

avril 88
40 F

Supplément au N° 42

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction

Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Michel Clinard, Jacqueline Collet,
Roger Crépin, Luce Dossat,
René Gauthier, Georges le Nezet,
Ginette Mison, Serge Parpay,
Raymond Torrent.

Rédaction

Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes

Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité

Pascal Monsellier

Abonnements

PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement

100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**

Techniques Graphiques du Futur
Limoges

Photogravure et impression

Fabrigue - Limoges

Commission paritaire

63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest, Caen et Clermont-Ferrand
avec le concours du
Ministère de la Coopération

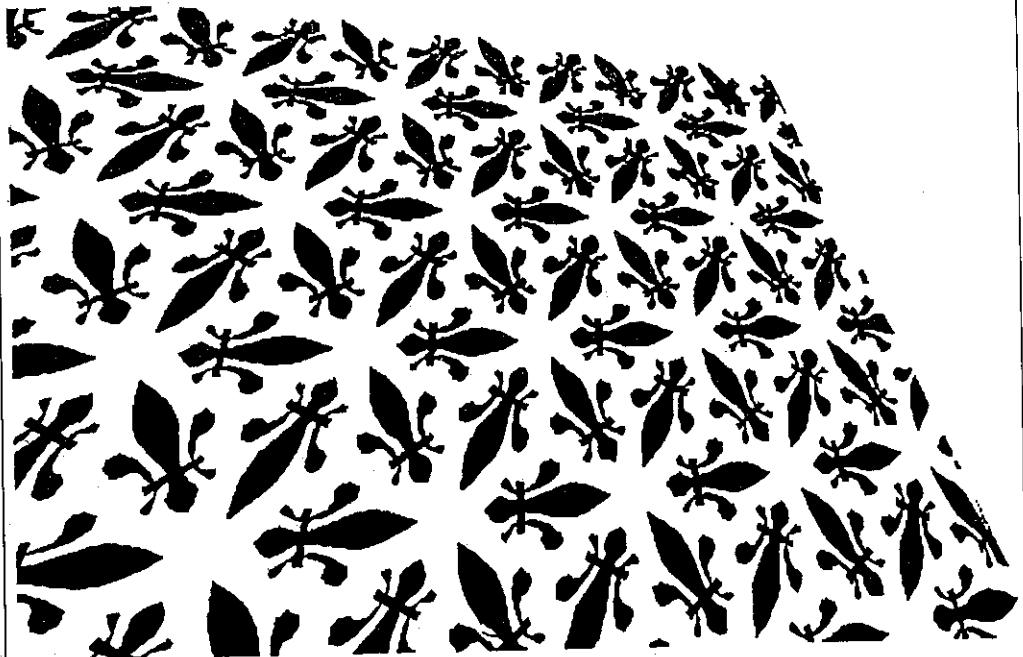
Diffusion

Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du
Centre National des Lettres

SOMMAIRE

Kaléidoscopes 3-D et polyèdres... liquides ! V. Papillon, R. Pallascio et D. Dion	2
Pavages et polygones. Hélène Corthésy	5
Pavages hyperboliques. Gilles Darche	15
Suivez les motifs à la trace. Noël Blotti	21
La géométrie du kaléidoscope. Bernard Hodgson	25
Ribambelles et napperons. Jean Grignon	35

Pavage en perspective obtenu avec
le logiciel «Mosedit» de Baracs & Chourot
sur Mac Intosh.



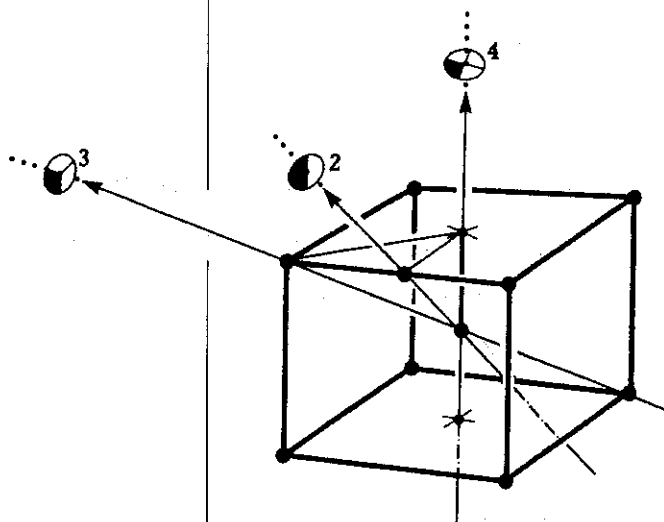
KALÉIDOSCOPES 3-D ET POLYÈDRES... LIQUIDES !

V. PAPILLON, R. PALLASCIO et D. DION - Montréal

Cet article présente les kaléidoscopes qui correspondent aux trois groupes des polyèdres réguliers. Vous pouvez les réaliser et, en coupant l'extrémité en arc de cercle, vous pourrez obtenir une infinité de polyèdres sphériques.

INTRODUCTION

Sur le cube, on retrouve des axes de symétrie de rotation d'ordre 2, 3 et 4 :



L'axe d'ordre 2 passe par les milieux de deux arêtes opposées.

L'axe d'ordre 3 passe par deux sommets opposés.

L'axe d'ordre 4 passe par les milieux de deux faces opposées.

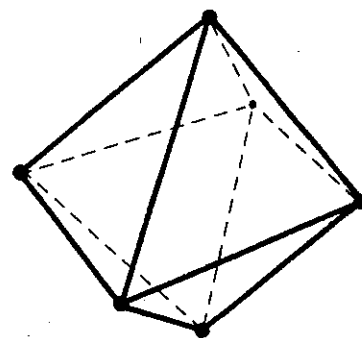
Les trois axes illustrés ci-dessus déterminent un trièdre dont le sommet (point de rencontre des trois axes) est au centre du cube. Chaque paire d'axes (deux droites concourantes) détermine un plan qui, dans le cas du cube, est un plan de symétrie (réflexion).

DES POLYÈDRES LIQUIDES

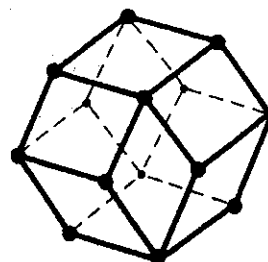
On peut matérialiser ce trièdre avec des miroirs (2) découpés et assemblés convenablement : on obtient alors un kaléidoscope tridimensionnel qui reproduit toutes les symétries du cube.

Si les joints entre les miroirs sont étanches (comme dans un aquarium), on peut verser de l'eau dans le kaléidoscope et l'incliner selon différentes positions :

- si l'axe de rotation d'ordre 4 est vertical, on verra le *cube* en eau, flottant dans l'espace...
- si l'axe de rotation d'ordre 3 est vertical, on verra l'*octaèdre* régulier (8 triangles équilatéraux) en eau, flottant dans l'espace...



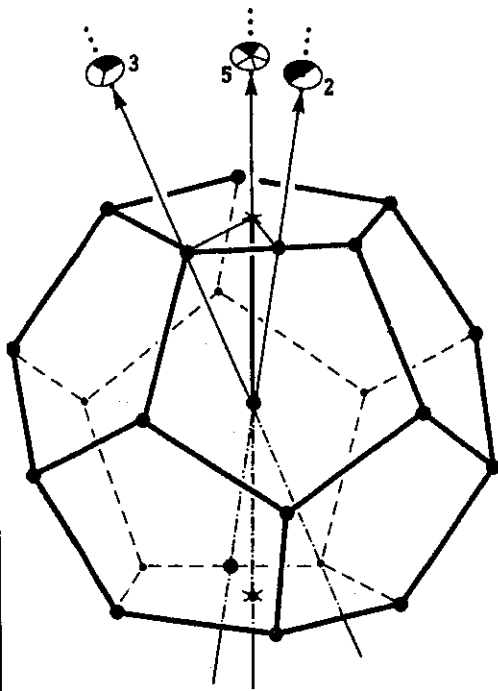
octaèdre



rhombidodécaèdre

CONSTRUCTION D'UN KALEIDOSCOPE TRIDIMENSIONNEL

Après avoir bu (!) ces polyèdres, on peut construire un autre kaléidoscope tridimensionnel encore plus fascinant, à partir des axes de rotation du dodécaèdre régulier (3) : d'ordre 2, d'ordre 3, et d'ordre 5 !



Le dodécaèdre régulier
avec trois de ses axes de symétrie,
respectivement d'ordre 2, 3 et 5.

Le sommet du trièdre est au centre du dodécaèdre et les plans engendrés par les paires d'axes sont encore des plans de symétrie (réflexion) du dodécaèdre.

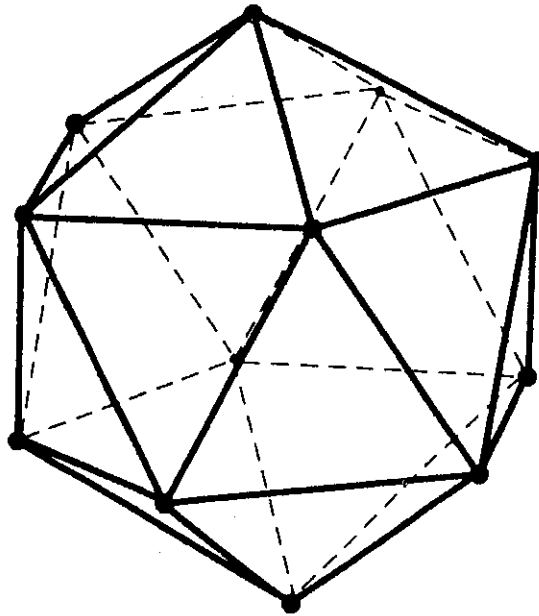
L'axe d'ordre 2 passe par les milieux de deux arêtes opposées.

L'axe d'ordre 3 passe par deux sommets opposés.

L'axe d'ordre 5 passe par les milieux de deux faces pentagonales opposées.

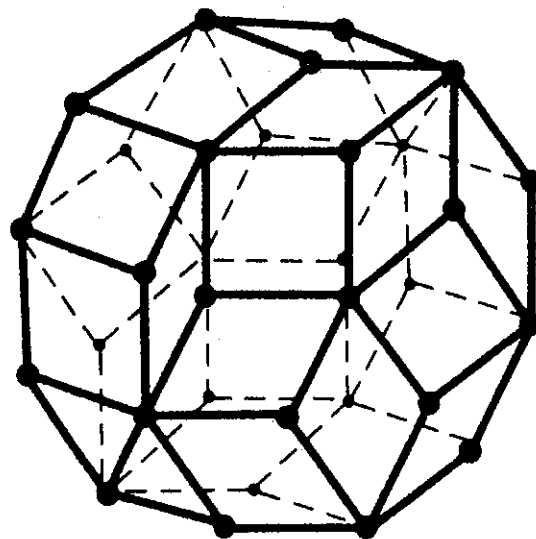
Si on matérialise le trièdre avec des miroirs et des joints étanches, on obtient un nouveau kaléidoscope tridimensionnel dans lequel on peut verser de l'eau et obtenir le dodécaèdre si l'axe 5 est vertical, l'icosaèdre (20 faces triangulaires régulières) si l'axe 3 est vertical, et le rhombitriacontaèdre si l'axe 2 est vertical.

axe d'ordre 3 vertical



icosaèdre

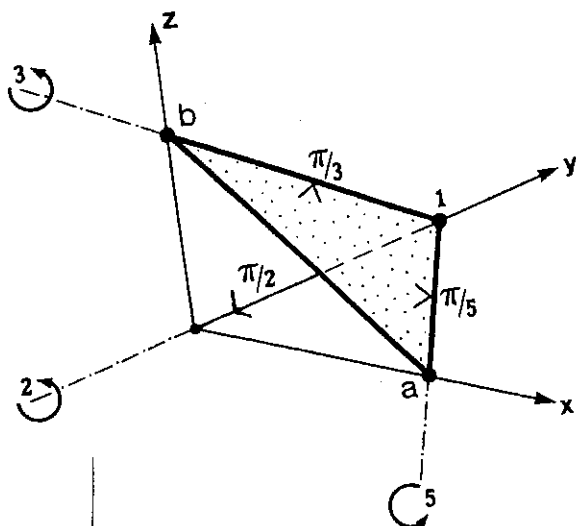
axe d'ordre 2 vertical



rhombitriacontaèdre (4)

La construction de ce kaléidoscope est délicate et demande une grande précision dans le découpage et l'assemblage des miroirs.

On peut placer ce trièdre dans un système de coordonnées cartésien pour faciliter le calcul et le dessin des faces triangulaires du kaléidoscope. En fait, les trois angles dièdres entre ces miroirs (pris deux à deux) déterminent entièrement le trièdre ; ces angles sont $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/5$.



Le point marqué 1 sur l'axe y indique l'unité de mesure le long des trois axes cartésiens et se trouve au centre du dodécaèdre régulier (sommets du kaléidoscope).

Les nombres a et b sur l'axe x et l'axe z se calculent facilement avec un peu de géométrie vectorielle et les notations habituelles :

Soit \vec{n} le vecteur normal à la face (miroir) contenant les axes de rotation d'ordre 3 et d'ordre 5.

$$\text{Alors } \vec{n} = [(0, 0, b) - (0, 1, 0)] \wedge [(a, 0, 0) - (0, 1, 0)] \\ = (b, ab, a) \quad (\text{produit vectoriel})$$

On peut rendre \vec{n} unitaire en posant

$$\vec{n} = \frac{(b, ab, a)}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2}}$$

En considérant les angles dièdres $\pi/3$ et $\pi/5$, et les vecteurs normaux aux faces-miroirs, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \frac{\pi}{3} \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{k} = \cos \frac{\pi}{5}$$

d'où

$$b = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2} \text{ et}$$

$$a = \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) \sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2} \quad (5)$$

$$\text{ce qui fait } \frac{b}{a} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{5} \right)}$$

$$\text{et donc } b = a \frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{5} \right)}$$

on substitue cette valeur de b dans

l'expression (5), et on élève au carré ; cela donne

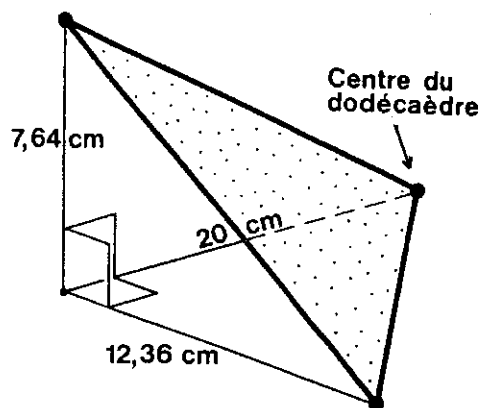
$$a^2 = \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) a^2 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) a^2 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) a^4$$

$$a^2 = \frac{1 - (\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{5})}{\cos^2 \frac{\pi}{3}}$$

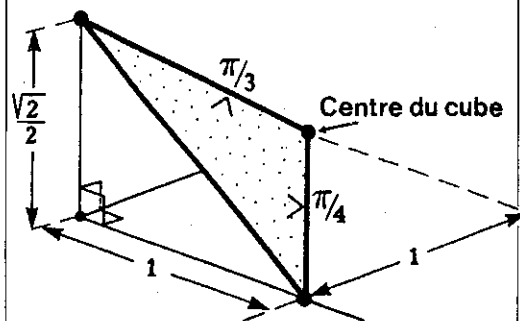
Après calcul, on obtient :

$$a \approx 0,618 \quad b \approx 0,382$$

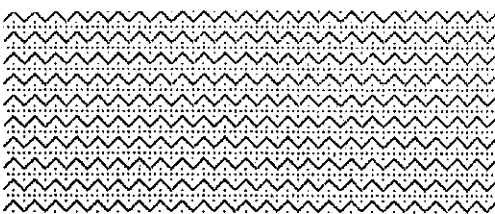
Par exemple, si l'unité de mesure est de 20 cm, le kaléidoscope sera construit à partir des données suivantes :



On peut aussi décrire dans les mêmes termes le kaléidoscope basé sur les symétries du cube ; on obtient le trièdre suivant :



Il ne reste plus qu'à construire et à... jouer ! Essayez toutes sortes d'objets dans vos kaléidoscopes tridimensionnels : billes, bandes élastiques, votre nom sur un bout de papier, etc.



- (1) Extrait du bulletin de l'AMQ (Mai 85)
- (2) Il existe sur le marché des miroirs sécuritaires en plastique ou aluminium, qui se découpent très bien.
- (3) Douze (12) faces pentagonales régulières.
- (4) On peut facilement construire ces polyèdres en carton avec le matériel «polyèdres» du Plot.

PAVAGES ET POLYGONES

Hélène CORTHÉSY - Vevey

Nos amis vaudois travaillent depuis plusieurs années autour de ce qu'ils appellent :

«technique des situations».

Une situation de recherche ouverte est proposée aux élèves sur plusieurs périodes.

Un observateur... observe et un compte-rendu est publié par le Centre vaudois pour l'enseignement mathématique (Av. de cour, 33-1007 Lausanne).

RAPPORT D'EXPÉRIENCE

— Thème de la situation :
Pavages du plan au moyen de polygones.

— indications générales :

La Tour-de-Peilz :

7^e année, 22 élèves.

Une leçon de 2 périodes (24 mars)

+ une période de mise au propre.

Maître : C-E Corthésy

(en collaboration avec H. Corthésy).

