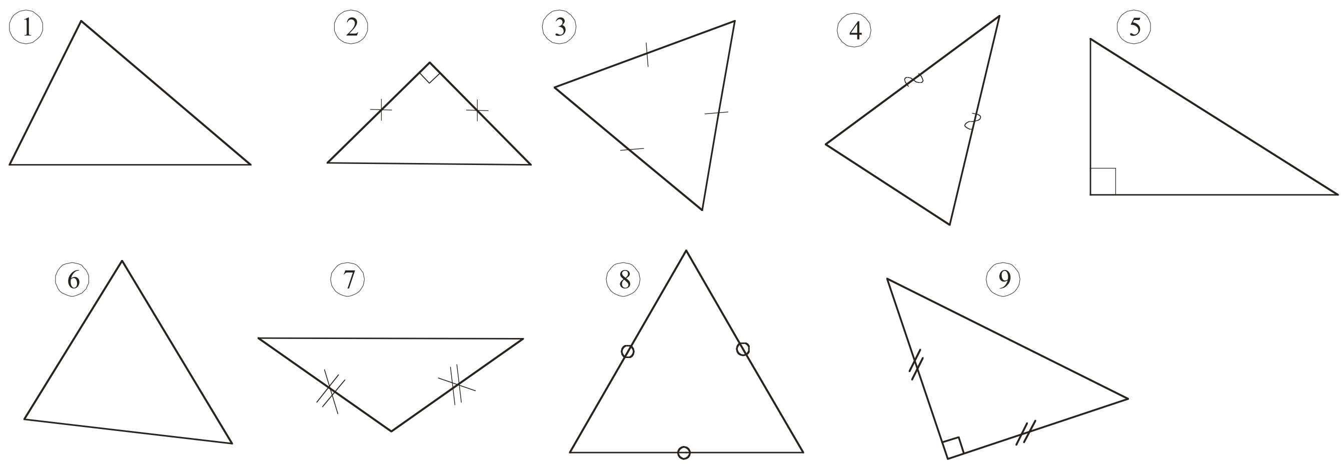
3) En utilisant une symétrie par rapport à une droite (symétrie orthogonale), une figure géométrique fait un retournement autour d'une droite.



La figure géométrique n'est pas déformée :
Je peux dire que la symétrie par rapport à une droite (orthogonale) conserve (ne change pas) les longueurs et les angles.

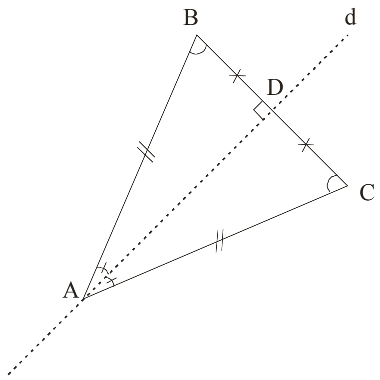
TRIANGLES ET AXES DE SYMETRIE :

J'ai dessiné 9 triangles.
Quels sont ceux qui possèdent un axe de symétrie ? (Ils reprennent leur place après un retournement autour de l'axe de symétrie).



TRIANGLES ET SYMETRIE ORTHOGONALE

Un triangle isocèle est un triangle qui a un axe de symétrie.



La droite "d" est l'axe de symétrie du triangle ABC donc :

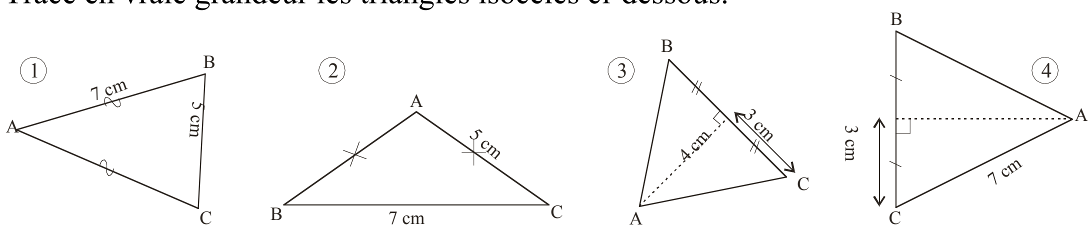
1) AB = AC et BD = DC car la symétrie orthogonale conserve les longueurs.

2) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$; $\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$ (angles droits) et $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ car la symétrie orthogonale conserve les angles

3) L'aire du triangle BDA est égale à l'aire du triangle CDA car la symétrie orthogonale conserve les aires.

Exercice

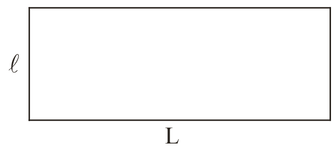
1) Trace en vraie grandeur les triangles isocèles ci-dessous.



2) En utilisant les dessins ci-dessus ou en faisant des mesures sur les dessins en vraie grandeur, calcule le périmètre de chacun des quatre triangles.

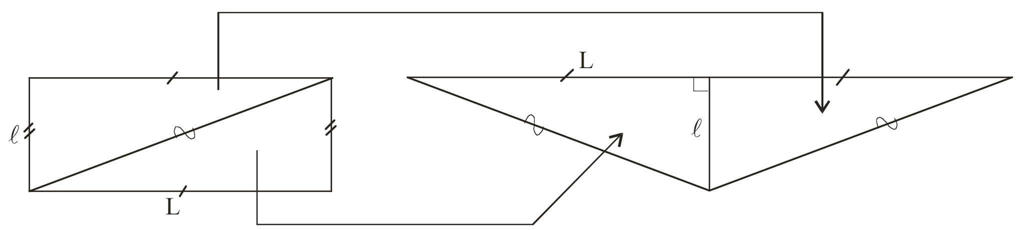
AIRE DES TRIANGLES RECTANGLES ET ISOCELES

RAPPEL :

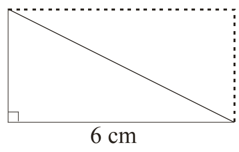


Aire d'un rectangle : Longueur × largeur

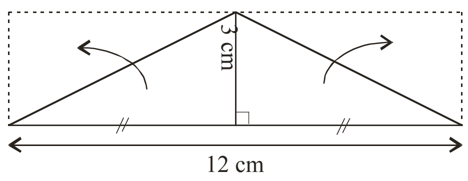
$\mathcal{A} = L \times \ell$



Je découpe le rectangle en deux triangles rectangles. J'assemble les morceaux pour obtenir un triangle isocèle (ayant un axe de symétrie).
La symétrie orthogonale conserve les aires.
Les deux triangles rectangles ont donc même aire.



L'aire d'un triangle rectangle est donc égale à la moitié de l'aire d'un rectangle
Ici : $\mathcal{A} = (3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}) : 2 = 9 \text{ cm}^2$
"3 cm ×6 cm" est le produit des longueurs des côtés de l'angle droit du triangle.

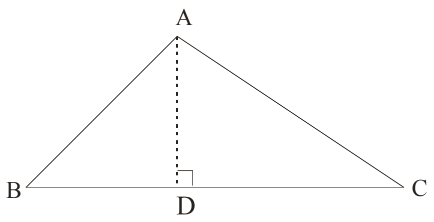


L'aire d'un triangle isocèle est donc aussi égale à la moitié de l'aire d'un rectangle
Ici : $\mathcal{A} = (12 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}) : 2 = 18 \text{ cm}^2$
"12 cm × 3 cm" est le produit des longueurs de la base et de la hauteur du triangle.

Exercices :

1) Calcule l'aire des 4 triangles isocèles dessinés précédemment : des tracés ou des mesures supplémentaires seront parfois nécessaires.

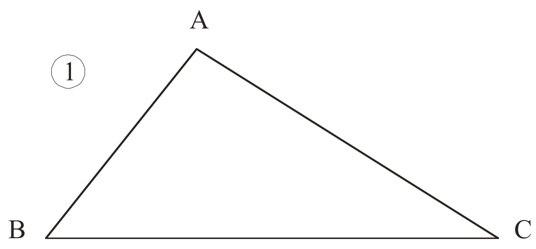
2)



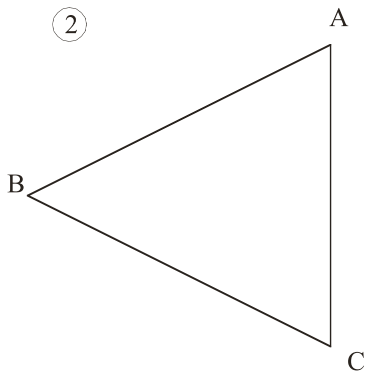
A l'aide de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A, j'ai découpé le triangle ABC en deux triangles ABD et ADC.
Après avoir mesuré ce qui est nécessaire, tu vas calculer l'aire des triangles rectangles ABD et ADC, puis l'aire du triangle ABC.