Observateur : A. Nguyen Quac Vinh.

Nyon :

7^e, 20 élèves.

Une leçon de 2 périodes (28 mai)

+ mise au propre à la maison.

Maître : A. Nguyen Quac Vinh.

Observateur : H. Corthésy.

RÉALISATION

— Matériel :

Feuilles à motifs pointés, à carreaux, triangulaires, hexagonaux...

Rétroprojecteur.

Tableau de M.C. Escher.

— Points de départ et relances :

a) Trouvez un polygone, convexe ou non, permettant de paver le plan. Le nombre de côtés n'a pas d'importance.

— Faites des essais sur cette feuille (il s'agit d'une feuille présentant les points a et b) ou une feuille de votre choix.

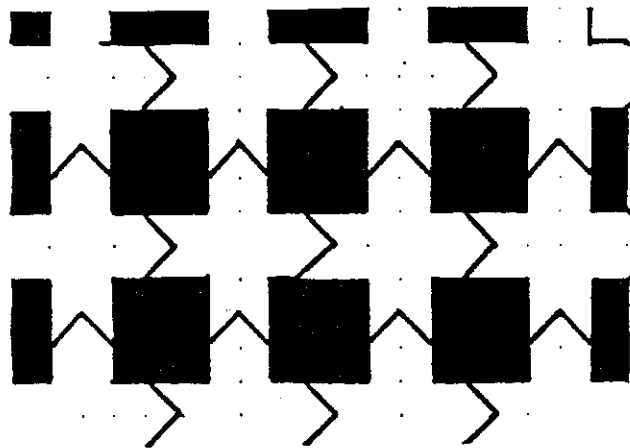
b) Questions à choix prévues comme relances pour des élèves qui n'auraient plus d'idées en fin de période.

— Cherche une autre façon de paver le plan avec le même polygone.

— Utilise le même pavage que la première fois, en le modifiant, pour le rendre plus intéressant, plus décoratif.

— Choisis un second polygone tel que tu puisses l'utiliser avec le premier pour donner un autre pavage sans trou.

ça marche avec 2 formes



Philippe

Nyon :

Vous avez en esprit le pavage de la cour. Sauriez-vous paver la cour d'une autre manière ?

DÉROULEMENT DE LA RECHERCHE

La Tour-de-Peilz :

Pascal H :

«Je suis parti d'un carré, j'ai déformé un côté et j'ai fait la même chose de l'autre côté, mais à l'envers ».

Chahrazed :

«Nous avons eu l'idée de prendre un petit motif (ici le L) pour en faire plus tard un grand motif (grand L)».

Catherine et Stéphanie :

«Nous avons essayé de partir d'un trapèze et d'obtenir la même forme en plus grand».

«Peut-on utiliser des courbes ?».

«Que fait-on au bord ?».

Nyon :

La recherche fut orientée, pour plusieurs élèves, vers une cour ayant déjà une forme bien précise (places rondes ou rectangulaires).

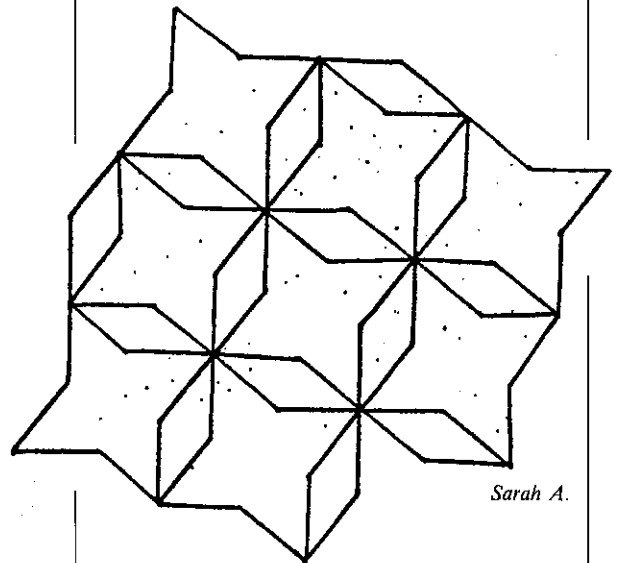
«Peut-on mettre des pavés différents ?».

«Comment paver un carré avec des rectangles 3 sur 4 ?».

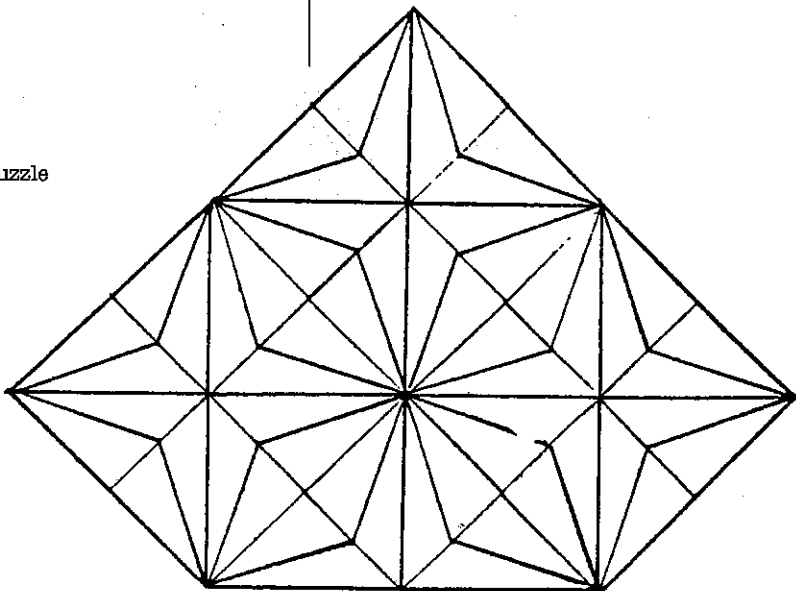
On chercha des pavés qui s'emboîtent, soit en étant tous dans le même sens, soit en étant tournés tête-bêche, soit en utilisant des courbes.

Il y a eu des tentatives de paver l'espace.

On composa des puzzles à motifs répétitifs.



Sarah A.



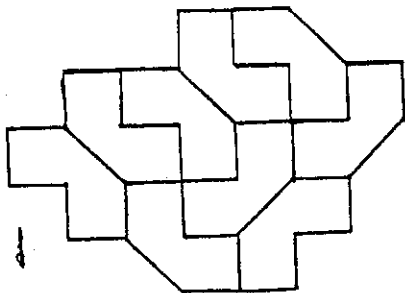
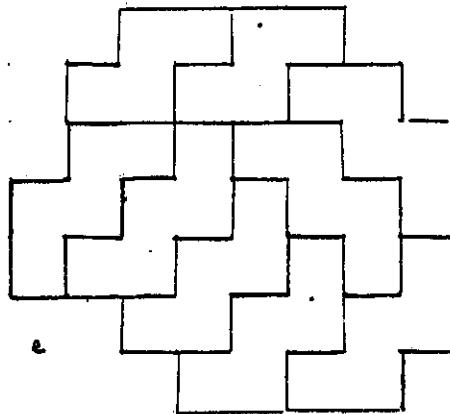
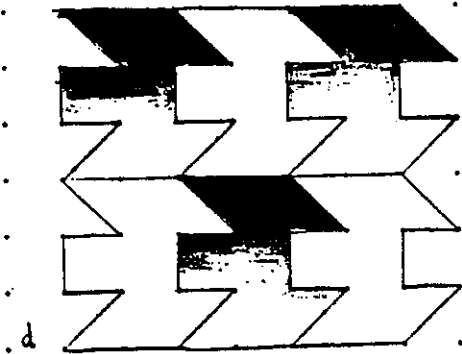
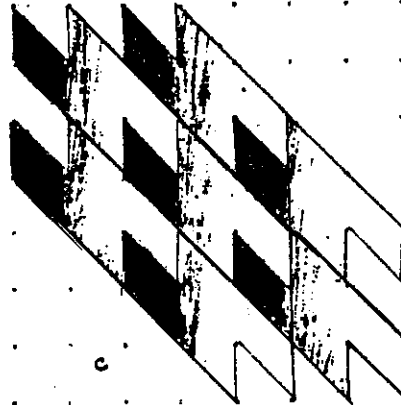
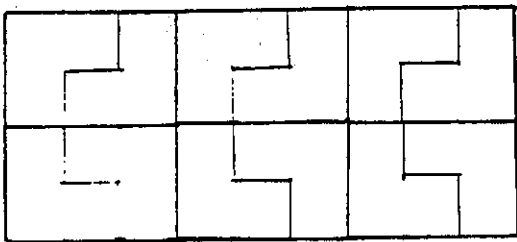
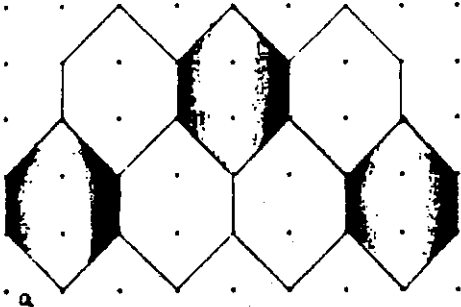
Sarah B.

A **La Tour-de-Peilz**, après la pause, les maîtres proposèrent une mise en commun, mais celle-ci n'aboutit pas. Les élèves étaient trop préoccupés par leur propre problème.

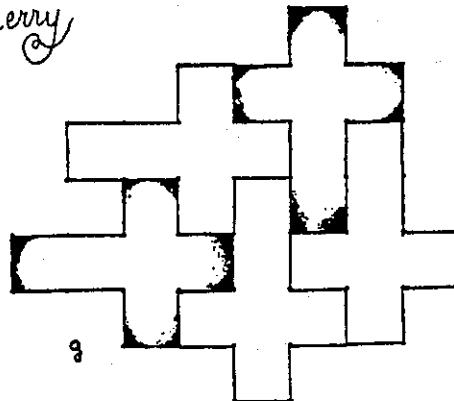
A **Nyon**, l'intérêt était trop émoussé chez certains, mais après la pause, la projection des **Oiseaux d'Escher** relança la recherche vers les pavés ayant un motif humain ou animalier.

DES IDÉES PARACHEVÉES

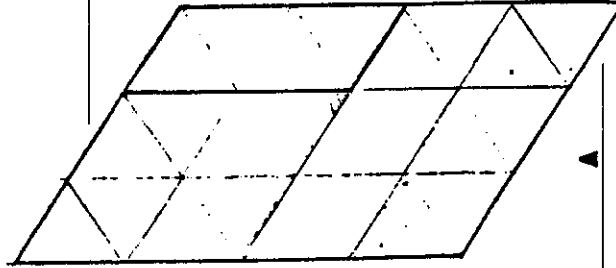
1. Pavages avec des formes juxtaposées ou emboîtées.



Cherry



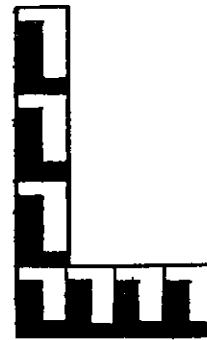
On peut remplir toute la feuille avec ces formes car on peut les retourner de tous les côtés.



Forme 6

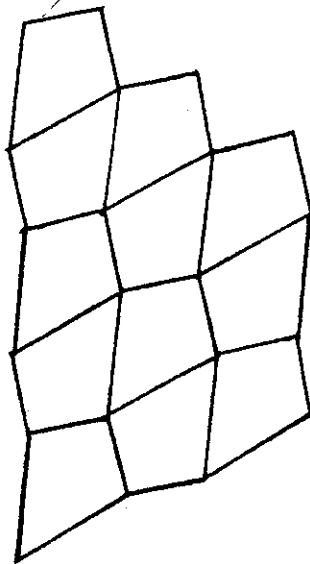
Partant d'un parallélogramme, nous l'avons représenté en plus grand.

DS-CC



J'ai commencé par faire une lettre, puis j'ai essayé de la remplir avec elle-même.

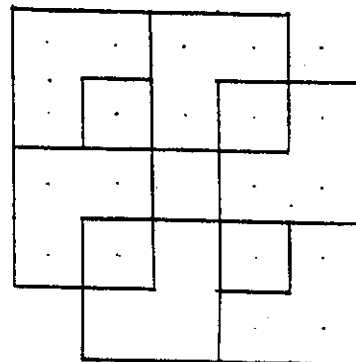
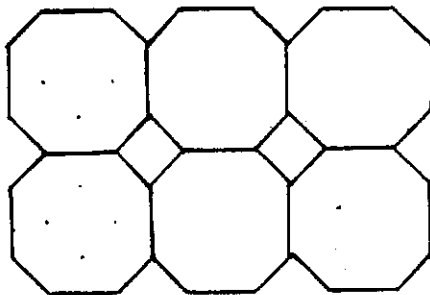
Viviane D.



Nous avons pris la base d'un cerf volant, nous les avons mis côte à côte, puis la rangée du dessous, nous lui avons fait faire un demi-tour. Le résultat donne une impression ondulée.

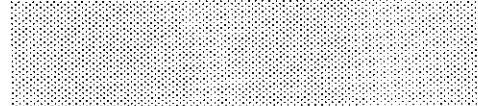
Catherine B.

avec 2 figures.



Martine

2. Pavages issus d'une déformation de pavages.



Je suis parti du carré.

Pascal



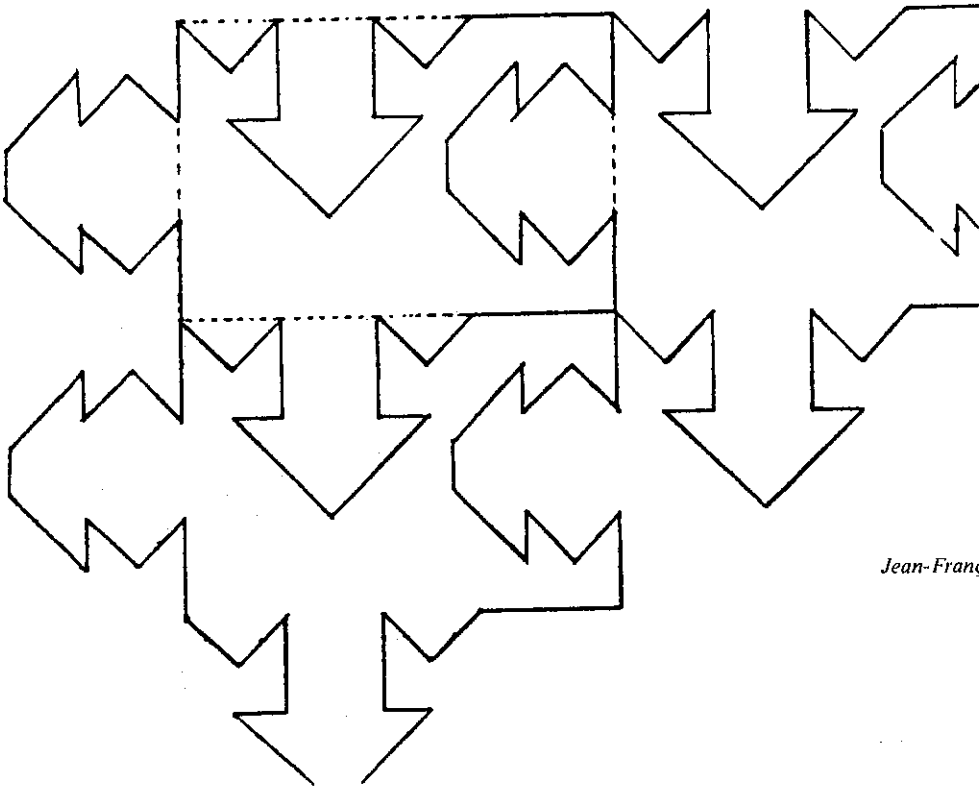
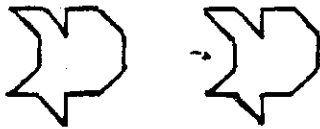
j'ai déformé un côté



et j'ai fait la même chose de l'autre côté mais à l'envers



pour les 2 autres côtés la même chose.

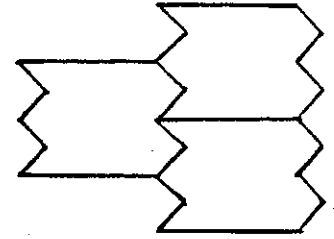
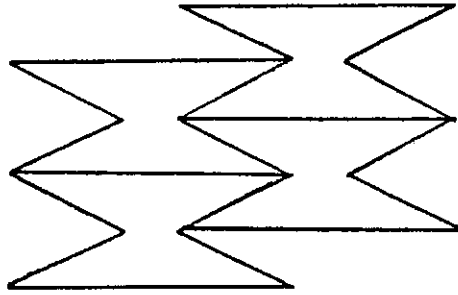


Jean-François

La théorie dit que si on rentre une forme, il faut sortir la même forme du côté opposé. Pour cette forme je suis parti du rectangle.

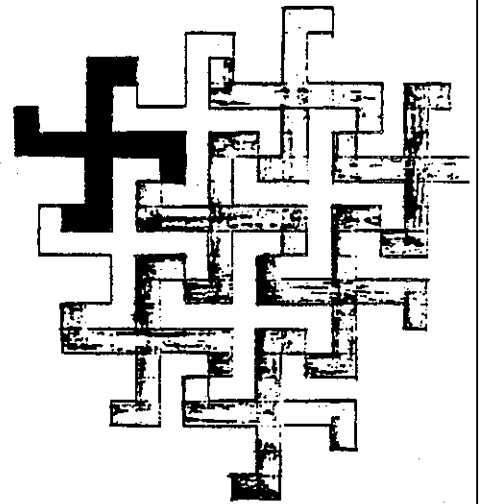
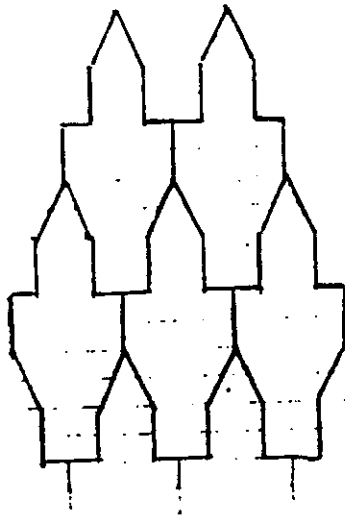
David

d'après un rectangle



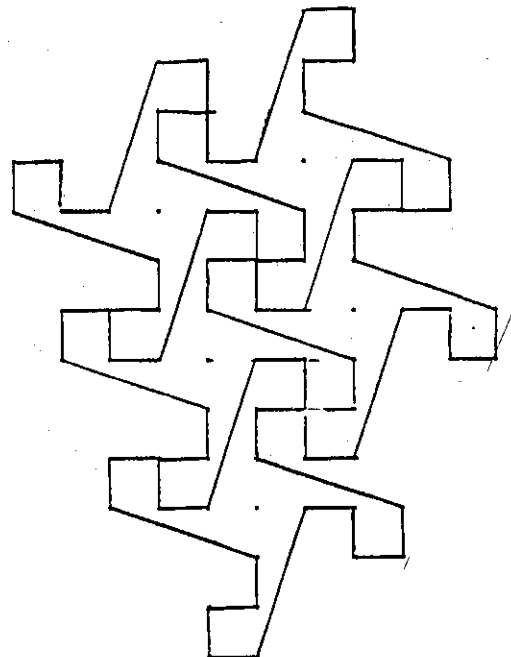
J'ai commencé par faire une croix toute simple, puis j'ai cherché plus dur, alors j'ai la croix gammée. ▶▶

d'après un losange

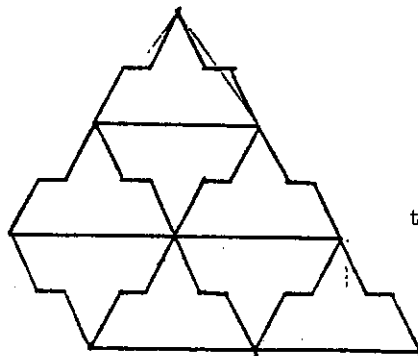


Viviane D. et Catherine B.

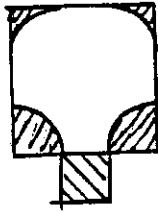
Je suis parti de la croix gammée en déformant la forme pour que chaque trait corresponde à un autre. ▶▶



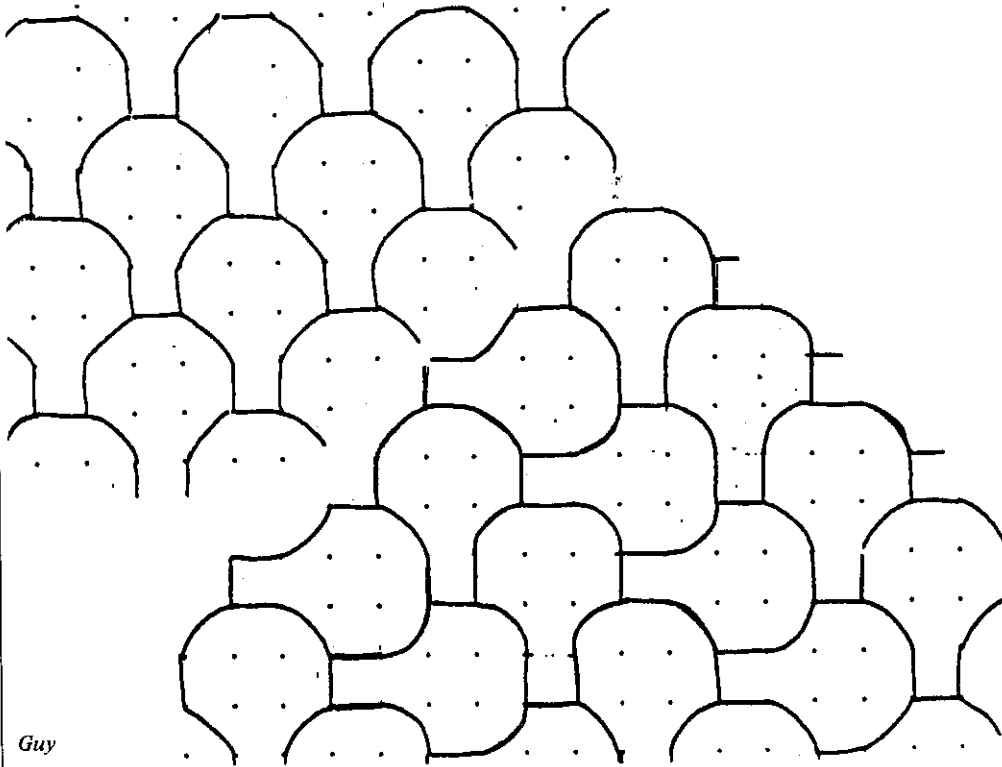
triangle



Je suis parti d'une pointe.



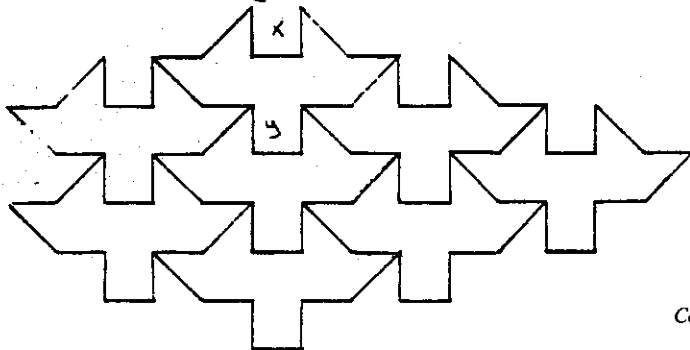
Ça fonctionne car d'abord j'ai commencé par un carré simple, puis j'ai tracé un arc de cercle de deux côtés puis tout ce qui est achuré je l'ai mis en bas et après j'ai essayé d'emboîter et ça fonctionne.



Guy

Bizarre: parce que normalement il faudrait ajouter deux carrés, mais j'en ai ajouté un.

x sera comblé par y

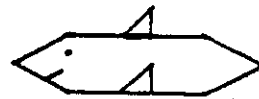
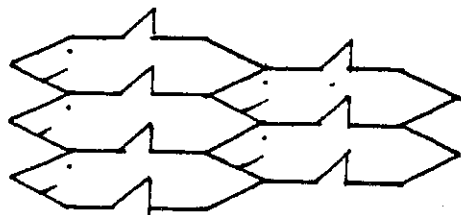


Corine

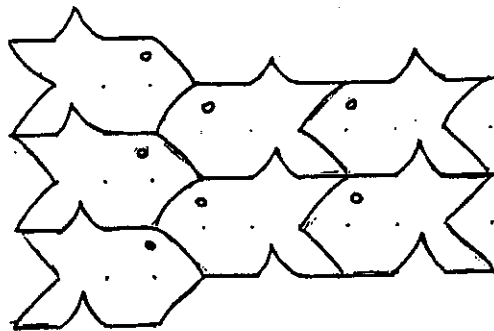
Ce sont les mêmes formes qui se répètent et qui s'emboîtent les unes dans les autres.

1^{er} pavage : j'ai d'abord essayé avec cette forme. Cette forme m'a donné l'arrière et l'avant. Ensuite, j'ai mis 2 petits triangles.

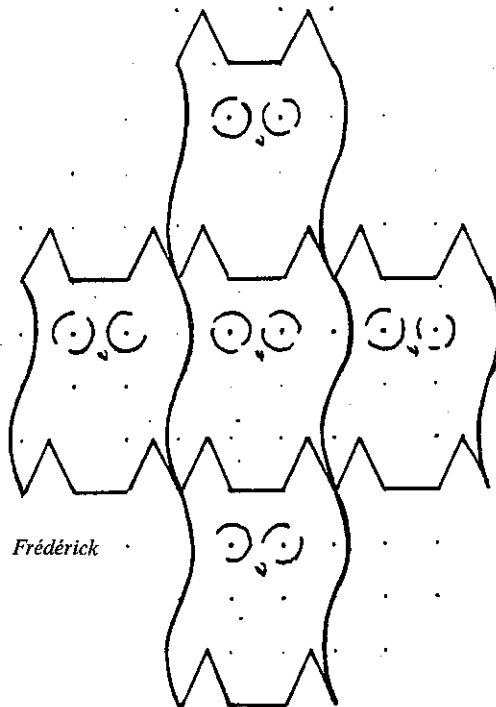
3. Animaux et personnages.



Philippe M.

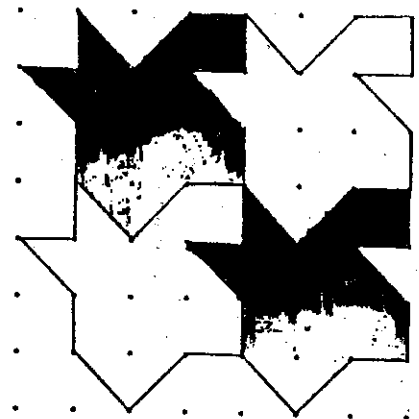


Pierre



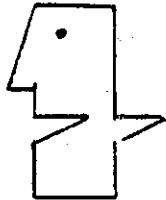
Frédéric

Thierry

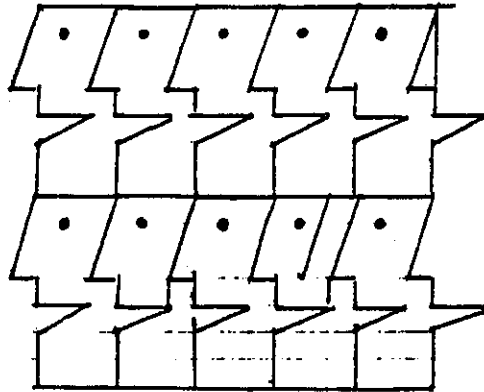




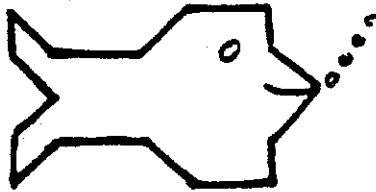
Je suis parti du rectangle



Je lui ai rajouté des triangles

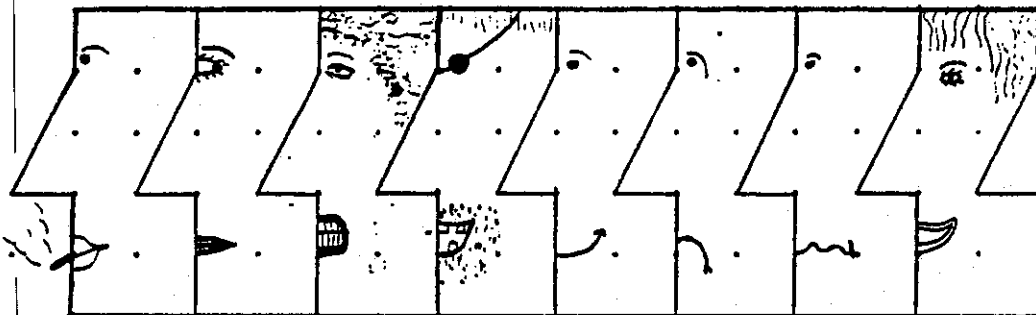


Philippe M.

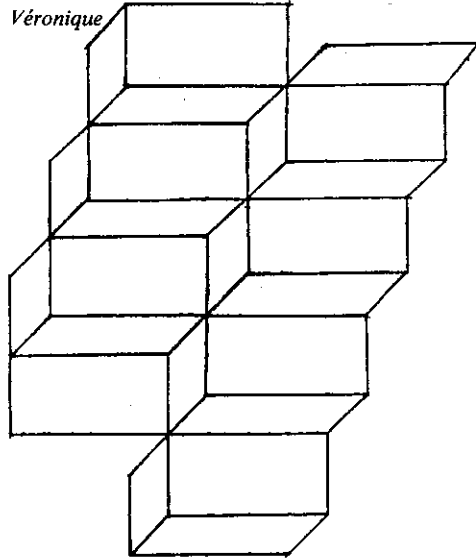


Pascal H.

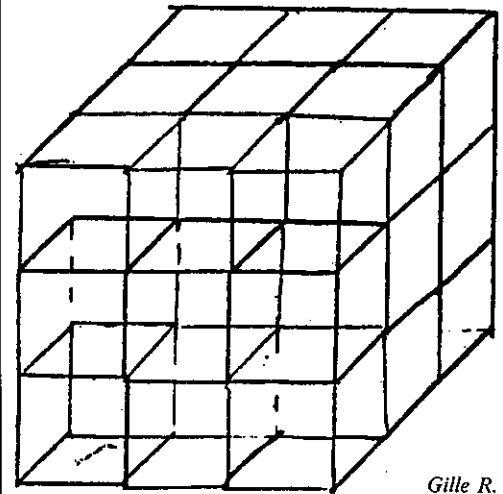
J'ai voulu faire un poisson et en le tournant
ça a donné un robot.



4. Relief et espace.

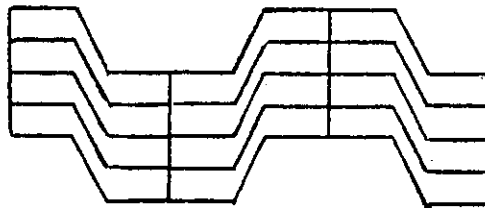


C'est une sorte de perspective.

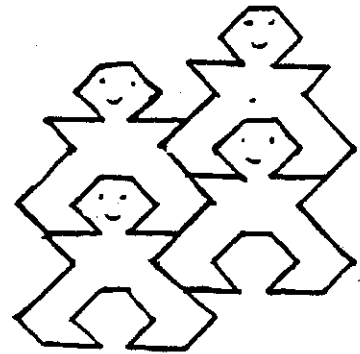


Gille R.

J'ai pris une forme qui m'est passé par la tête, puis je l'ai un peu transformé. Cette forme là donne aussi une impression convexe et concave.

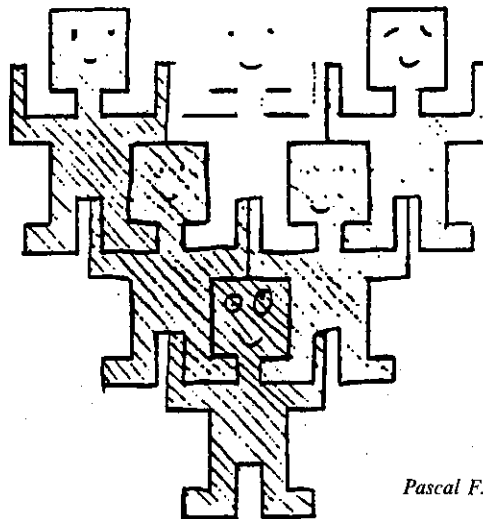


Viviane D. et Catherine D.



J'ai commencé avec un losange que j'ai creusé en bas et rajouter la tête et les bras.

J'ai commencé par la tête qui devait s'emboîter entre les bras et le pied et des demis bras entre les pieds, et les pieds entre la tête et le bras, et ça s'emboîte.



Pascal F.

REMARQUES

- On peut se demander ce qui se serait passé si les élèves n'avaient reçu que des feuilles... blanches !
- Un groupe de filles a relevé une symétrie centrale. Toutefois, les déplacements du plan n'ont pas été exploités.
- Ce travail de recherche convient bien aux élèves de 7^e année. Un essai avec des élèves de 8^e année, mieux préparés techniquement, ne fut guère productif. Peut-être peut-on le proposer à des élèves de 6^e année.

NOTE DE LA RÉDACTION :

Toutes les feuilles à pavages utilisées ici, et bien d'autres (dessins d'Escher, de Vasarely...) se trouvent dans le «Matériel PLOT» : PAVAGES ET COLORIAGES.