Utilise ce qui vient d'être fait à la question 2 pour calculer les aires des triangles ci-dessous.

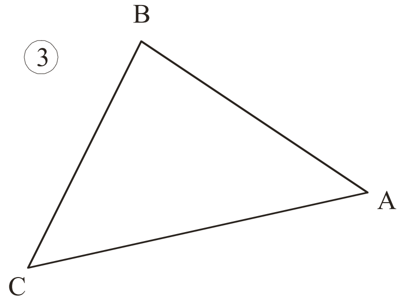
1



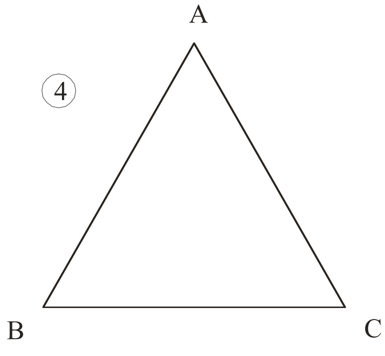
2



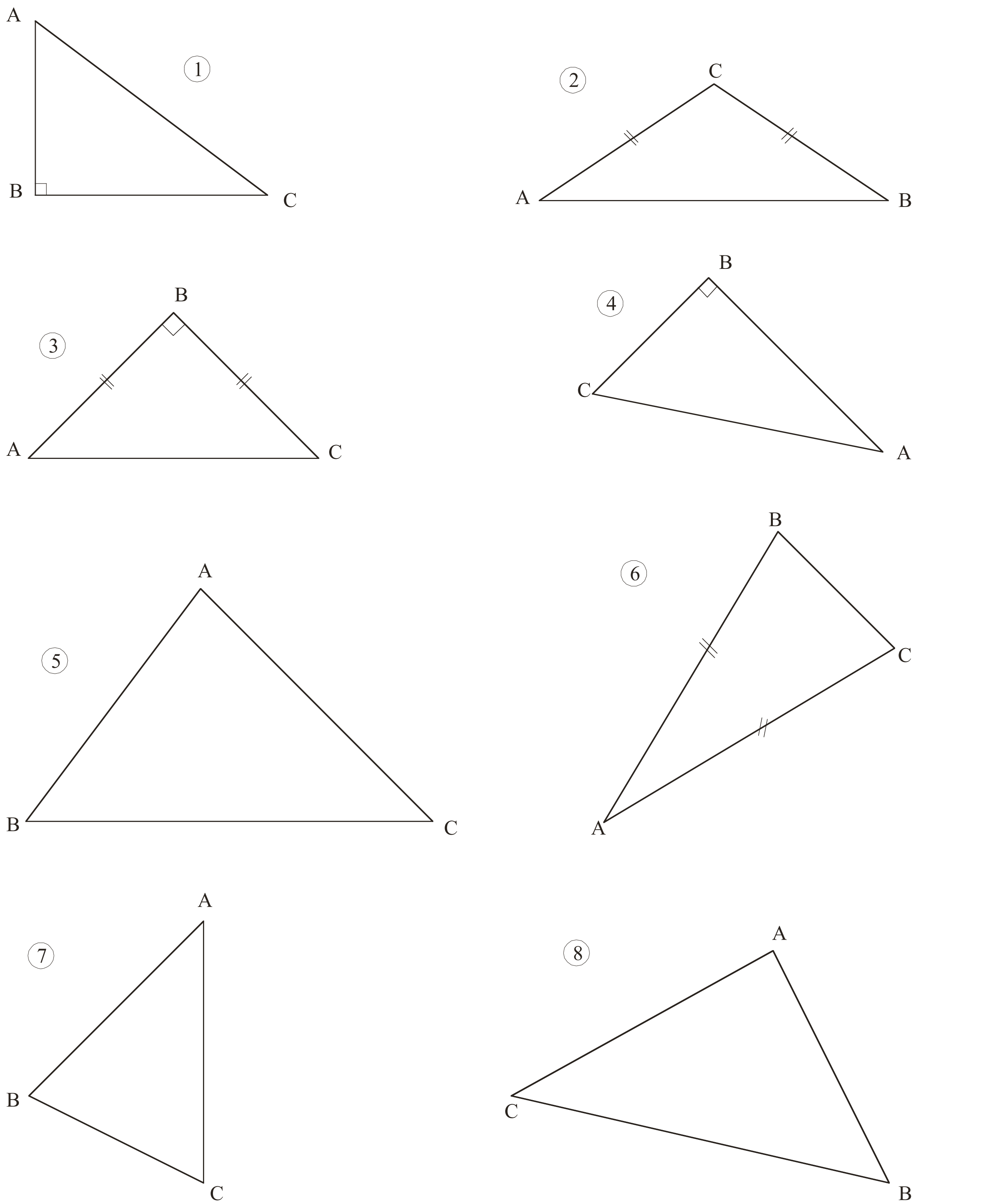
3



4

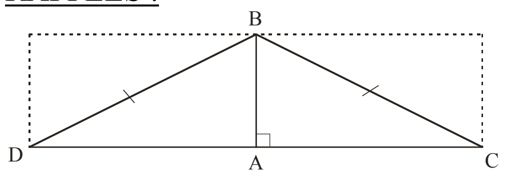


AIRE D’UN TRIANGLE



En mesurant ce qui te paraît nécessaire et en traçant ce qui te semble utile, calcule l’aire des 8 triangles de cette feuille.

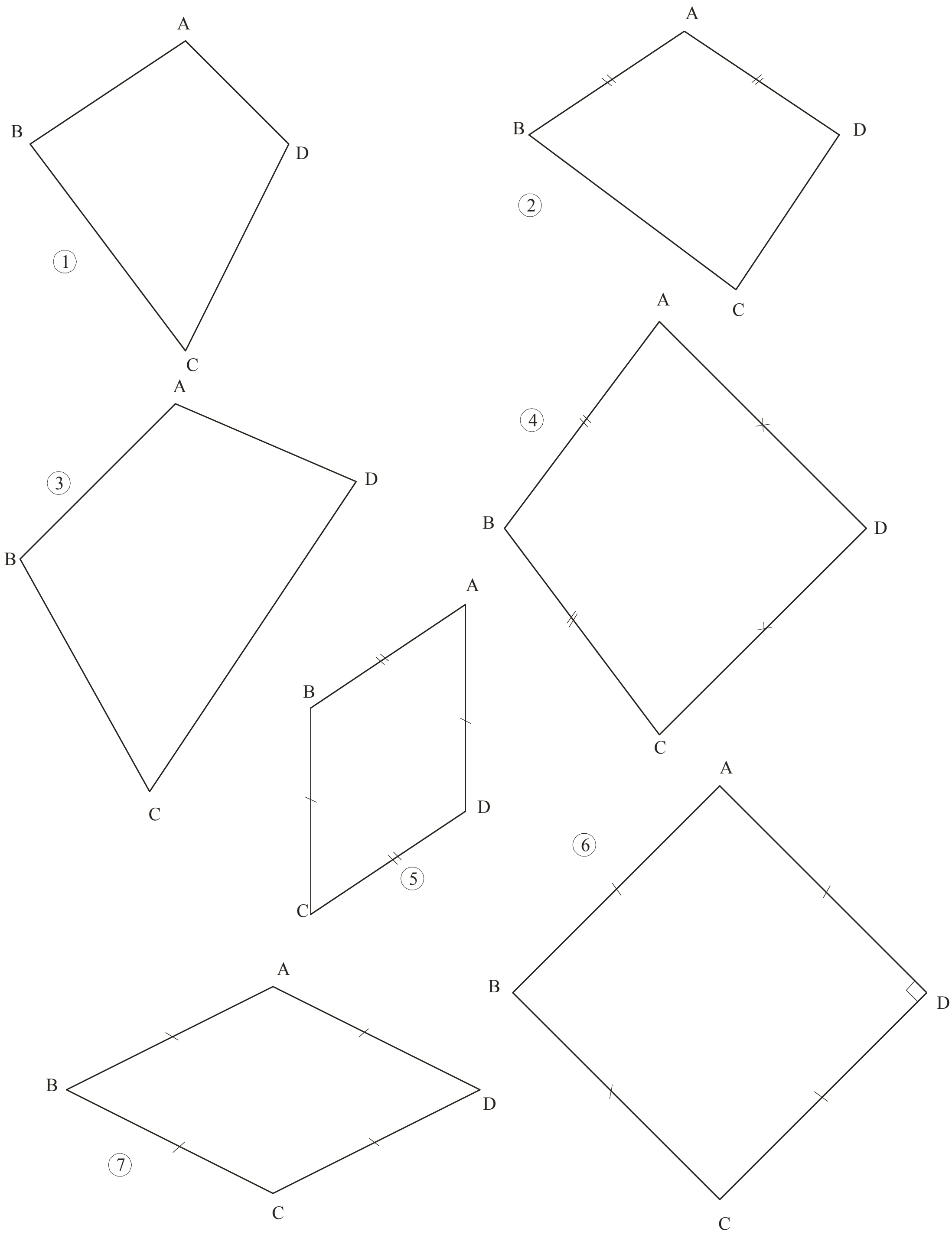
RAPPELS :