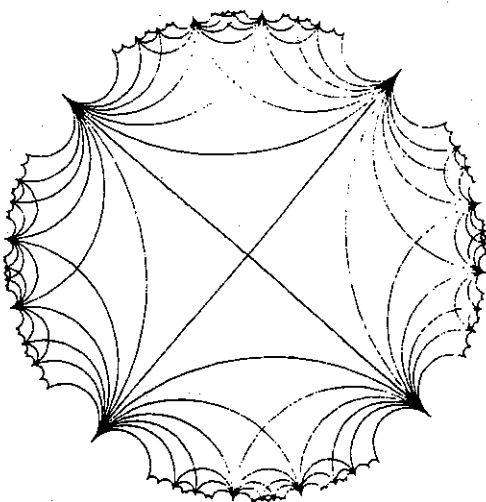
PAVAGES HYPERBOLIQUES

Gilles DARCHE - Paris

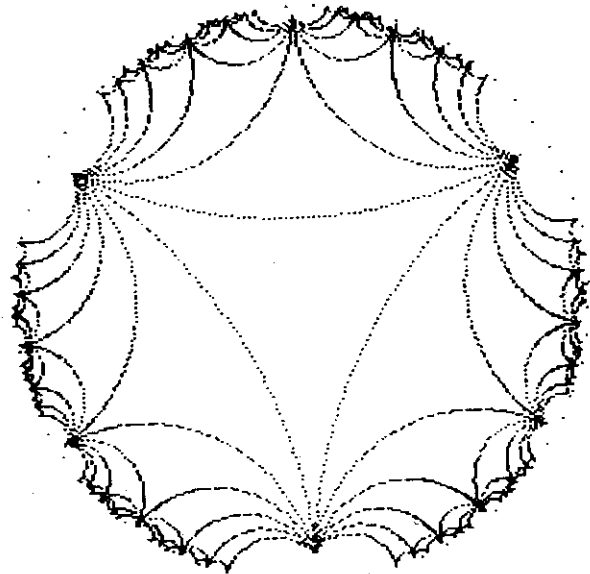
17 groupes de pavages pour le plan euclidien, une infinité pour le plan hyperbolique.

En voici la genèse, adaptée d'après l'article Ray Hemmings in Mathematics Teaching de juin 85.

Un des problèmes rencontrés dans la compréhension de la géométrie non-euclidienne réside dans la difficulté de produire et de lire des dessins illustrant ce dont on parle. Il semble qu'un ordinateur travaillant sur le modèle de Poincaré de la géométrie de Lobachevsky offre une façon acceptable de contourner ce problème. La figure ci-dessous est un des produits de cette collaboration : elle montre un pavage de triangles équilatéraux —côtés égaux, angles égaux bien qu'elle n'y paraisse pas, du moins si vous n'avez pas encore appris à lire ce genre de figures.



Le modèle de Poincaré réduit l'ensemble d'un plan infini dans l'espace à un disque. De ce point de vue il ressemble à l'un de ces miroirs convexes que les supermarchés ou les libraires installent parfois pour surveiller les vols à l'étalage.



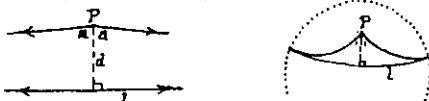
Avec un tel miroir, il est possible de voir une grande partie du magasin : mais bien sûr il y a beaucoup de distorsion, les étagères sont courbées, des parties de la scène deviennent très petites, et l'observateur doit apprendre à compenser ces défauts.

Donc, pour voir les triangles équilatéraux sur le dessin, vous devez voir les lignes courbes comme rectilignes, car dans le modèle de Poincaré les droites sont représentées par des arcs de cercles —cercles qui, dessinés entièrement, couperaient la frontière selon des angles droits puis disparaîtraient (en dehors de la frontière il n'y a rien, sinon Dieu, car l'ordinateur peut utiliser cet extérieur, pour «placer» les centres des cercles représentant les droites, par exemple). Et si vous voulez mesurer les distances dans ce modèle, vous devez vous équiper d'une règle qui rétrécit quand vous la rapprochez de la frontière.

Lobachevsky s'écarta de la géométrie euclidienne usuelle pour définir les parallèles : ceci est résumé dans la «boîte à parallèles» ci-après, la représentation par le modèle de Poincaré y est également montrée. (Approximativement, on peut dire que les parallèles, «se rencontrent à l'infini» et que, dans le modèle, les points sur la frontière sont «à l'infini». Il est donc raisonnable que des parallèles apparaissent comme des arcs qui se rencontrent sur la frontière).

DROITES PARALLÈLES

*Par P passent deux parallèles à L.

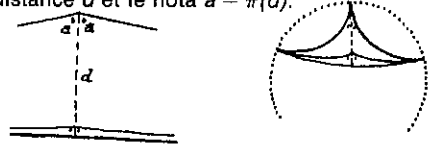


*Par P passent d'autres droites ne rencontrant pas L.



Lobachevsky définit «l'angle de parallélisme» comme la moitié de l'angle entre les 2 parallèles.

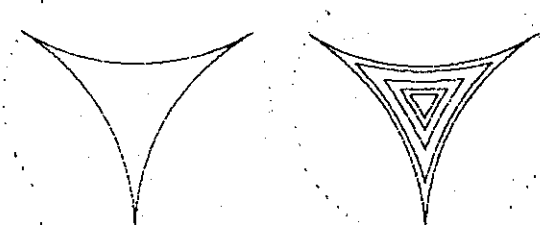
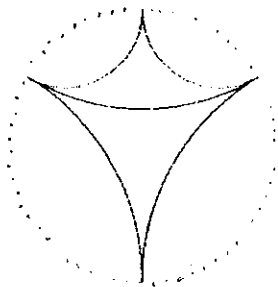
Il montra que cet angle est fonction de la distance d et le nota $a = \pi(d)$.



*Quand d diminue, a augmente (jusqu'à 90°).
*Quand d augmente, a diminue (jusqu'à 0°).

Sur le dessin de l'ordinateur, le grand triangle du centre (qui semble le plus parallèle de tous) a ses sommets sur la frontière et ainsi ses trois côtés sont parallèles et chacun de ses angles est nul!

Ci-dessous, une série de triangles équilatéraux concentriques et d'angles nuls.



Vous voyez que, lorsqu'ils diminuent, leurs angles sont plus proches des 60° attendus. Dans la géométrie de Lobachevsky, la somme des angles d'un triangle dépend de sa taille, mais est toujours inférieure à 180° (d'une quantité appelée le défaut du triangle).

Réflexions.

Ayant dessiné un polygone central, l'ordinateur le réfléchit sur l'un de ses côtés.

Puisque le miroir est courbe, vous ne serez pas surpris de trouver une distorsion apparente.

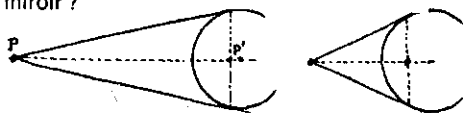
L'image a aussi chacun de ses sommets sur la frontière, ses angles sont donc aussi nuls.

(En fait vous pouvez voir que ceci est vrai pour tout triangle sur les dessins d'ordinateurs de la page suivante).

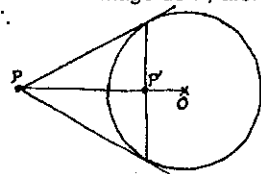
Vous pouvez donc accepter que ces figures sont similaires, mais il est plus difficile de croire qu'elles sont réellement de même aire, et il est encore plus difficile d'admettre que dans la géométrie lobachevskienne, des triangles similaires sont nécessairement **superposables**. Peut-être cela vous semblerait-il plus clair si vous le liez à la remarque précédente, disant que le défaut d'un triangle (qui est lié à ses angles) dépend de sa taille (liée à ses côtés).

RÉFLEXIONS

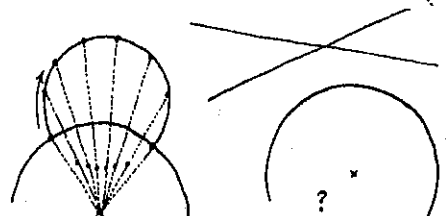
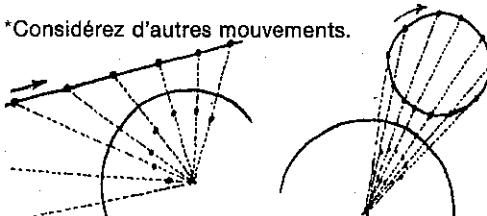
*Pour trouver l'image P' du point P , Poincaré utilisait la construction indiquée par ce diagramme : (Le miroir est le cercle de centre O). Techniquement, P et P' sont des points inverses. Il s'ensuit que $OP \cdot OP' = R^2$ (qui est l'équation sur laquelle travaille l'ordinateur).
*Qu'arrive-t-il à P' lorsque P s'approche du miroir ?



*Remarquez que si P' est l'image de P , alors P est l'image de P' .



*Considérez d'autres mouvements.

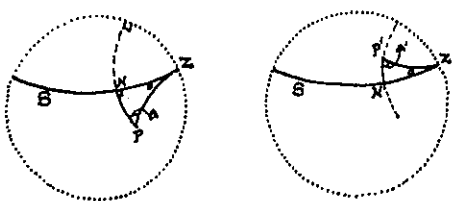


*Quelle peut-être l'image d'une droite, l'image d'un cercle, suivant les différents cas de figure ?

Ces énoncés plutôt étranges deviendront un peu plus raisonnables si vous pouvez comprendre le procédé utilisé pour réfléchir des lignes courbes. Les suggestions de la «boîte à réflexions» peuvent vous y aider :

Les deux derniers résultats de cette boîte permettent de montrer que les distances sont invariables par réflexion — une preuve de ceci est schématisée ci-dessous.

PAR RÉFLEXION UNE DISTANCE EST INVARIANTE



PZ parallèle à S. L'angle en Z est nul.
 l'angle en Z est nul. PZ est parallèle à S.

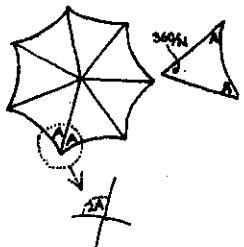
PN perpendiculaire à S PN perpendiculaire à S
 Les angles a et a' sont les angles de parallélisme en P, P' :

$$a = \pi(PN) \text{ et } a' = \pi(PN)$$

$$a = a' \text{ (par réflexion) donc } PN = PN.$$

Tout polygone est généré par itération de réflexion... de réflexion de la figure centrale. Et comme les angles et les distances sont conservés par ce procédé, ce que nous avons, contrairement aux apparences, est un pavage par des polygones équilatéraux superposables (au sens hyperbolique !).

PAVAGE PAR DES POLYGONES RÉGULIERS A N COTÉS



$$360/N + A + A < 180$$

$$2A < ((N-2)/N) \cdot 180$$

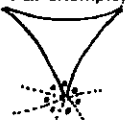
Pour assembler ces n-gones, avec, disons, n d'entre eux à chaque coin, il faut :

$$n \cdot (2A) = 360$$

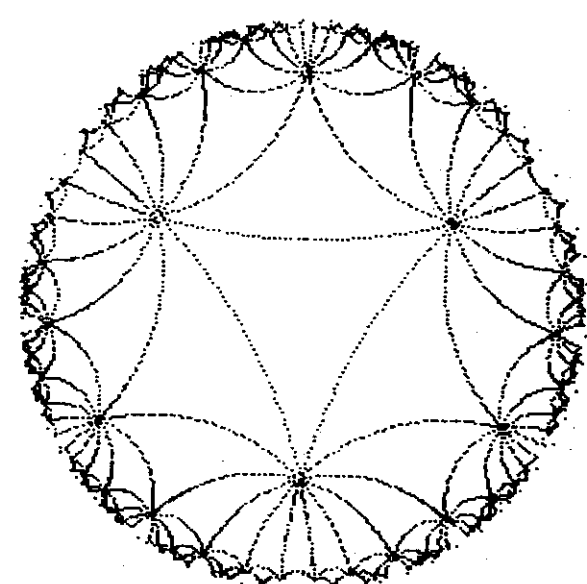
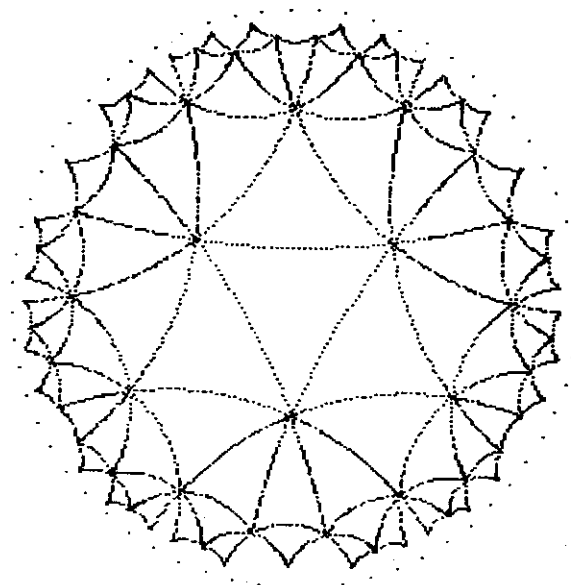
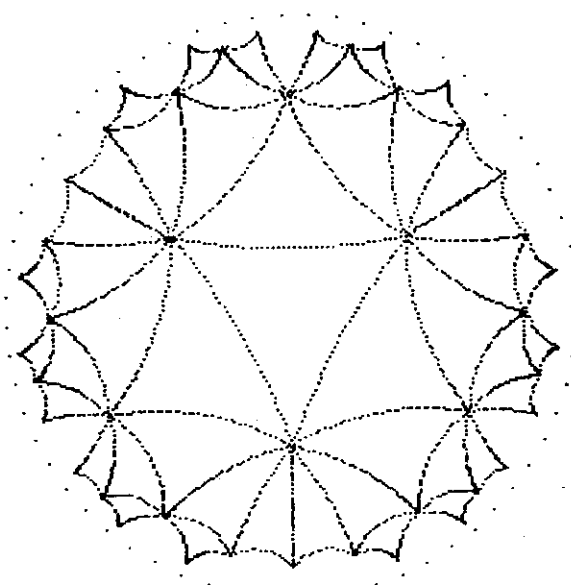
$$\text{donc : } n \cdot ((N-2)/N) \cdot 180 > 360$$

$$\text{d'où : } n > 2N/(N-2)$$

Par exemple, si N = 3.



n > 6 soit : n = 7 ou 8 ou 9 ou...
 Ainsi, nous pourrions paver avec des triangles équilatéraux, en mettant 7 triangles ensemble à chaque coin, ou 8, ou 9...



Encore des pavages.

Il apparaît qu'il y a bien plus de possibilités de pavage dans cette géométrie que dans la géométrie euclidienne usuelle. Nous ne sommes pas limités par les angles de ces polygones réguliers qui ne compléteront pas les 360° nécessaires à chaque coin car nous avons la liberté de décider de ce que sera la somme des angles d'un triangle pour rendre les angles de polygones réguliers plus ou moins ce que nous la voulons.

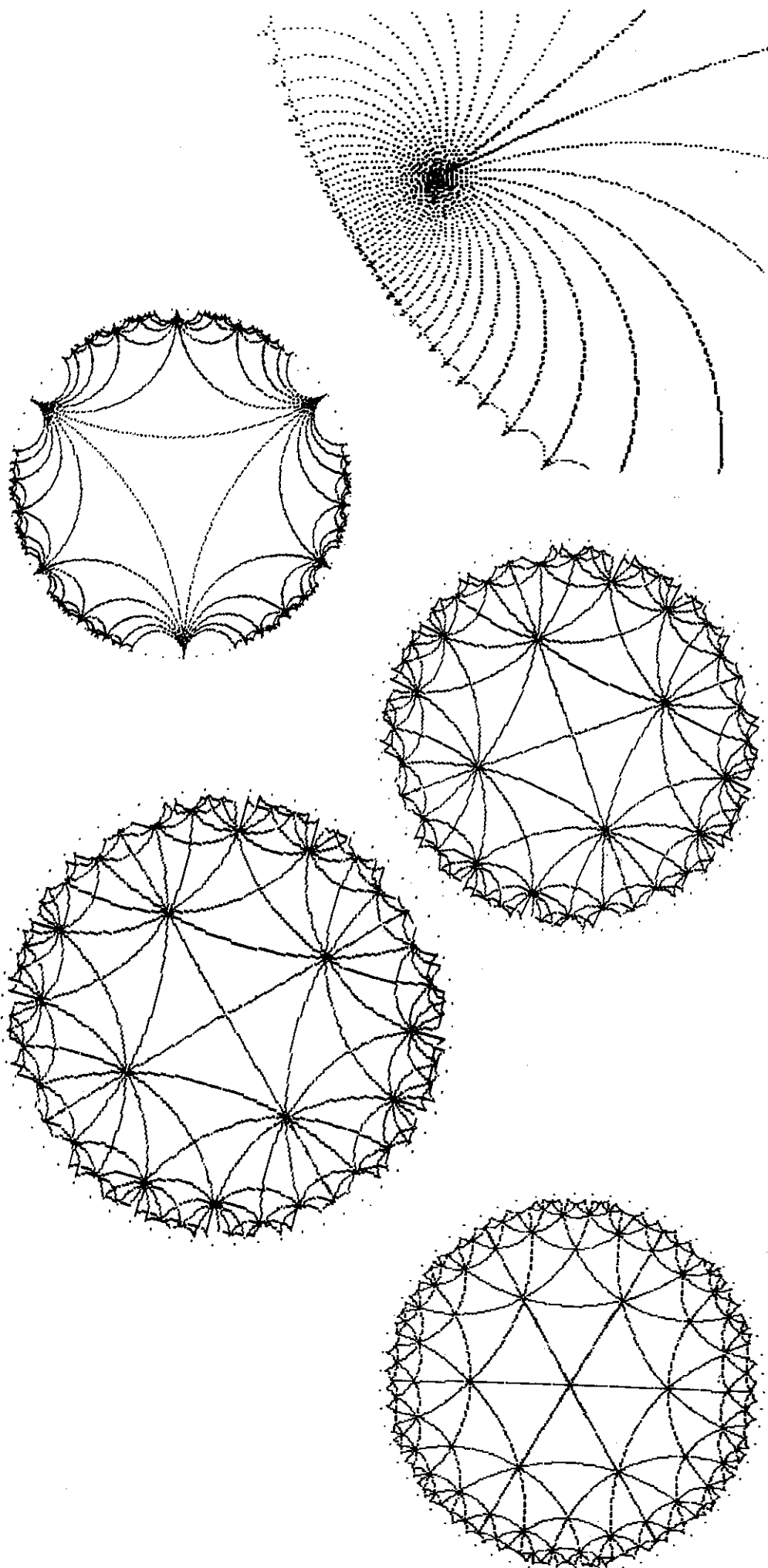
Quelques-unes des très nombreuses façons de paver par des polygones équilatéraux sont montrées ci-contre.