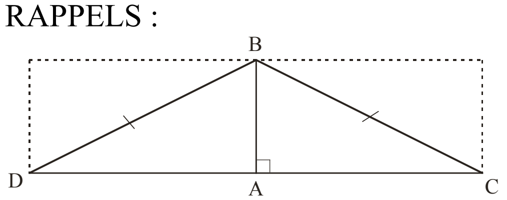
1. L’aire d’un triangle rectangle est la moitié de l’aire d’un rectangle.
2. L’aire d’un triangle isocèle est la moitié de l’aire d’un rectangle.

AIRE DE QUADRILATERES

En traçant ce qui te semble utile et en mesurant ce qui te paraît nécessaire, calcule l'aire des 7 quadrilatères ci-dessous.



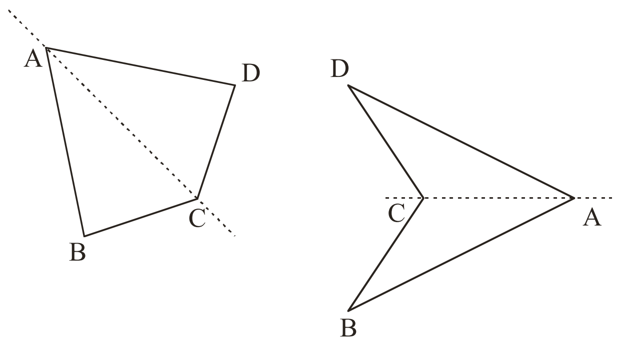
RAPPELS :



1. L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle.
2. L'aire d'un triangle isocèle est la moitié de l'aire d'un rectangle.

LE CERF-VOLANT

Définition :



Le cerf-volant est un quadrilatère dont une diagonale est un axe de symétrie.

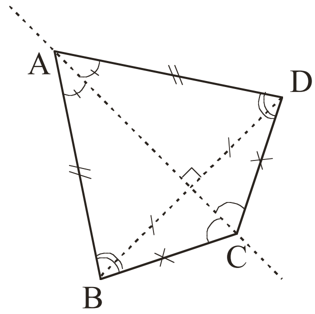
Conséquences :

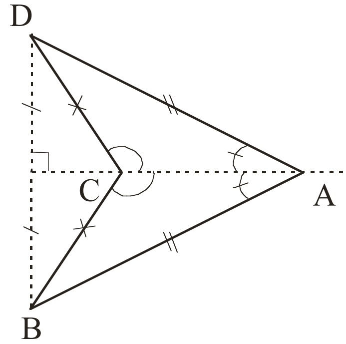
1) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les longueurs
   Donc AD = AB et BC = CD

2) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les angles
   Donc $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$; $\widehat{DCA} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$

3) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les aires
   Donc les triangles DCA et BCA ont même aire

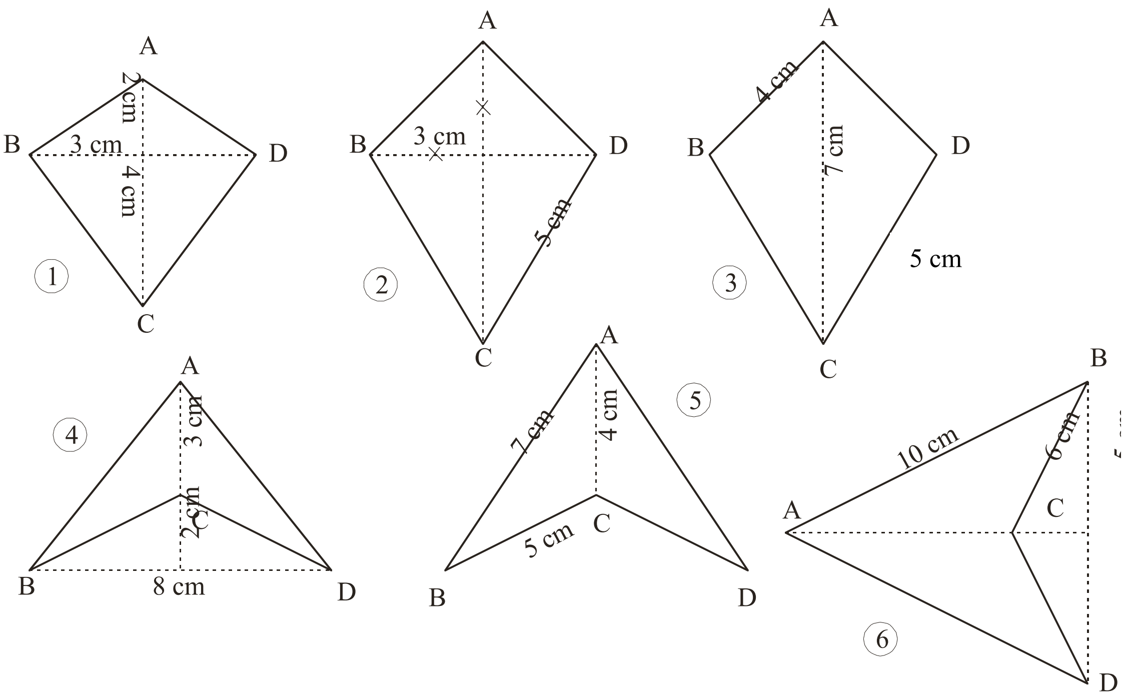
4) Le point B est le symétrique du point D
   par rapport à la droite (AC).
   Je suis donc sûr
   que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   Je suis aussi sûr
   que la diagonale (AC) coupe le segment [BD] en son milieu.





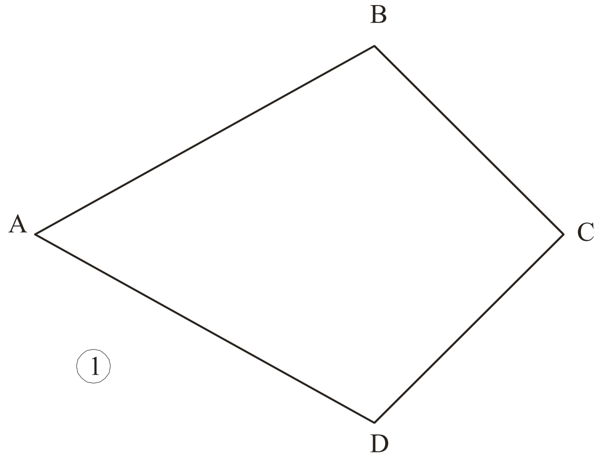
Exercice :

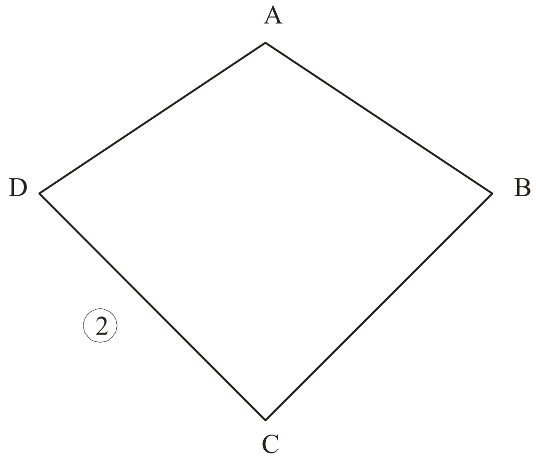
En utilisant ce que tu sais à propos des cerfs-volants et en utilisant ce qui est noté sur les figures, dessine en vraie grandeur les six cerfs-volants ci-dessous.

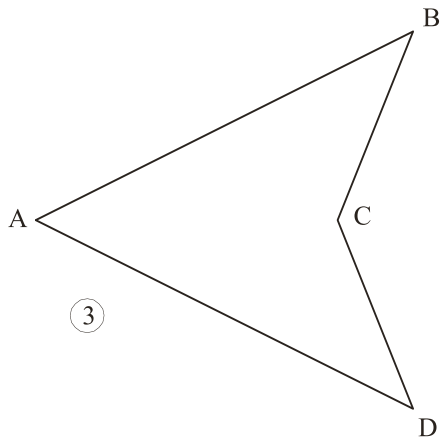


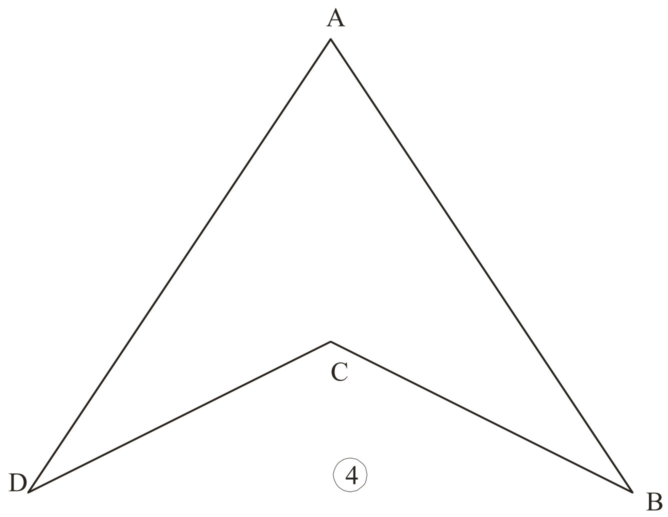
AIRE D'UN CERF-VOLANT

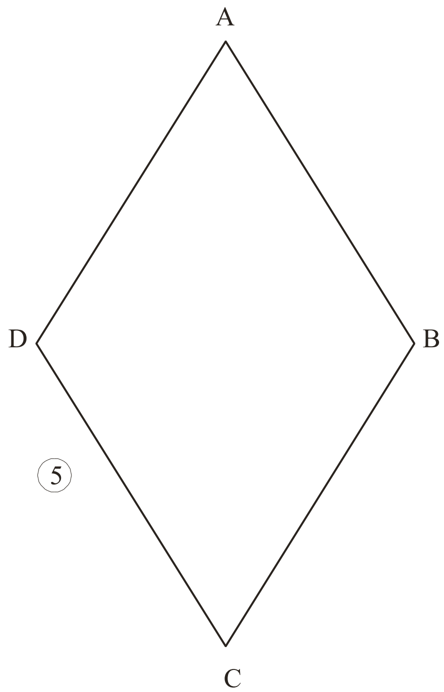
En traçant ce qui te semble utile et en mesurant ce qui te paraît nécessaire, calcule l'aire des 6 cerfs-volants ci-dessous.

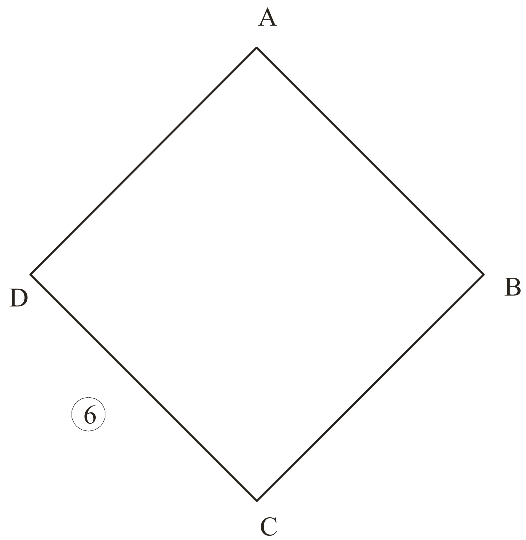




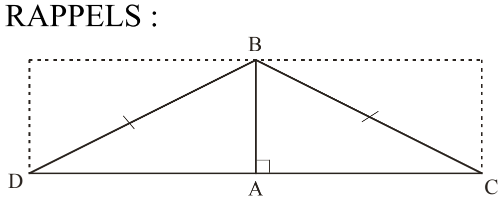






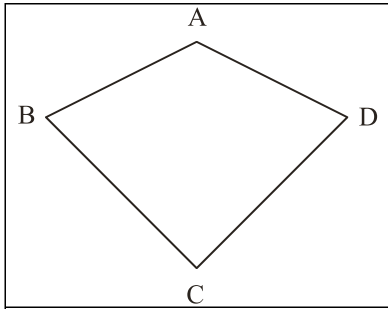


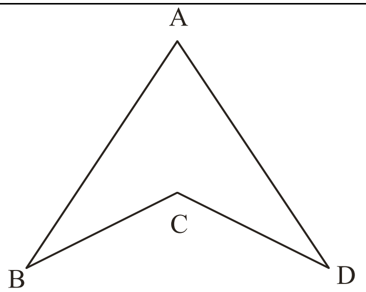
RAPPELS :

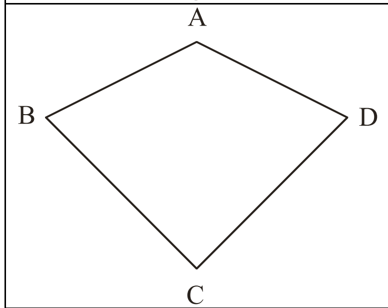


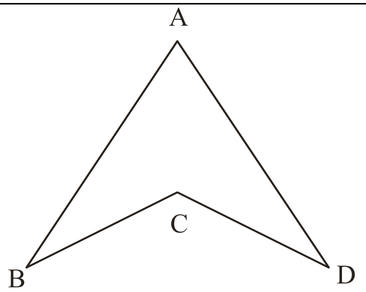
1. L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle.
2. L'aire d'un triangle isocèle est la moitié de l'aire d'un rectangle.

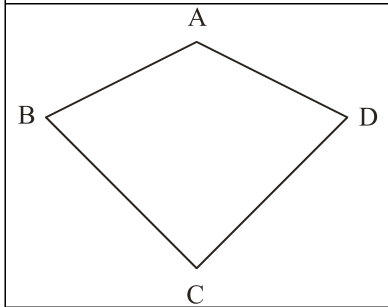
AIRE D'UN CERF-VOLANT

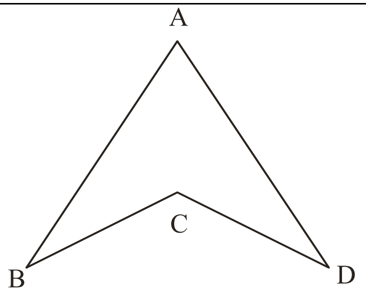
<table>
<tr>
<td>

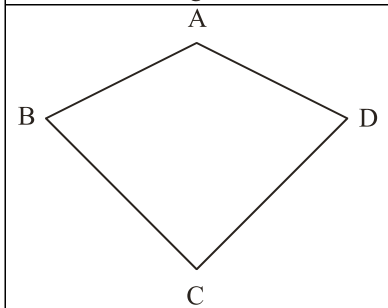
Méthode 1 :
Calculs :</td>
<td>

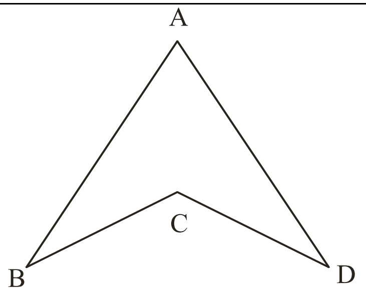
Méthode 1 :
Calculs :</td>
</tr>
<tr>
<td>