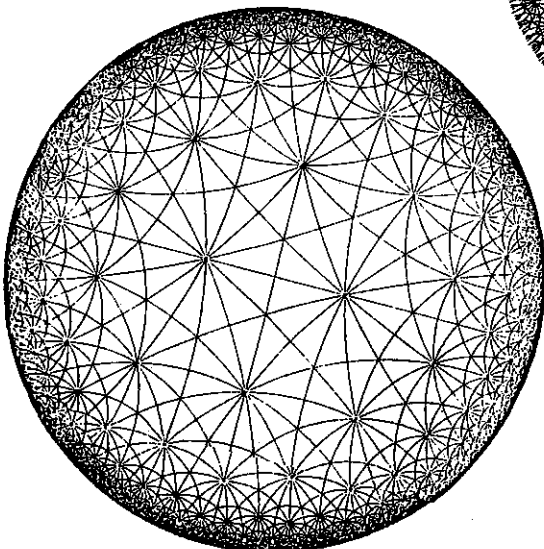
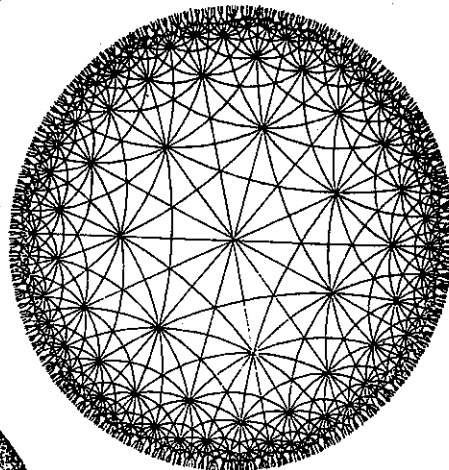
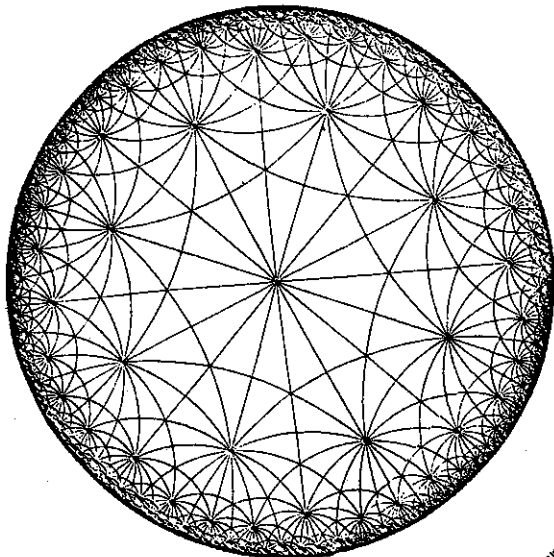
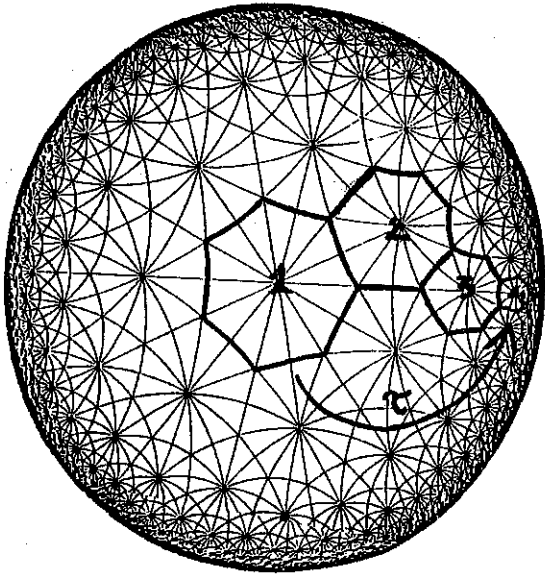
Remarquez que le polygone initial devient de plus en plus grand lorsque vous augmentez le nombre de polygones se rencontrant à chaque sommet.

En effet en faisant ceci, il faut augmenter leur défaut — et donc augmenter leur taille ! Si n est pris très grand (disons $n = 50$), le résultat ci-dessous n'est pas très différent du pavage duquel nous sommes partis.

18 Mais les autres sommets sont alors tout près du cercle frontière, et en prenant le niveau de récursion plus élevé (en fait 50 dans le dessin du bas) et en agrandissant l'aire autour de B, il est possible de voir les 50 triangles qui entourent ce sommet.

Le même procédé peut être utilisé pour paver avec n'importe quel polygone selon d'innombrables façons. Deux exemples sont donnés dans la colonne suivante.





Les pavages d'ESCHER

Le dernier de ceux-ci a un intérêt particulier car il a été utilisé par Escher dans une remarquable série de peintures. L'une de celles-ci est reproduite sur la page suivante, et si vous prenez le tracé du dessin de l'ordinateur, vous pourrez apprécier la précision de la construction d'Escher.

Une grande partie de l'œuvre d'Escher est une exploration de l'infini et, dans sa série de peintures, il utilise clairement le modèle de Poincaré de la géométrie lobachevskienne (qui lui a été enseignée par Coxeter) pour représenter l'infini à l'intérieur de limites finies, une condensation de l'univers dans une feuille de verre. Elle a aussi la même auto-similarité sans fin (l'infini interne) des fractales.

Dans la peinture d'Escher il apparaît que le voisinage de tout point est identique (superposable), si la discussion ci-dessus a été convaincante) à celui de toute autre point correspondant.

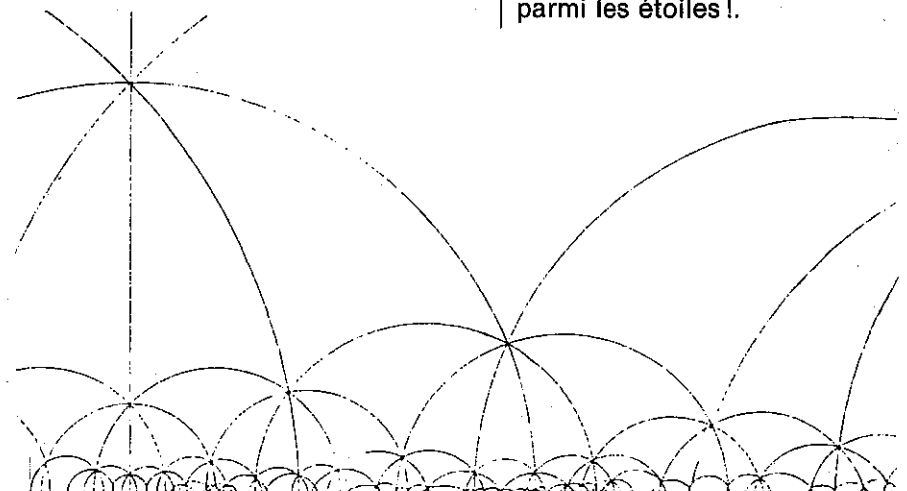
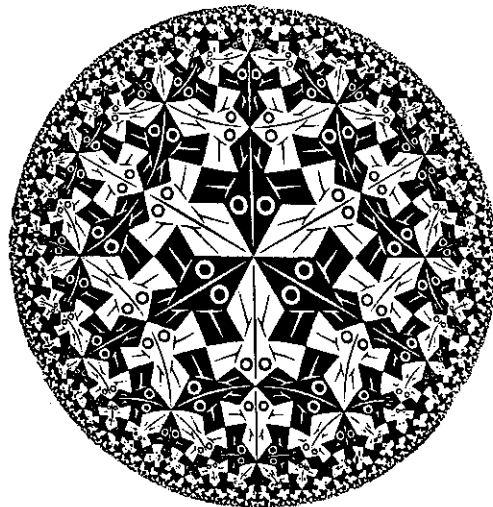
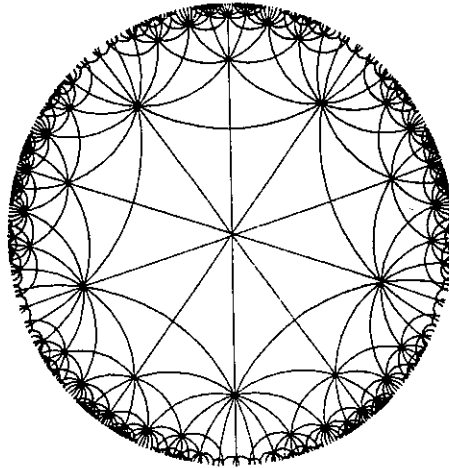
Le modèle de Poincaré apparaît isoler un point comme centre de l'univers de Lobachevsky. Mais ce n'est qu'une simple illusion relativiste : en lisant ces figures sur ce modèle vous devez les habiller pour pouvoir réaliser que tout point à l'intérieur des limites — même un qui, à l'œil nu et ignorant, paraît à 1 mm de ces limites — est réellement à une distance infinie du bord et pourrait être le centre du cercle si vous choisissez un autre point de vue.

En fait l'ordinateur peut fournir ces motifs — le dessin sur la droite, en haut, est le même pavage que celui de gauche mais avec le centre de la frontière de Poincaré déplacé en un point près du bord du haut.

RÉFLEXIONS

Des schémas comme ceux de la première page peuvent être utilisés pour trouver les propriétés suivantes :

- la réflexion d'une droite passant par le centre du miroir circulaire est la ligne elle-même.
- la réflexion de n'importe quelle autre droite est un cercle (passant par le centre du miroir).
- la réflexion d'un cercle est généralement un autre cercle, mais peut-être soi-même ou une droite.
- la réflexion du miroir est le miroir lui-même (point à point).
- la réflexion d'un cercle orthogonal au miroir est le cercle lui-même (mais pas point à point).
- l'angle entre deux courbes est égal à l'angle entre leurs deux réflexions.



La réalité de Lobachevsky.

Le modèle de Poincaré est seulement un modèle : ce n'est pas la réalité.

Mais qu'est-ce qui est réel ?

Lobachevsky a développé sa géométrie à partir d'axiomes établis pour les droites et les points, les parallèles et ainsi de suite. Mais bien sûr il ne pouvait pas dire ce qu'un point ou une droite étaient réellement.

Ainsi, ne peut-on pas dire qu'un système opérant avec des éléments qui satisfont les axiomes de Lobachevsky est —réellement— une géométrie de Lobachevsky ?

D'un autre côté, il existe une vision générale de la réalité (même si elle est définie de manière vague) et 500 unités sur un écran d'ordinateur censé être infini ne sont qu'une petite partie de cette vision.

Lobachevsky lui-même spéculait sur la possibilité que cette géométrie puisse décrire l'univers réel : les différences entre cette géométrie et celle d'Euclide ne deviennent discernables qu'à de grandes distances.

Par exemple, un triangle rectangle dont les côtés les plus petits seraient égaux aux distances de la Terre au Soleil et de la Terre à l'étoile Sirius aurait un défaut de moins de $1,8 \text{ fois } 10^{-7}$ radians. Si ce genre de considérations se tourne vers ce que la géométrie lobachevskienne décrit réellement alors sûrement le modèle de Poincaré n'y correspond pas.

Néanmoins, le modèle n'est plus compréhensible dans ce sens que les régions de l'espace après Sirius ne sont pas atteignables.

Il est alors possible de faire un saut imaginaire, de telle sorte que, quand quelque chose est compris en relation avec le modèle, on peut alors remettre le cercle limite à sa propre place, ... parmi les étoiles !.

SUIVEZ LES MOTIFS A LA TRACE

Noël BLOTTI - Paris

L'homme porte en lui le besoin presque instinctif d'orner ce qui l'entoure, de remplir les espaces vides de signes ordonnés et depuis la nuit des temps, les murs, les sols, les tissus, les objets, l'utile et l'inutile, ont été peints, enluminés, émaillés, incrustés, brodés de formes copiées sur la nature, sur l'art ou la géométrie.

Du motif le plus simple —un point, un carré— aux motifs les plus complexes, des dessinateurs et des artisans ont répété ces formes suivant multiples combinaisons et donné naissance à un art ornemental à part entière, art de créer et d'ordonner des figures selon une extension rythmique pouvant être infinie.

Cette volonté d'ordonnement du motif est de toutes les époques, de toutes les régions, et les arts décoratifs en offrent multiples aspects, comme ces compositions aux inspirations très différentes que l'on retrouve sur les frises gréco-romaines, les brocards turcs, les cotons indiens, les pavements italiens, les papiers peints anglais ou les marqueteries de céramique de l'Islam...

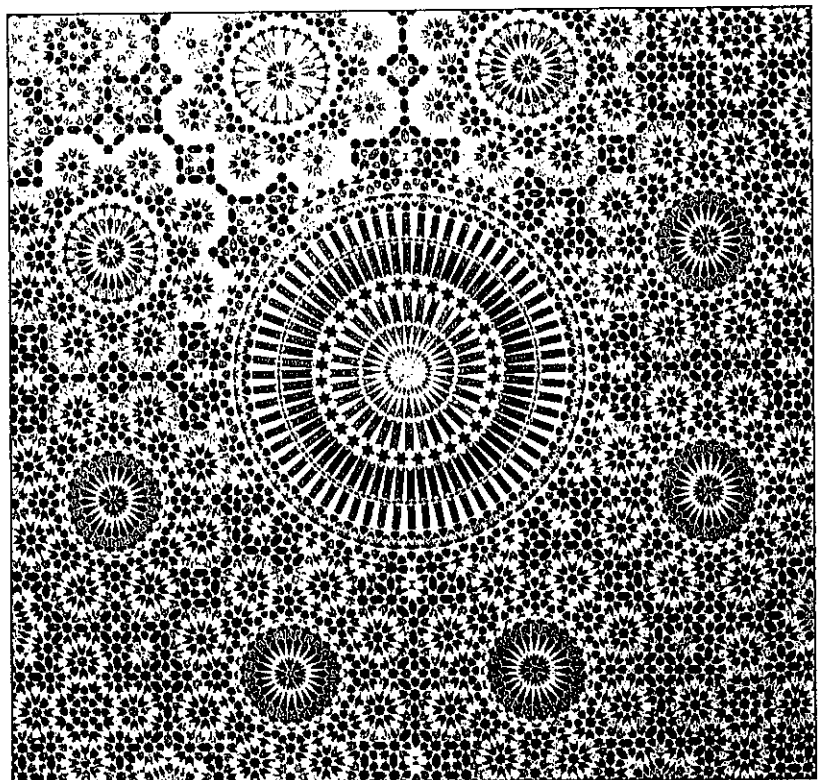
L'Islam (et plus particulièrement la civilisation hispano-mauresque) est d'ailleurs le berceau d'un art ornemental remarquablement riche et harmonieux. En refusant, selon la tradition coranique, de représenter des images, les dessinateurs musulmans ont créé une ornementation linéiste, abstraite et géométrique, dont la classique «arabesque» est l'exemple le plus typique. Cette contrainte de «non-figuration», loin d'engendrer la monotonie, se révéla au contraire une formidable dynamique, une source de créativité tout à fait remarquable. Ces compositions sobres ou luxuriantes qui viennent décorer les murs, les colonnes, les sols de demeures princières et des mosquées, étonnent toujours par leur élégance et leur modernité, qu'il s'agisse de surfaces peintes, gravées, sculptées ou marquetées et il suffit d'aller admirer les chefs-d'œuvre que nous a laissés la civilisation hispano-mauresque —l'Alhambra de Grenade ou la Médersa de Fès— pour comprendre qu'au-delà d'un sens inné de l'esthétique, ces artistes avaient une connaissance du graphisme qui les porte au sommet de l'art non-figuratif...

Pour les bâtisseurs d'alors, l'architecture, c'est surtout la décoration, et la décoration, c'est une composition qui obéit à de strictes lois de symétrie. Le respect de cette règle a donc conduit les dessinateurs à créer et utiliser des grilles de tracés permettant l'é-

laboration d'un motif destiné à être répété sur n'importe quel support. Ici la géométrie est sous-jacente à toutes les techniques artisanales. La pensée islamique a d'ailleurs toujours été préoccupée par la science des nombres (est-il utile de rappeler qu'on lui doit l'algèbre ?) et il n'est pas étonnant de retrouver ce savoir dans la décoration, non pas à l'état brut mais transcendé par le génie esthétique.

C'est ainsi qu'à partir de figures de base —le carré, le triangle équilatéral, le cercle, la spirale, le pentagone et le polygone— tous les motifs peuvent être engendrés. Suivant des grilles de composition géométrique et grâce au jeu des valeurs et des couleurs, ils deviendront déclinables à l'infini. Quant à la matière, elle viendra parler à son tour et donner le ton puisque ces motifs peuvent être appliqués à toute la décoration, découpés dans la faïence pour créer des marqueteries hallucinantes de dextérité, ciselés dans le plâtre, sculptés dans la pierre ou le bois. En accord avec la parole de Dieu, l'art hispano-mauresque fait donc triompher l'abstraction dans toute l'ornementation et si l'on n'enseigne plus les techniques de composition, ce savoir semble bien s'être transmis de génération en génération et des maîtres continuent de créer inlassablement des motifs cinétiques où s'exprime toute la richesse de l'Islam.