Méthode 2 :
Calculs :</td>
<td>

Méthode 2 :
Calculs :</td>
</tr>
<tr>
<td>

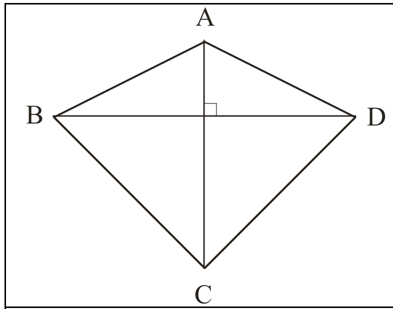
Méthode 3 :
Calculs :</td>
<td>

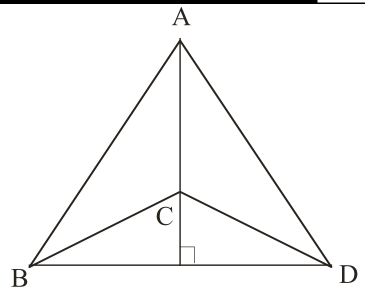
Méthode 3 :
Calculs :</td>
</tr>
<tr>
<td>

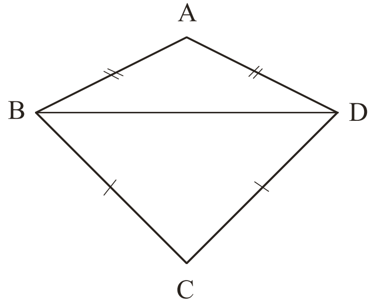
Méthode 4 :
Calculs :</td>
<td>

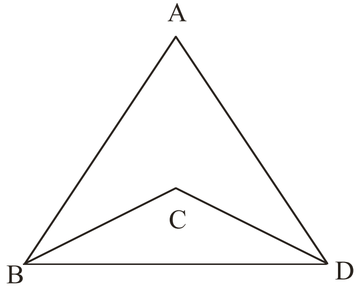
Méthode 4 :
Calculs :</td>
</tr>
<tr>
<td>Existe-t-il une formule permettant de calculer l'aire de ce type de cerf-volant ?</td>
<td>Existe-t-il une formule permettant de calculer l'aire de ce type de cerf-volant ?</td>
</tr>
</table>

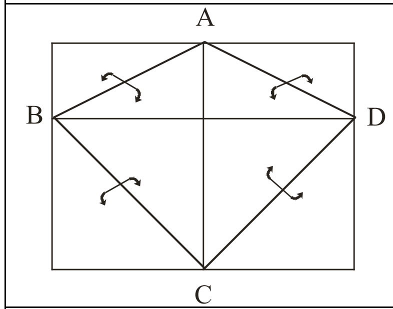
AIRE D'UN CERF-VOLANT
(propositions d'élèves)

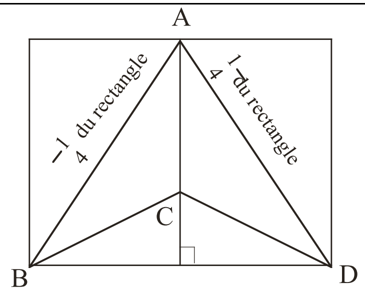
<table>
<tr>
<td>

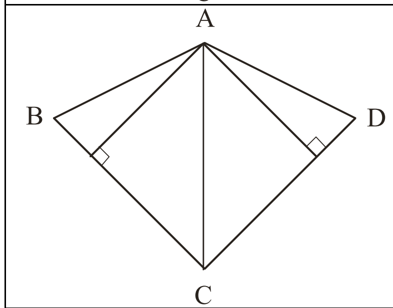
Méthode 1 : je trace les diagonales et j'additionne les aires des 4 triangles rectangles.</td>
<td>

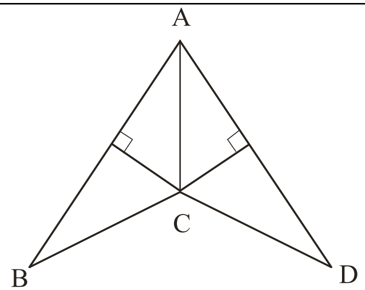
Méthode 1 : je trace les diagonales et je soustrais les aires des petits triangles rectangles aux aires des grands triangles.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Méthode 2 : Je trace la diagonale qui n'est pas l'axe de symétrie et j'additionne les aires des 2 triangles isocèles.</td>
<td>

Méthode 2 : Je trace la diagonale qui n'est pas l'axe de symétrie et je soustrais l'aire du petit triangle isocèle à l'aire du grand triangle isocèle.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Méthode 3 : J'entoure le cerf volant par un rectangle. L'aire du cerf volant est la moitié du grand rectangle.</td>
<td>

Méthode 3 : L'aire du cerf volant n'est pas égale à la moitié de l'aire du rectangle qui l'entoure.</td>
</tr>
<tr>
<td>

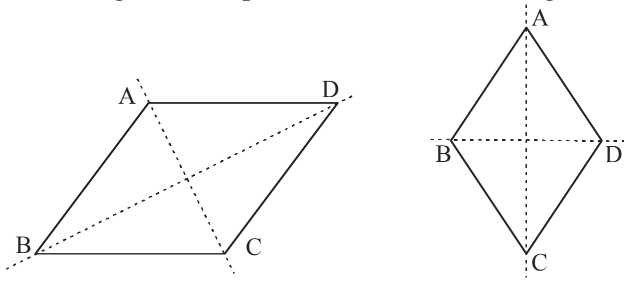
Méthode 4 : Je trace l'axe de symétrie. Je calcule l'aire d'un des 2 triangles en le découpant en 2 triangles rectangles. Par symétrie, je connais l'aire du 2ème triangle donc du cerf volant.</td>
<td>

Méthode 4 : : Je trace l'axe de symétrie. Je calcule l'aire d'un des 2 triangles en le découpant en 2 triangles rectangles. Par symétrie, je connais l'aire du 2ème triangle donc du cerf volant.</td>
</tr>
<tr>
<td>Existe-t-il une formule permettant de calculer l'aire de ce type de cerf-volant ?
L'aire du cerf-volant est la moitié de l'aire du rectangle qui l'entoure
$\mathcal{A} = (D \times d) : 2$</td>
<td>Existe-t-il une formule permettant de calculer l'aire de ce type de cerf-volant ?
La formule $\mathcal{A} = (D \times d) : 2$ semble être vraie sur cet exemple mais on ne sait pas pourquoi.</td>
</tr>
</table>

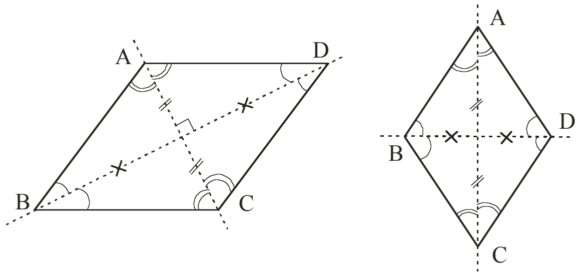
LE LOSANGE

Définition :

Le losange est un quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétrie.



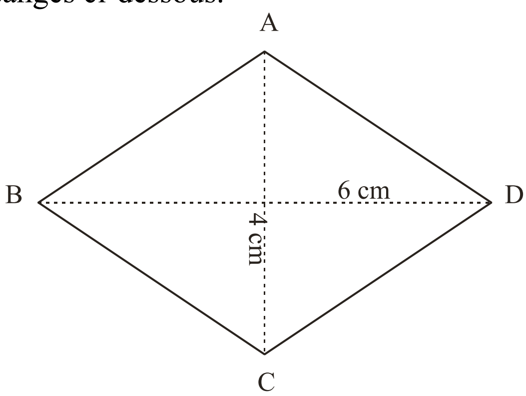
Conséquences :
Le losange est doublement un cerf-volant .
Donc :
1) AB = BC = CD = DA (les 4 côtés sont égaux).
les diagonales se coupent en leur milieu.