Innovons !
l'article de Noël Blotti nous donne l'occasion d'ouvrir un concours. Un prix pour trois gagnants !!! A vous de jouer ou de faire jouer vos élèves.

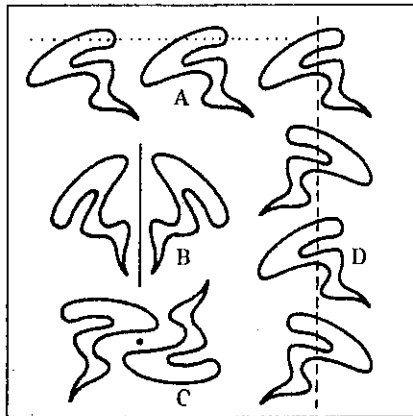


LES MOTIFS RÉPÉTITIFS EN PRATIQUE

Que peuvent bien avoir en commun des choses aussi différentes que des colliers de perles, des frises égyptiennes, des papiers peints de William Morris, les revêtements de céramique de l'Alhambra, des dessins d'Escher, des courtépentes en «patchwork», et même des cristaux ? Vous ne trouvez pas ?

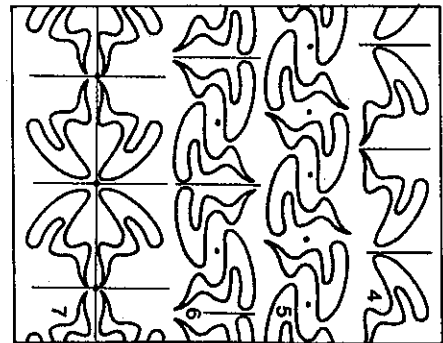
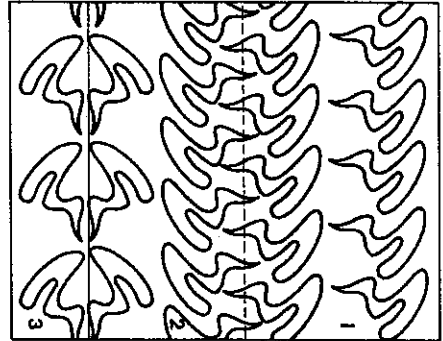
En fait, de ces éléments très divers se dégage l'idée de répétition, de répartition et de symétrie. Mais n'allez pas croire pour autant que leur diversité, que la multiplicité des formes offertes permet des possibilités infinies de répartition. A l'étude, on s'aperçoit en effet bien vite que le nombre de combinaisons de motifs est limité et c'est ce sujet qui va nous intéresser. Nous aborderons successivement les combinaisons sur une seule direction, c'est-à-dire les frises ; et sur deux directions, c'est-à-dire le plan. Les combinaisons vers trois directions (l'espace), trop complexes, ne seront pas absorbées ici.

DÉPLACEMENTS ET RÉPÉTITION



La figure 1 représente les quatre déplacements élémentaires du motif : la translation (A) ; le retournement ou réflexion sur un axe de symétrie représenté en trait plein (B) ; la rotation autour d'un point (C) et la symétrie glissante, combinaison d'une symétrie et d'une translation, sur un axe de symétrie glissante représentée en pointillé (D). Dans toutes les figures suivantes, ce motif élémentaire et volontairement dissymétrique servira de modèle. C'est en effet le moyen le plus simple pour bien comprendre les différences entre les combinaisons que nous allons évoquer, tout autre motif, géométrique, symétrique ou pris dans les arts décoratifs, ne pourrait que brouiller la compréhension.

LES DESSINS DE FRISES OU RANGÉES

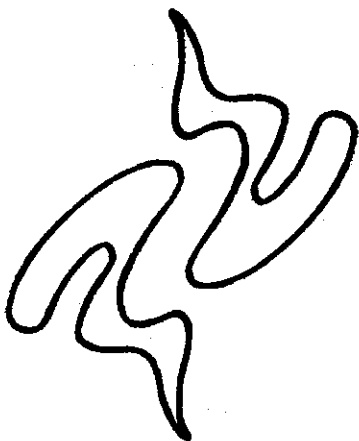


Les deux figures ci-dessus représentent les 7 arrangements possibles de frises, avec les transformations élémentaires codées suivant la figure 1. Ici, les centres de rotation sont d'ordre 2 (180°). Pour habiller une frise, il n'y a donc que 7 agencements possibles avec ce type de motif, pas un de plus.

LES DESSINS RÉPÉTITIFS DANS LE PLAN

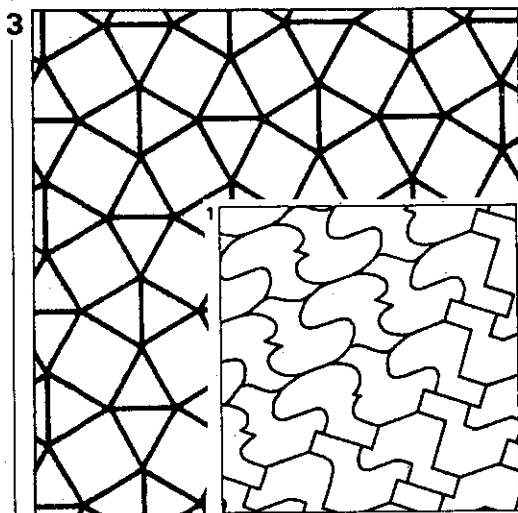
C'est là notre sujet principal. Les figures (1) à (17) de la page suivante représentent les 17 classes possibles. On y étudie toutes les combinaisons de translations, réflexions et symétries glissantes. Ici, les rotations sont d'ordre 2, 3, 4 et 6 uniquement, soit 180°, 120°, 90° et 60°. Ces mouvements élémentaires sont indiqués en couleur sur quelques dessins. Si le motif élémentaire présente des symétries par lui-même, on peut créer des variantes supplémentaires. On obtient alors 51 combinaisons, mais toujours classées dans les fameuses 17 classes primitives. Dans le cas des frises, le nombre est porté à 15.

La figure 1 est une étude montrant comment on peut passer du motif au pavage. Elle est déduite directement de la figure de classe (5) reproduite page suivante par élargissement du motif jusqu'à rencontrer son voisin. Quant à la figure 2, elle est de la classe (2) mais ici, le «pavage» est zoomorphique.



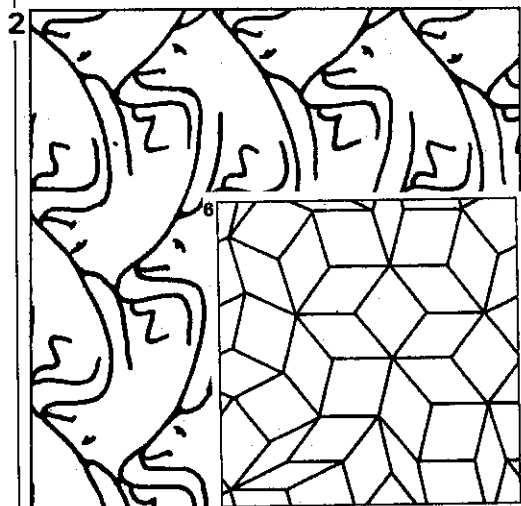
SUR LES PAVAGES

Outre les pavages réguliers élémentaires en carrés, triangles et hexagones bien connus, il existe 21 sortes de pavages possibles avec des polygones réguliers. L'exemple de la figure 3 est de classe (14). Il s'agit ici de combinaisons de deux pavés élémentaires, alors que jusqu'à présent, nous n'avions vu que des pavages dits «monohédriques» (une seule forme remplissant le plan).



Étrangement, la classification des pavages intéresse beaucoup les mathématiciens, surtout depuis le début du siècle, pour l'étude des structures internes des cristaux. Dans l'espace, on retrouve les mêmes réseaux élémentaires de translation qui sont au nombre de 14 et portent à 230 groupes d'espace le nombre de combinaisons possibles de points.

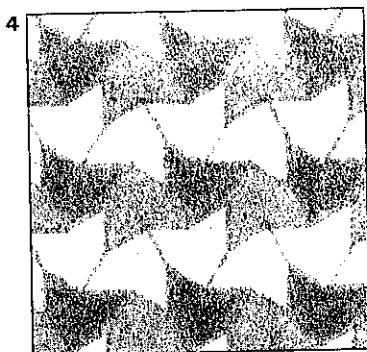
Mais revenons à nos motifs et continuons par quelques exemples, toujours dans le plan. Évidemment, les mathématiciens ont développé des classifications plus fines et complexes en précisant à chaque fois des critères plus pointus, mais toujours, les 17 classes primitives se retrouvent derrière elles. Toutes ces classes et sous-classes



portent d'ailleurs des symboles qui permettent de les nommer et classer plus aisément que par des chiffres et ces symboles sont issus de la cristallographie (arts décoratifs et scientifiques font décidément bon ménage...).

Du point de vue géométrique, on trouve ainsi 14 types de pavages monohédriques utilisant les triangles, 56 façons d'arrangement des quadrangles, 24 pour les pentagones. On se rend compte qu'il y a ainsi une infinité de pavages géométriques complexes. L'introduction de la couleur permet également d'enrichir les combinaisons des pavés. On arrive ainsi à 17 groupes de frises et 46 groupes du plan en 2 couleurs; respectivement 7 et 23 en 3 couleurs, etc., les nombres pairs de couleurs étant les plus riches en combinaisons.

PAVAGES ASYMÉTRIQUES



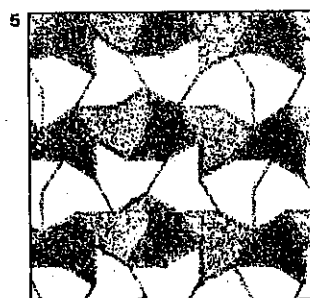
La figure 4 représente un pavage monohédrique de classe (2), cependant, on peut arranger autrement ces pavés élémentaires, comme dans la figure 5 où ils sont disposés de façon non-répétitive. On obtient alors un pavage monohédrique asymétrique n'appartenant à aucune classe. La figure 6 en est un autre exemple, mais avec trois types de losanges.

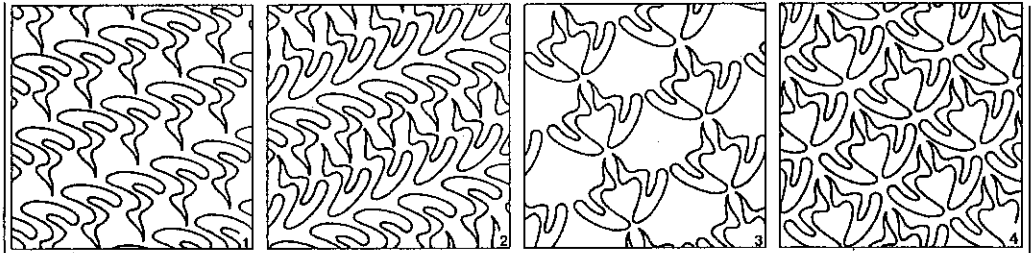
Nombre de problèmes ne sont pas encore résolus, par exemple trouver un pavé monohédre remplissant le plan d'une manière asymétrique uniquement. Amateurs de casse-tête, à vos crayons...

Ce genre de recherche pourra paraître quelque peu hermétique mais il est indéniable que les problèmes de répartition, de combinaison de motifs ouvrent des horizons illimités aux décorateurs, aux graphistes amateurs de géométrie et à tous les monomaniaques de la symétrie.

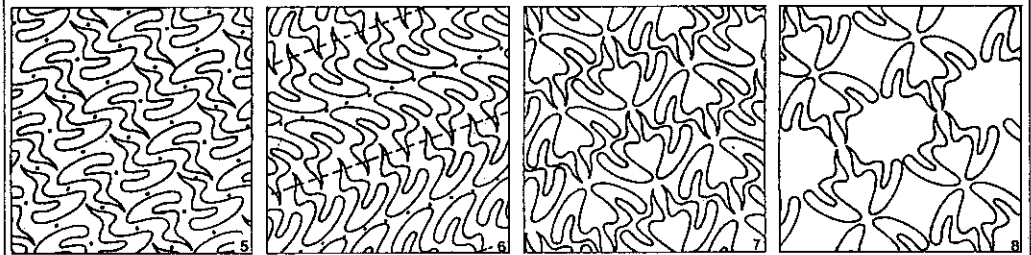
Noël BLOTTI.

Les classes 1 à 17 auxquelles nous faisons référence sont représentées ci-après.

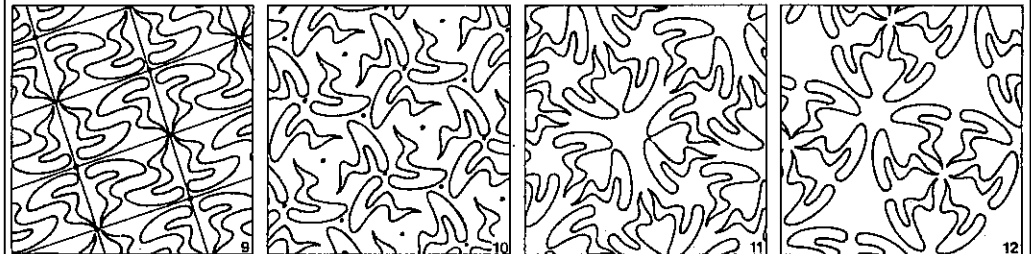




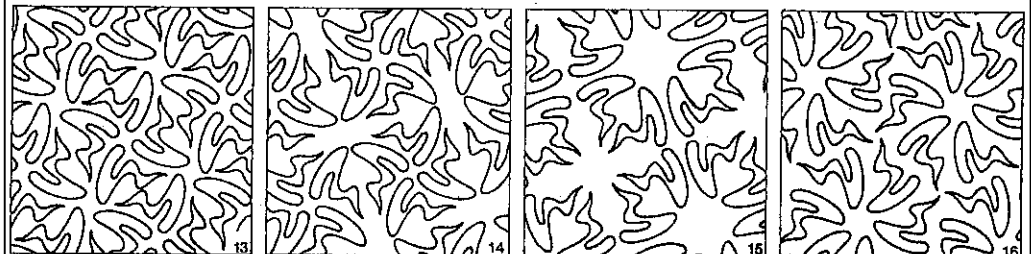
Voici les 17 classes primitives, c'est-à-dire les 17 combinaisons possibles de répartition régulière d'un motif. Ici, nous avons choisi un motif asymétrique mais un motif présentant des caractères de symétrie aurait porté à



46 le nombre de combinaisons. Toutefois, ces 46 combinaisons se répartiraient dans les 17 classes primitives. Par exemple, la composition de la classe (5) ne comporte que des centres de symétrie d'ordre 2 (rotation de



180°). Le dessin de classe (6) est réalisé avec des centres de symétrie d'ordre 2 et des axes de symétrie glissante. Par contre la classe (9) est uniquement constituée d'axes de symétrie perpendiculaires, l'intersection de ces

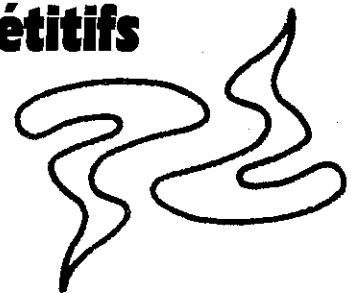


axes étant nécessairement un centre de symétrie. Quant à la composition de classe (10), la répartition du motif s'est faite selon des centres de symétrie d'ordre 3 (120°).

CONCOURS

Les dessins à motifs répétitifs

Le concours que nous lançons aujourd'hui a pour thème l'article de Noël Blotti sur les motifs répétitifs. Il s'agit de faire un dessin en tout ou en partie répétitif, c'est-à-dire de remplir un plan en déplaçant un même motif. Pour corser un peu la difficulté, le sujet devra être impérativement antropomorphique ou zoomorphique, les motifs floraux ou géométriques nous paraissant un peu trop faciles car très utilisés dans les arts décoratifs. Nous vous laissons le choix d'utiliser ou non la couleur, d'amener un élément insolite ou de disymétrie pour rehausser votre dessin...



Si vous êtes tenté par ce thème, n'oubliez pas que la date limite d'envoi est le 30 juin 1988. Les trois gagnants recevront chacun un lot d'articles ou de produits d'une valeur de 500 F offerts par la revue, leurs œuvres paraîtront dans le prochain numéro.

* Cet article est extrait de la revue Traits, revue professionnelle du dessin et des arts graphiques. Éditée sous le patronnage de Canson, Lefranc & Bourgeois, Mecarnorma, Pébéo, Pentel, Raphaël, Rotring, Swan, Stabilo, 3 M, elle est envoyée gratuitement à tous ceux qui en font la demande : Édition J. Naudet, 12, rue Blanche, 75009 Paris.

LA GÉOMÉTRIE DU KALÉIDOSCOPE

Bernard HODGSON - Laval

Voici un article qui fait le tour des kaléidoscopes euclidiens de dimension 2. Le problème se généralise en effet aux géométries sphérique et hyperbolique du plan et de l'espace (cf exposition «Horizons Mathématiques»).

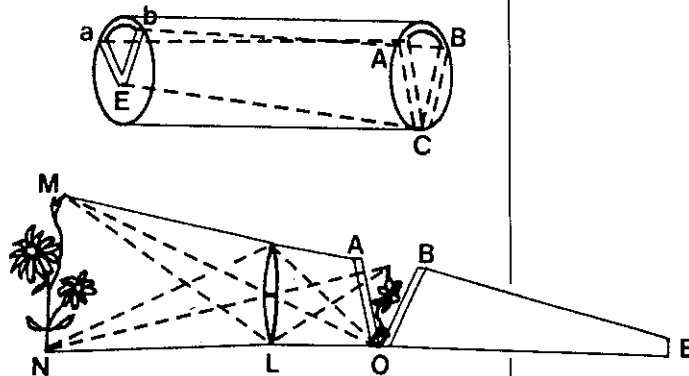
I. LA PETITE HISTOIRE DU KALEIDOSCOPE

Le kaléidoscope tel que nous le connaissons aujourd'hui est un instrument d'optique qui fut conçu au début du XIX^e siècle par le physicien écossais Sir David Brewster (1781-1868). C'est Brewster lui-même qui, en faisant breveter son invention en 1817, forgea le mot kaléidoscope à partir des racines grecques «kalos» (beau), «eidon» (aspect) et «skopein» (regarder).

L'idée de combiner des miroirs de façon à obtenir des motifs intéressants date bien sûr d'avant Brewster et l'on peut retrouver des commentaires à ce propos tant chez les grecs que chez les Chinois. Les premiers écrits sur le sujet en Europe semblent avoir été ceux de Giambattista Della Porta, physicien et naturaliste italien (1535-1615), qui, dans son *Magia naturalis* (1558), décrit une série d'expériences portant sur la multiplicité des images pouvant être obtenues d'un objet initial à l'aide de deux miroirs plans. Un peu plus tard, le jésuite allemand Athanasius Kircher (1601-1680) reprend les expériences de Della Porta et précise le nombre d'images obtenues pour différentes valeurs de l'angle entre les deux miroirs ; il présente de plus une liste des polygones réguliers pouvant être ainsi engendrés. Ces travaux sont présentés dans l'*Ars magna lucis et umbrae* (1645), ouvrage où Kircher expose également les principes optiques sur lesquels repose la lanterne magique.

C'est toutefois à Brewster que l'on doit la construction du kaléidoscope comme tel, en particulier en ce qui concerne la façon

de placer l'observateur par rapport aux deux miroirs ne sont pas également satisfaisants pour ce qui est des images obtenues. Ces principes sont présentés dans son ouvrage de base sur le kaléidoscope. *A Treatise on the kaléidoscope* (1819) ; il y indique entre autres que (2) :



— dans le cas où l'objet observé est symétrique, l'angle entre les deux miroirs peut diviser le cercle, soit en un nombre *pair*, soit en un nombre *impair* de parties identiques (c'est ce qu'on appelle des parties «aliquotes») ; autrement dit l'angle peut être contenu un nombre pair ou impair de fois dans 360°. Dans le cas d'un objet asymétrique, l'angle doit diviser le cercle en un nombre *pair* de parties aliquotes.

— l'objet observé doit être placé le plus près possible de l'extrémité des miroirs.

— l'ocilleton doit être placé près de la droite d'intersection des deux miroirs de sorte que l'observateur ait le meilleur champ de vision possible.

Le traité de Brewster contient de nombreuses considérations pratiques sur la façon d'obtenir un kaléidoscope créant de bons effets. Les deux figures suivantes, tirées de son livre, représentent respectivement l'anatomie d'un kaléidoscope simple et l'observation d'un objet MN par l'intermédiaire d'une lentille LL (c'est ce que Brewster appelle un télescope kaléidoscope). Brewster va même jusqu'à suggérer les proportions idéales, sur le plan pratique, pour le kaléidoscope simple : les deux miroirs AaEO et BbEO devraient mesurer environ huit pouces de long, de un à deux pouces de large à leur extrémité la plus grande (AO et BO) et environ un demi-pouce de large à leur extrémité étroite (aE et bE).

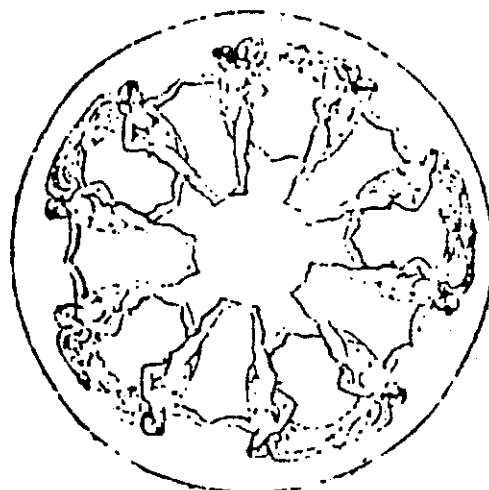


En même temps qu'il y présente les principes géométriques et physiques qui sous-tendent le kaléidoscope, Brewster se sert de son traité comme d'un long plaidoyer visant à établir la priorité de ses découvertes concernant la mise au point d'un tel instrument. A propos des travaux de Della Porta, par exemple, il signale (3) que le seul but recherché était de multiplier les objets de réflexion ; jamais Della Porta, nous dit-il, n'a été intéressé par la symétrie de la figure obtenue puisqu'il permettait n'importe quel angle entre les miroirs. Quand à Kircher, même s'il a su se restreindre à des angles qui sont des diviseurs entiers de 360, Brewster lui reproche (4) de n'avoir pas reconnu qu'un angle correspondant à un nombre impair de parties aliquotes ne donnait pas lieu à une figure symétrique (à moins qu'un objet symétrique ne soit placé symétriquement entre les miroirs). Brewster ne se gêne pas d'ailleurs pour interpeller vertement le lecteur afin de le convaincre du bien-fondé de ses affirmations : «Ce serait une insulte aux capacités du plus ordinaire de nos lecteurs que de montrer que le seul lien que l'instrument décrit par Della Porta a avec notre kaléidoscope est d'être formé de miroirs plans.» (5).

On rapporte que même s'il avait breveté son invention, Brewster n'a jamais retiré de bénéfices financiers de la mise au point du kaléidoscope. (Cela explique peut-être en partie son désir d'établir clairement sa paternité sur l'instrument). Et pourtant, ce fut un véritable succès commercial ! Aux dires de Brewster, il s'en était déjà vendu, à Londres et à Paris, plus de 200 000 exemplaires moins de trois mois après sa mise en marché (mais bien peu, déplore-t-il, étaient construits selon son brevet en respectant les principes scientifiques qu'il avait identifiés). Cet instrument devint vite l'objet de la mode et «pendant trois ou quatre ans, tout le monde avait son kaléidoscope ; on en portait à la promenade!» (6). Un chroniqueur de l'époque rapporte d'ailleurs ce qui suit : «Vers 1820, le kaléidoscope fit fureur à Paris ; on en trouvait alors dans tous les salons, sur les tables où les albums et les romans du jour l'ont remplacé depuis ; et il y a longtemps qu'il est tombé dans l'oubli. C'est tout au plus si quelque marchand forain se hasarde à en offrir à ces chalands comme prix à gagner à l'un de ces jeux où à tout coup l'on gagne» (7). Ces commentaires ne seront sans doute pas sans rappeler l'engouement dont a été l'objet le fameux cube de Rubik il y a quelques années : après avoir connu une vogue extraordinaire, il a tranquillement sombré dans l'indifférence et se retrouve maintenant abandonné dans les fonds de tiroirs...

Pour son inventeur, le kaléidoscope n'était pas qu'un simple jouet d'enfant. Dans son

traité sur cet instrument, Sir David Brewster explique comment il peut être utile pour la conception de motifs ornementaux dans divers arts appliqués : architecture, fabrication de tapis, etc. Le développement des techniques photographiques permettra d'ailleurs plus tard de tirer un meilleur parti des possibilités qu'offre le kaléidoscope. Les figures qui suivent, extraites du traité de Brewster, illustrent comment le kaléidoscope peut être utilisé en vue de créer de tels ornements. On vérifiera facilement que la rosace peut être obtenue à partir du motif de base en plaçant convenablement deux miroirs faisant entre eux un angle de 36°. L'objet initial est multiplié dix fois et donne ainsi lieu à cinq paires d'images, chaque paire étant constituée d'une figure à l'en-droit et d'une figure inversée.



Dans l'introduction de son traité, Brewster se plaint du fait que parmi les millions (sic !) de personnes qui ont pu observer les effets produits par le kaléidoscope, «il n'y en a peut-être pas cent qui ont la moindre idée des principes à partir desquels il est construit et qui pourraient distinguer l'instrument véritable de l'imitation.» (8) Les pages qui suivent aideront peut-être à corriger cette lacune... Vous y serez invité à examiner le kaléidoscope du point de vue de la géométrie ; vous y verrez sans doute des liens avec l'enseignement de cette matière dans les classes. De plus, la construction réelle d'un kaléidoscope n'étant pas trop difficile à réaliser (une fois que l'on a compris les principes de base et rassemblé tous les matériaux requis), cette étude sera peut-être, dans un contexte d'intégration des matières scolaires, un point de départ pour une activité de bricolage.



(3) D. Brewster, op. cit., p. 143.

(4) D. Brewster, op. cit., pp. 147-148.

(5) Ibid., p. 143. (Traduction libre).

(6) Dictionnaire de la conversation et de la lecture (2^e édition). Librairie Didot Frères, Paris, 1873. Tome XI, pp. 737-738 (article : kaléidoscope).

(7) Encyclopédie du dix-neuvième siècle (4^e édition). Librairie de l'Encyclopédie du XIX^e siècle, Paris, 1877. Volume 24, p. 343 (article : kaléidoscope).

(8) D. Brewster, op. cit., p. 7. (Traduction libre).

II. JEUX DE MIROIRS

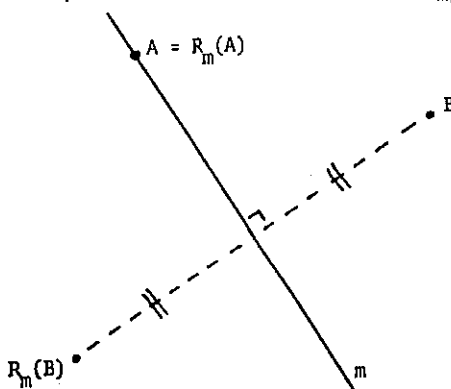
Le pouvoir réfléchissant du miroir a de tout temps exercé une grande fascination, depuis les malheurs de Narcisse, épris de sa propre image aperçue dans les eaux d'une fontaine, jusqu'aux aventures d'Alice explorant la Maison du Miroir. Les deux gravures qui suivent, tirées de *De l'autre côté du miroir* (1871) de Lewis Carroll et dues à John Tenniel, illustrant de façon combien éloquente la manière dont l'auteur d'*Alice au pays des merveilles* fait passer son héroïne «de l'autre côté du miroir», Il est intéressant d'entendre la conversation qu'Alice a avec son petit chat Kitty juste avant qu'elle ne réussisse à traverser le miroir.



1. La réflexion

La transformation géométrique qui modélise l'effet d'un miroir s'appelle *la réflexion*. Étant donné un plan P , la *réflexion de miroir* P associe à tout point de l'espace une image déterminée comme suit : selon que le point en cause est ou non dans le plan P , l'image en est soit le point lui-même, soit le point situé perpendiculairement de l'autre côté et à égale distance du miroir. (Pensez à ce qui se passe lorsque vous vous observez dans un miroir.)

Parallèlement aux manipulations que nous pouvons faire avec de «vrais» objets et de «vrais» miroirs, les activités qui suivent consisteront souvent, par souci de simplicité, à travailler avec des êtres géométriques habitant l'univers à deux dimensions. A cet effet, il nous faut introduire l'opération de réflexion dans le plan. Étant donné une droite m , la *réflexion du miroir* m , notée R_m ,



associe tout point X du plan une image $R_m(X)$ déterminée comme suit : selon que X est ou non sur m , l'image $R_m(X)$ en est soit le point lui-même, soit le point situé perpendiculairement de l'autre côté et à égale distance du miroir.

Il est important de souligner au passage que la réflexion jouit d'une propriété fort remarquable : elle inverse l'orientation des figures. Ainsi, lorsqu'on se regarde dans un miroir, notre main gauche devient la main droite de notre vis-à-vis. Ceci a donc pour effet qu'une figure asymétrique telle la lettre «L» devient un «L» à l'envers par réflexion. (Dans le cas d'une figure symétrique telle le «T», il n'y a bien sûr pas de différence.) A cause de cet effet d'inversion, on dit de la réflexion qu'elle est une transformation *gauche*; la translation et la rotation sont, au contraire, des transformations *droites* puisqu'elles préservent l'orientation des figures.

2. Deux miroirs valent mieux qu'un.

Nous nous intéressons maintenant aux effets d'optique obtenus en faisant interagir les images engendrées par des réflexions multiples dans deux miroirs (les images produites par un miroir donné étant elles-mêmes reflétées dans un autre miroir). Étant donné deux droites a et b , nous effectuons donc successivement des réflexions de miroir a de miroir b de façon à obtenir toutes les images, les images d'images, les images d'images d'images, ... Nous parlons alors de *composition* de réflexions. On aura par exemple les composées suivantes :

R_a suivie de R_b (notée $R_b \circ R_a$)

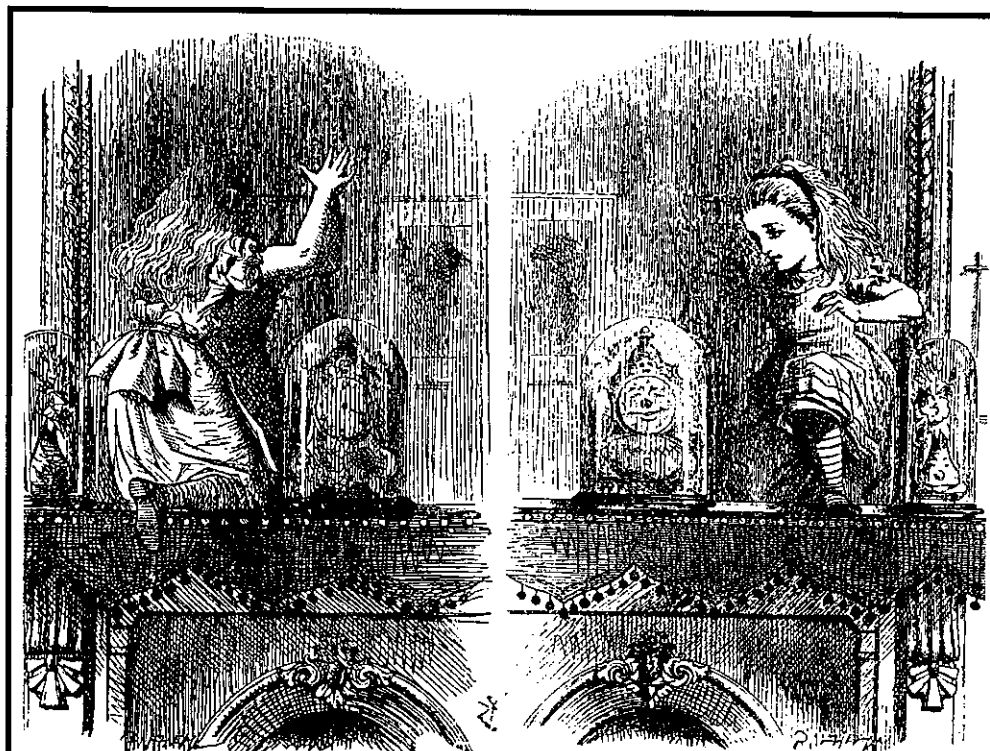
R_b suivie de R_a (notée $R_a \circ R_b$)

R_b suivie de R_a suivie de R_b suivie de R_a (notée $R_a \circ R_b \circ R_a \circ R_b$) etc.

Remarquons, en ce qui concerne l'orientation, que puisqu'une réflexion a pour effet d'inverser les figures, effectuer deux réflexions successivement va donc «inverser + inverser», c'est-à-dire préserver l'orientation des figures ; et pour trois réflexions, on a «inversion + inversion + inversion», donc inversion de l'orientation. En général, la composition d'un nombre pair de réflexions va donner une transformation droite tandis qu'un nombre *impair* de réflexions donne une transformation gauche.

Revenons à nos deux miroirs a et b . Selon la façon dont ils sont placés l'un par rapport à l'autre, il y a fondamentalement deux cas à distinguer : les miroirs se coupent ou ne se coupent pas.