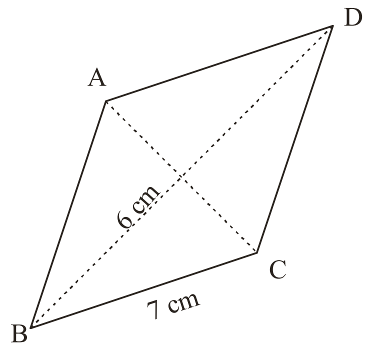


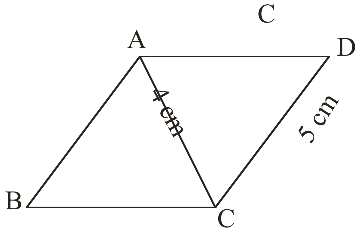
2) BAD = BCD et ABC = ADC (les angles opposés sont égaux).
les diagonales sont perpendiculaires.
Les diagonales coupent les angles qu'elles traversent en deux angles superposables.

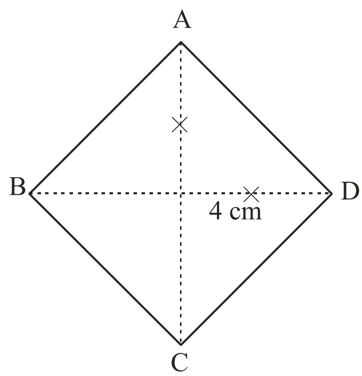
3) Les diagonales définissent 4 triangles rectangles de même aire.

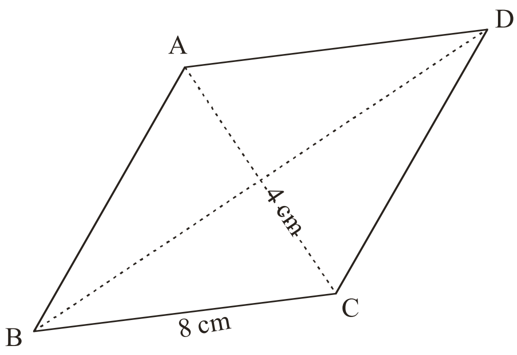
Exercice :
En utilisant ce que tu sais à propos des losanges et en utilisant ce qui est noté sur les figures, dessine en vraie grandeur les 5 losanges ci-dessous.



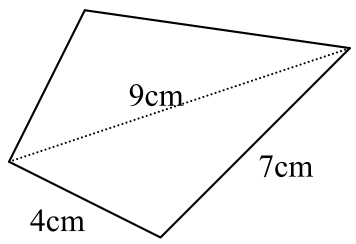






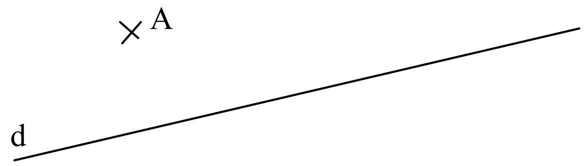


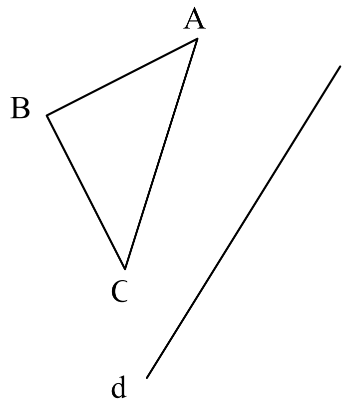
USAGE DU COMPAS ET CERF-VOLANT



1) Dessine en vraie grandeur le cerf-volant contre.

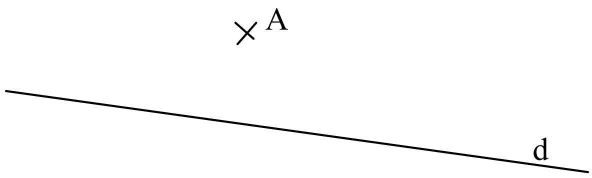
2) En utilisant le compas, et en traçant un cerf-volant, trace le symétrique du point « A » par rapport à la droite « d ».



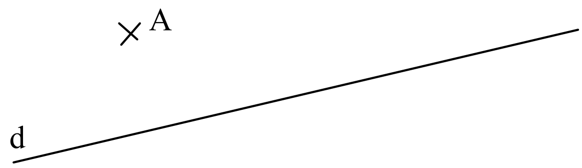


3) En utilisant le compas et en utilisant la méthode de la question 2), trace le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite « d ».

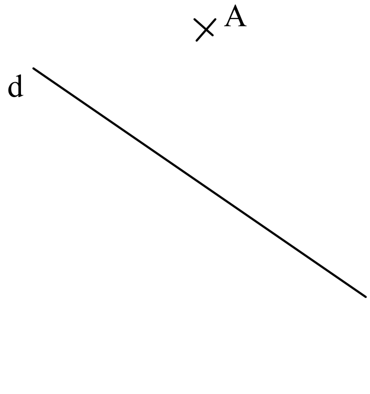
4) Trace un cerf-volant ABCD dont le point A est un sommet et dont les sommets B et D sont sur la droite « d ».



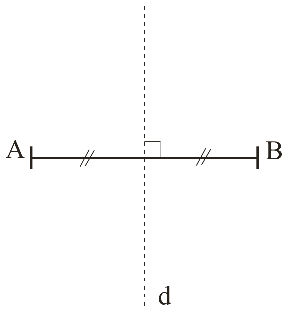
5) En utilisant le compas et en utilisant ce que tu as fait à la question 4), trace la droite qui passe par le point A et qui est perpendiculaire à la droite « d ».



6) En utilisant le compas, trace la droite « d_1 » passant par le point A et perpendiculaire à la droite « d ».
En utilisant le compas, trace la droite « d_2 » passant par le point A et perpendiculaire à la droite « d_1 ».



MEDIATRICE D'UN SEGMENT ET CERF VOLANT



Un segment [AB] admet deux axes de symétrie.

1) La droite qui porte le segment
2) Une deuxième droite "d" tel que le point A soit le symétrique du point B par rapport à cette droite "d".

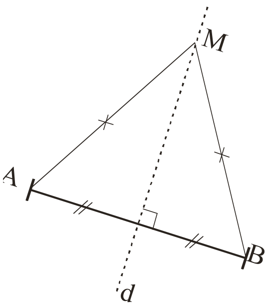
Je suis donc sûr que :

✶ la droite "d" est perpendiculaire à la droite (AB)
✶ la droite "d" passe par le milieu du segment [AB]

Ce deuxième axe de symétrie est appelé **médiatrice du segment [AB].**

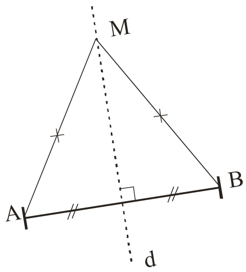
Définition :
Un segment [AB] admet deux axes de symétrie.
Nous appellerons **médiatrice du segment [AB]**, l'axe de symétrie qui n'est pas la droite (AB).

Conséquence :
Le point A a pour symétrique le point B par la symétrie par rapport à la médiatrice du segment [AB]
Donc :



1) la médiatrice du segment [AB] est perpendiculaire à la droite (AB).
2) La médiatrice du segment [AB] passe par le milieu du segment [AB]
3) Tout point M de la médiatrice du segment [AB] est **équidistant** (à la même distance) des extrémités A et B du segment [AB] : MA = MB

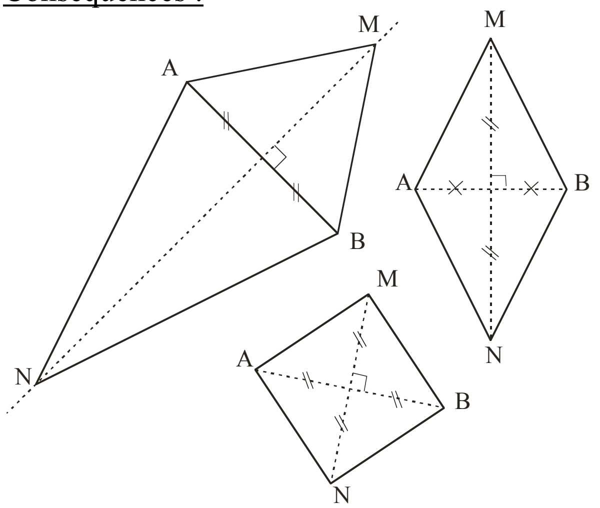
Propriété :



Lorsque le point M est tel que MA = MB, je suis sûr que le point M est sur la médiatrice du segment [AB].

Preuve : MA = MB donc le triangle AMB est isocèle et le point M est sur l'axe de symétrie du triangle.
Cet axe de symétrie est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le milieu du segment [AB].
Le point M est donc sur la médiatrice du segment [AB].

Conséquences :



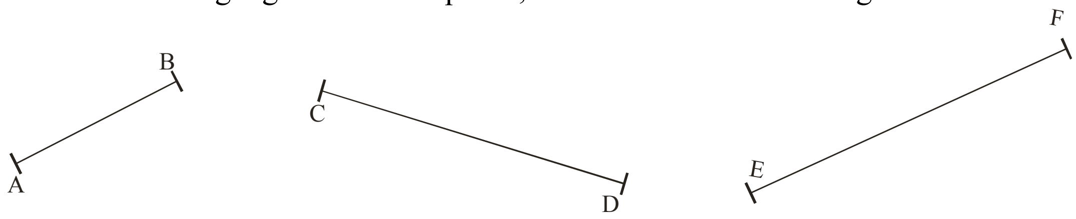
1) L'axe de symétrie d'un triangle isocèle est la médiatrice de la base de ce triangle.

2) L'axe de symétrie d'un cerf-volant est la médiatrice de l'autre diagonale.

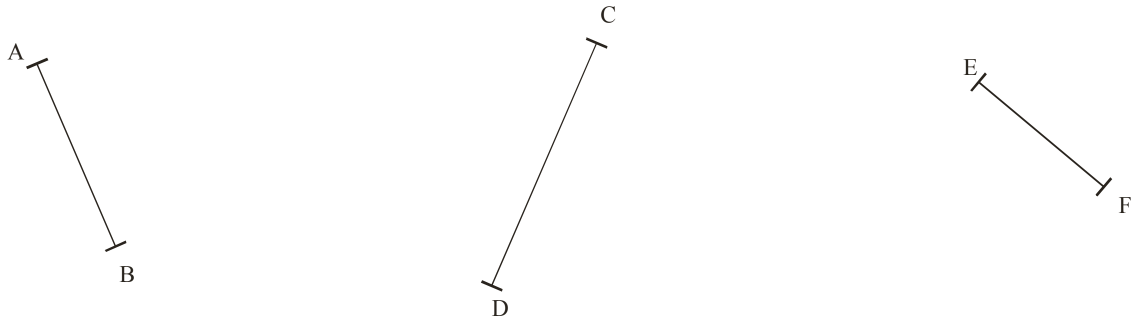
3) Chaque diagonale d'un losange ou d'un carré est la médiatrice de la seconde diagonale.

Exercices :

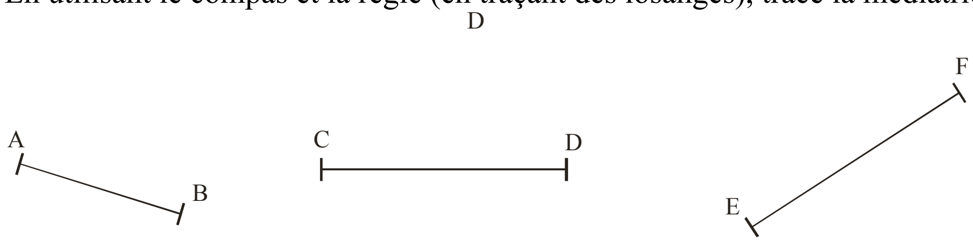
1) En utilisant la règle graduée et l’équerre, trace la médiatrice des segments ci-dessous.



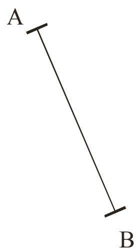
2) En utilisant le compas et la règle (en traçant des cerfs-volants), trace la médiatrice des segments ci-dessous.



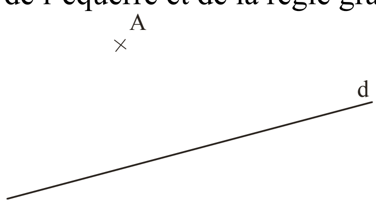
3) En utilisant le compas et la règle (en traçant des losanges), trace la médiatrice des segments ci-dessous.



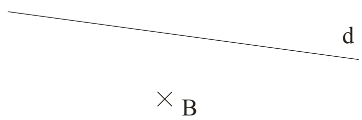
4) Où sont les points à égale distance des points A et B ?



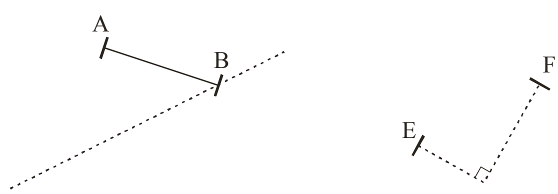
5) La droite "d" est la médiatrice du segment [AB]. A l’aide de l’équerre et de la règle graduée, retrouve le point B.



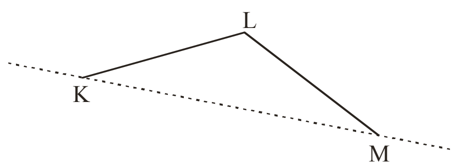
6) La droite "d" est la médiatrice du segment [AB].
l’aide du compas, retrouve le point A



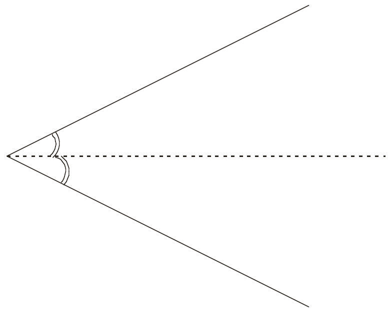
7) Complète les deux dessins
pour obtenir les losanges ABCD et EFGH.



8) Complète le dessin ci-contre pour obtenir le cerf volant KLMN.



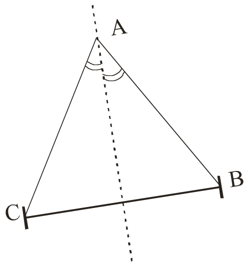
BISSECTRICE D'UN ANGLE ET CERF-VOLANT



<u>Définition :</u>
La bissectrice d'un angle est la partie de l'axe de symétrie qui est à l'intérieur de l'angle.

<u>Conséquence :</u>
La bissectrice d'un angle partage cet angle en deux angles superposables.

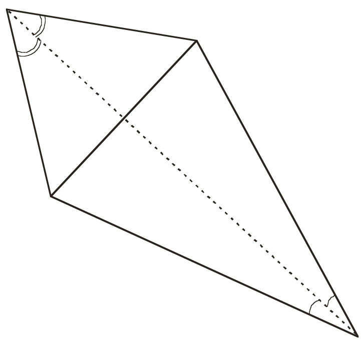
<u>Pour le triangle isocèle :</u>



L'axe de symétrie du triangle isocèle est la bissectrice de l'angle au sommet.

La médiatrice de la base d'un triangle isocèle est aussi la bissectrice de l'angle au sommet.

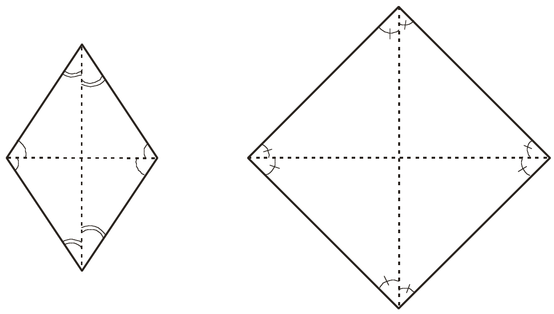
<u>Pour le cerf volant :</u>



L'axe de symétrie du cerf-volant est la bissectrice des angles qu'il traverse.

La médiatrice de la diagonale qui n'est pas axe de symétrie est la bissectrice des angles traversés par l'axe de symétrie.

<u>Pour le losange et le carré :</u>

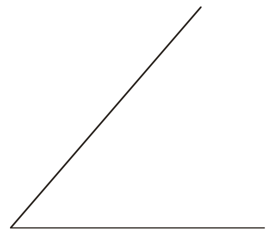


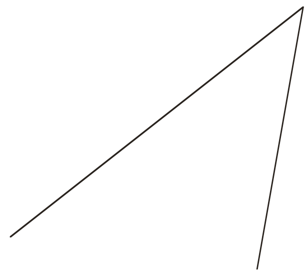
Les axes de symétrie du losange et du carré sont les bissectrices des angles qu'ils traversent.

Les diagonales du losange et du carré sont les bissectrices des angles qu'ils traversent

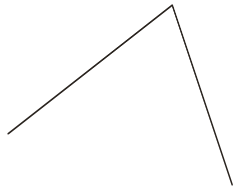
Exercices :

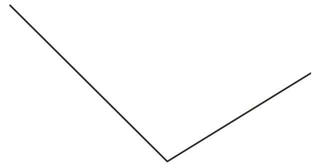
1) En utilisant la règle graduée,
trace la bissectrice des deux angles ci-contre.
(Il faut tracer un triangle isocèle et son axe de symétrie.)



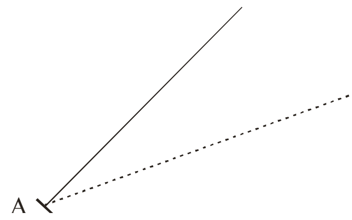


2) En utilisant le compas et la règle,
trace la bissectrice des deux angles ci-contre.
(Il faut tracer un cerf-volant
ou un losange et son axe de symétrie.)

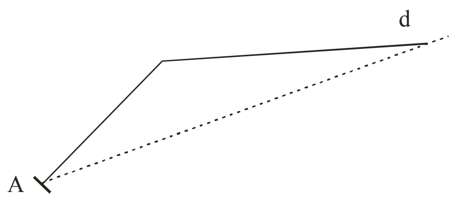




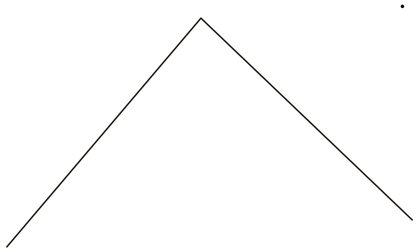
3) Trace le côté manquant à l'angle pour lequel "d" est la bissectrice.



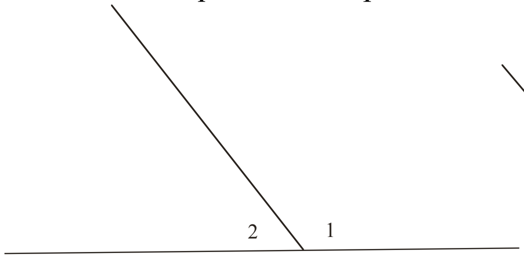
4) Trace les côtés manquants au cerf-volant pour lequel "d" est la bissectrice de deux de ses angles.

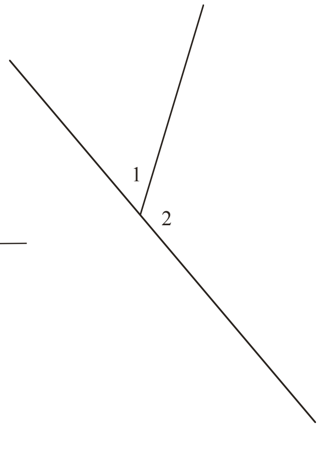


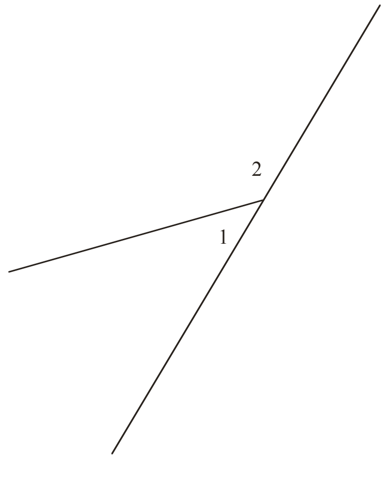
5) En traçant les bissectrices, partage les deux angles ci-dessous en quatre angles superposables
.



6) Dans les trois dessins ci-dessous, trace les bissectrices des angles "1" et "2".
✶ Quelle remarque peux-tu faire à propos des bissectrices tracées ?
✶ Cette remarque était-elle prévisible ?

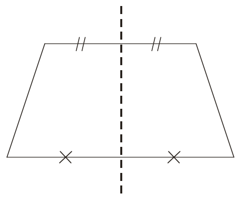




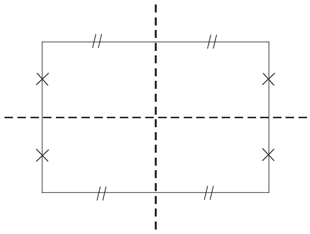


D'AUTRES QUADRILATERES SYMETRIQUES

Nous avons étudié des quadrilatères dont une diagonale pouvait être axe de symétrie.
Existe-t-il des quadrilatères qui ont autre chose qu'une diagonale comme axe de symétrie ?



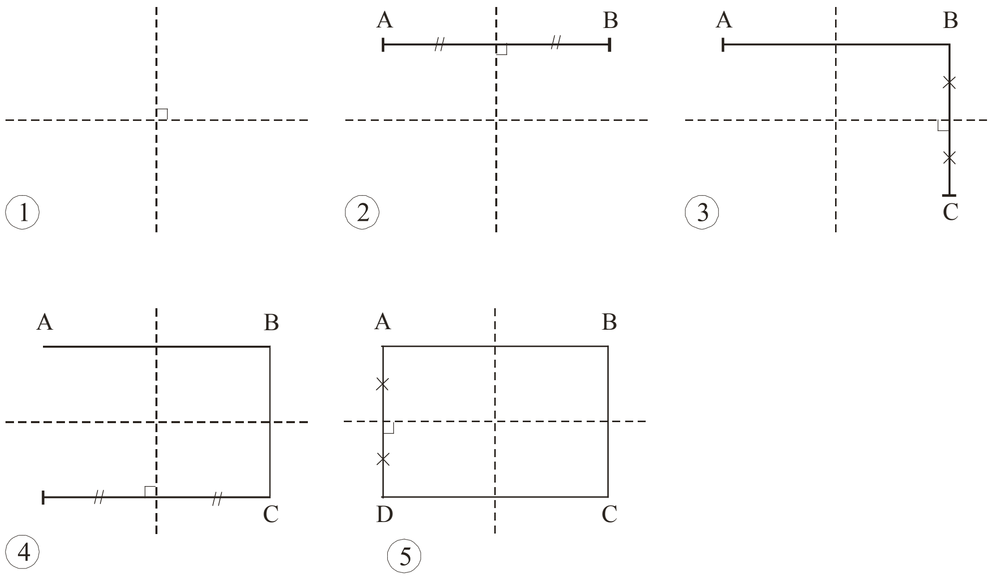
Avec un axe de symétrie, nous obtenons le trapèze isocèle qui n'est pas étudié en sixième.



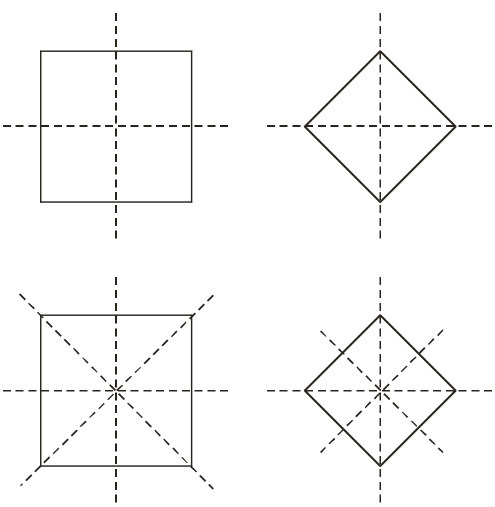
Avec deux axes de symétrie, une figure bien connue est obtenue : le rectangle.

Nous pouvons donc dire qu'un rectangle est un quadrilatère qui a deux axes de symétrie qui ne sont pas ses diagonales.

Nous obtenons ainsi une quatrième façon de tracer un rectangle.



Remarque :



1) Le carré est un rectangle particulier et un losange particulier.
   Il a donc les deux axes de symétrie du rectangle et les deux axes de symétrie du losange.

2) Le carré est un rectangle particulier.
   Aire = longueur × largeur

   donc $\boxed{\text{Aire = côté × côté}}$

3) Le carré est un losange particulier
   Aire = (première diagonale × deuxième diagonale) : 2

   $\boxed{\text{Aire = (diagonale × diagonale) : 2}}$