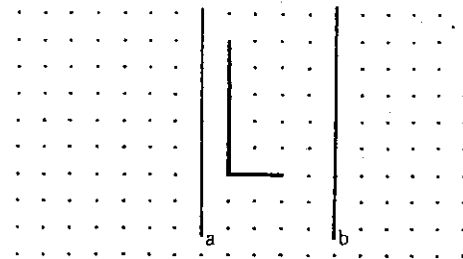


«Maintenant Kitty, si vous vouliez attendre un peu et ne pas tant parler, je pourrais vous dire toutes mes idées sur la Maison du Miroir. D'abord, il y a la pièce que vous pouvez voir à travers la glace, elle est comme notre salon, exactement : seulement les objets sont tournés de l'autre côté. (...). Leurs livres ont bien quelque chose des nôtres, mais les mots sont en sens inverse. Je sais ça, parce que j'ai tenu un de mes livre devant la glace et ils en tenaient un de l'autre côté. (...) Oh, Kitty, comme ce serait amusant si nous pouvions pénétrer dans la Maison du Miroir ! Je suis sûre qu'il s'y

trouve de si belles choses ! Supposons (dans le texte anglais : Let's pretend) que la glace est devenue molle comme de la gaze, de façon que nous puissions passer au travers. Eh bien, mais n'est-ce pas exactement ce qui arrive ? Il va être facile de passer au travers.» Elle était debout sur le manteau de la cheminée et c'est à peine si elle se rendait compte comment elle avait pu grimper là. Sans aucun doute, la glace commençait à fondre, semblable à un luisant brouillard argenté. L'instant d'après Alice était de l'autre côté de la glace et sautait d'un pied léger dans la chambre du Miroir (9).

1^{er} cas : MIROIRS PARALLÈLES

Étant donné deux miroirs parallèles a et b, nous cherchons à identifier toutes les images qui sont obtenues lorsqu'on considère toutes les compositions possibles à partir des deux réflexions R_a et R_b . (C'est là une solution qui nous est familière puisque l'on rencontre fréquemment des miroirs parallèles tant chez le coiffeur que chez le marchand de vêtements). Sur la figure qui suit, dessinez l'image du «L» d'abord par R_a ; puis par R_b ; puis par $R_b \circ R_a$; puis par $R_a \circ R_b$; etc. Trouvez toutes les images ainsi obtenues par composition à l'intérieur des limites du quadrillé qui vous est donné.



Si on imagine que la bande quadrillée est prolongée indéfiniment d'un côté et de l'autre, on obtient, par composition de R_a et de R_b , une quantité illimitée d'images de

notre objet initial. (Bien sûr, cette infinité d'images n'existe que sur le plan théorique puisqu'en pratique, il y a toujours une certaine perte de luminosité d'une image à l'autre). En plaçant deux (vrais) miroirs sur les droites a et b et en essayant de regarder entre les miroirs (ce qui n'est pas facile !), vous pouvez apercevoir la frise créée par l'effet de réflexion. (Un philosophe chinois du IV^e siècle A.C. a utilisé une telle frise pour illustrer le concept d'infini).

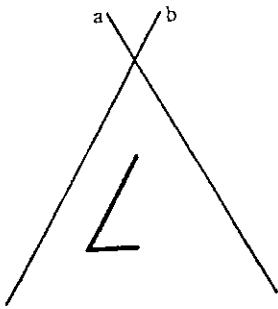


(9) Lewis CARROLL (pseudonyme de Charles Dodgson). De l'autre côté du miroir. Éditions Marabout, Paris, 1963, pp. 166-169.

On remarquera, à propos de la frise précédente, que les deux miroirs a et b ont eux-mêmes une infinité d'images par composition des réflexions R_a et R_b (tracez-les); il s'agit là de miroirs virtuels qui paraissent agir comme autant de miroirs réels.

2^e cas : MIROIRS CONCOURANTS

Supposons maintenant que nos deux miroirs a et b se coupent, comme sur la figure qui suit. On pourra à nouveau s'intéresser à l'image obtenue par $R_b \circ R_a$; ou à l'image par $R_a \circ R_b$; et enfin à toutes les images engendrées par toutes les compositions possibles (dessinez-les). Et c'est ainsi que surgit le KALÉIDOSCOPE! En plaçant deux (vrais) miroirs sur les droites a et b, observez la rosace ainsi engendrée et les diverses images qui la composent. Remarquez qu'encore une fois les miroirs a et b se multiplient l'un l'autre pour former des miroirs virtuels se comportant comme de vrais miroirs.

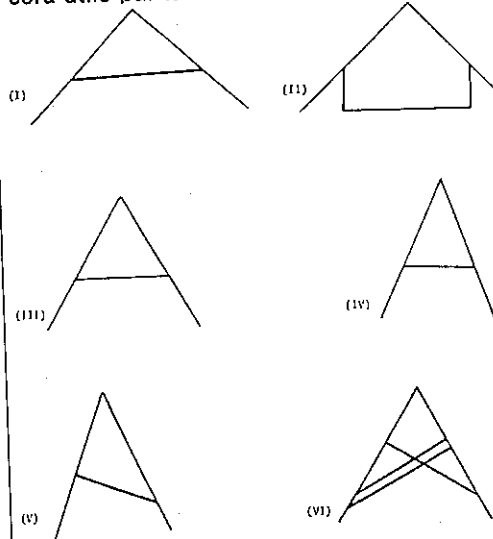


Mais combien y en a-t-il au juste, d'images qui sont obtenues à partir de deux miroirs qui se coupent? La situation ici est fondamentalement différente du cas des miroirs parallèles puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'images ainsi créées. Les sections qui suivent permettront d'explorer cet aspect plus à fond.

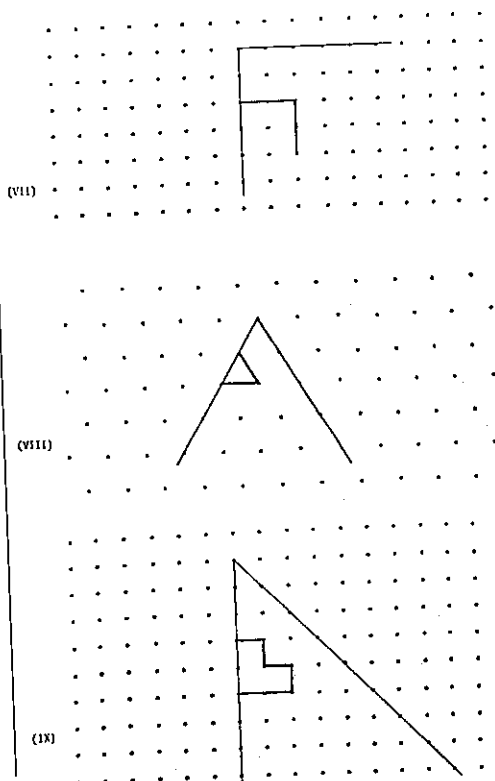
III. DU KALÉIDOSCOPE AUX ROSACES.

Nous vous proposons maintenant d'explorer plus à fond le comportement du kaléidoscope. Il serait commode, à cette fin, que vous construisiez votre propre kaléidoscope en reliant deux miroirs de poche à l'aide de ruban gommé de façon à ce qu'ils forment un «V»; vous pourrez ainsi les faire pivoter l'un par rapport à l'autre, leur droite d'intersection où vous appliquez le ruban servant alors de charnière. Un tel instrument (même s'il ne respecte pas nécessairement les directives de Brewster pour la construction d'un «bon» kaléidoscope!) vous permettra de visualiser l'effet de l'angle sur la rosace engendrée par le jeu des miroirs.

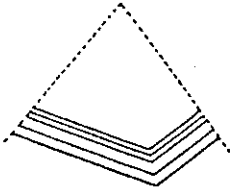
Chacune des figures (I) à (VI) représente un angle à l'intérieur duquel on a tracé un certain motif de base. Si les côtés de cet angle sont vus comme étant des miroirs, quelle figure obtient-on globalement en prenant toutes les réflexions possibles? Essayez d'abord de «voir» intuitivement ce que ça doit donner, puis vérifiez votre pronostic en plaçant vos deux miroirs sur l'angle. Dans chaque cas, mesurez l'angle que forment les miroirs; ce renseignement vous sera utile par la suite.



Les treillis (quadrillés ou triangulés) s'avèrent très utiles pour examiner les effets d'un kaléidoscope. Les figures (VII), (VIII), et (IX) représentent respectivement des kaléidoscopes de 90°, 60° et 45°. Trouvez toutes les images du motif de base en vous servant d'abord de la structure du treillis comme telle; vérifiez ensuite l'exactitude de vos résultats à l'aide de vos miroirs.

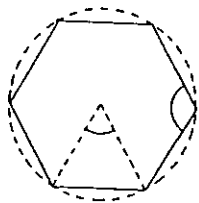


Il y aura par ailleurs des situations où la rosace formera un polygone régulier sans qu'on s'y attende trop. Par exemple quelle rosace obtient-on à partir du motif suivant, si les traits hachurés représentent des miroirs ? Après avoir essayé de «voir» intuitivement ce que cela doit donner, vérifiez votre pronostic à l'aide de votre kaléidoscope.



Cette dernière expérimentation s'est peut-être avérée un peu surprenante ! Nous allons essayer de mettre un peu d'ordre dans tout cela en examinant plus à fond de quelle façon un polygone régulier peut être engendré dans un kaléidoscope. Bien sûr, l'angle entre les miroirs du kaléidoscope va à nouveau jouer un rôle fondamental dans de telles situations. De ce point de vue, l'angle du polygone régulier sur lequel va porter notre attention sera non pas l'angle intérieur (en un sommet du polygone), mais bien *l'angle au centre* : il s'agit de l'angle déterminé par deux «rayons» consécutifs du polygone (c'est-à-dire des rayons du cercle circonscrit au polygone). Mais comme chacun le sait, l'angle au centre d'un polygone régulier est très intimement lié à son angle intérieur. (Quelle est cette relation, au juste ?).

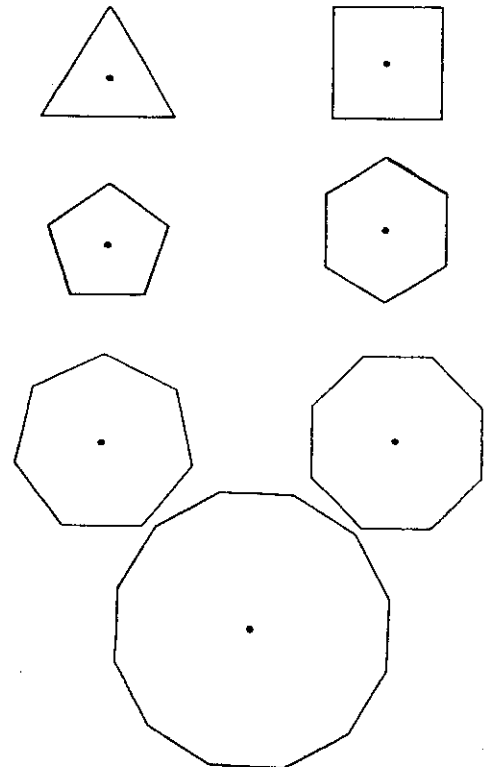
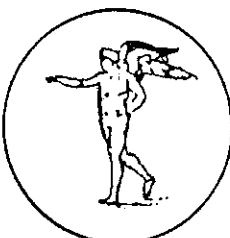
Une première façon d'obtenir un polygone régulier à l'aide d'un kaléidoscope consiste à partir d'un côté en choisissant l'angle au centre approprié. En utilisant une portion du segment ci-dessous comme côté, vous pouvez engendrer des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 7, ... côtés. Quel est l'angle du kaléidoscope dans chacun des cas ? Quel lien y-a-t-il avec les résultats de la Section III ?



Remarque : Comme on pouvait s'y attendre, plus l'angle du kaléidoscope devient petit dans une telle manipulation, plus la rosace engendrée s'approche d'un cercle.

Mais il n'a pas que la donnée d'un côté qui nous permette de voir un polygone régulier dans un kaléidoscope. On peut aussi partir de deux côtés ; ou encore de plusieurs côtés ; ou même de moitiés de côtés. Encore une fois, les principes dégagés à la Section précédente vont nous permettre de nous y retrouver : la rosace obtenue (entendez le polygone régulier) sera fonction à la fois du motif de départ (la section comprise entre les deux miroirs) et de l'angle du kaléidoscope.

Essayez, pour chacun des polygones réguliers que voici, de le recréer dans votre kaléidoscope à partir d'une partie de ce polygone ; il s'agit donc de placer convenablement vos deux miroirs sur le polygone de façon que la rosace engendrée entre les miroirs coïncide avec le polygone donné.



Pouvez-vous le faire de plusieurs façons différentes ?

Il est donc possible de reproduire un polygone régulier de plusieurs façons. La charnière du kaléidoscope étant sur le centre du polygone, on peut placer nos deux miroirs.

— soit de façon qu'ils passent par deux sommets du polygone (n'importe lesquels).

— soit de façon qu'ils coïncident avec deux médiatrices des côtés du polygone.

— soit enfin de façon que l'un passe par un sommet et que l'autre soit une médiatrice d'un côté.

Selon la méthode utilisée, l'angle du kaléidoscope pourra varier ; mais il sera toujours relié à l'angle au centre du polygone en cause.

2... à diverses autres figures.

Mais il n'y a évidemment pas que des polygones réguliers qui puissent être engendrés dans un kaléidoscope. Selon le motif de départ et selon la façon dont on dispose les deux miroirs, on pourra obtenir diverses autres figures qui toutes bien sûr, posséderont des symétries. (N'oublions pas que ce sont des rosaces.)

Ainsi, il est possible, en plaçant convenablement vos deux miroirs sur un segment de droite, de voir un losange (non rectangle) dans un kaléidoscope ; ou encore, un triangle isocèle (non équilatéral). Faites-le à l'aide du segment qui vous a été donné plus haut.

On peut ainsi s'intéresser à des figures courbes. En partant du cercle ci-dessous, on peut placer le kaléidoscope de manière à y reproduire ce même cercle. Où se trouve alors la charnière ? Et quel est l'angle du kaléidoscope ?

Puisque le cercle possède pour ainsi dire une «symétrie infinie» (tout diamètre est un axe de symétrie et tout angle est un angle de symétrie), n'importe quelle façon de placer les deux miroirs sur le cercle de départ, la charnière étant au centre du cercle, nous donne donc une rosace circulaire. Toutefois, si nous déplaçons notre kaléidoscope en faisant varier à la fois son angle et la façon dont les miroirs coupent le cercle, nous pouvons engendrer toutes sortes de jolies figures : trèfles (à trois feuilles, à quatre feuilles,...) étoiles (à trois branches, à quatre branches,...), figures ressemblant à des polygones réguliers mais dont les «côtés» sont courbés, etc. Vérifiez-le à l'aide du cercle précédent.

Si l'on se donne au départ des motifs un peu spéciaux (astucieusement choisis !), il est possible de construire des rosaces fort intéressantes. Examinez par exemple ce que cela donne avec les deux motifs que voici. Les possibilités du kaléidoscope dans de telles situations sont illimitées : il s'agit de laisser libre cours à son imagination.

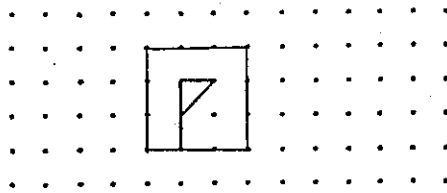
On peut aussi utiliser le kaléidoscope de façon dynamique, en le déplaçant sur un certain canevas ; selon le motif de base de ce canevas, cela pourra donner lieu à des effets kaléidoscopiques (et psychédélicques !) fort spectaculaires. Expérimentez-le en faisant bouger votre kaléidoscope de diverses façons sur les deux grilles qui suivent.

V. PRISMES KALÉIDOSCOPIQUES

Après avoir examiné les effets produits par le jeu de deux miroirs, on peut se demander ce qui arriverait si on introduisait un troisième ou encore un quatrième miroir. C'est un peu comme si on se retrouvait dans une pièce dont tous les murs seraient des miroirs. (Et pourquoi pas, tant qu'à y être, le plancher et le plafond !) Essayez d'imaginer un peu : c'est le grand plongeur dans l'infini...

Nous utiliserons l'expression *prisme kaléidoscopique* pour désigner l'instrument obtenu en combinant trois miroirs ou plus. Le cas le plus naturel qui nous vient à l'esprit est peut-être celui de la boîte kaléidoscopique carrée faite de deux kaléidoscopes de 90° eux-mêmes joints à l'angle droit. C'est ce qu'on a illustré sur la figure sui-

vante, où les quatre côtés du carré représentent autant de miroirs. En vous servant du treillis, tracez toutes les images du fignon (à l'intérieur des limites de la feuille) obtenues en effectuant toutes les compositions possibles des réflexions données.

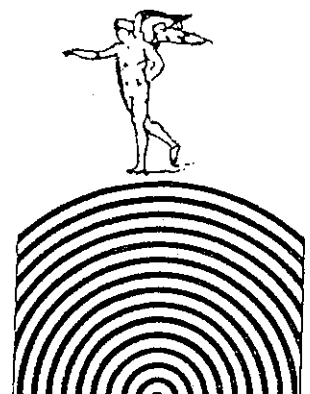
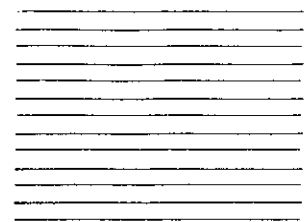
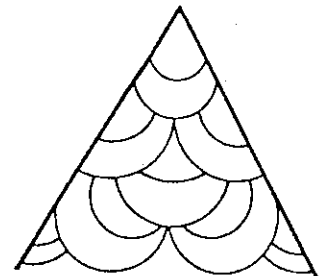
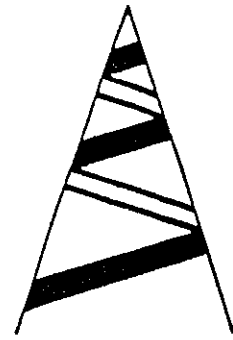


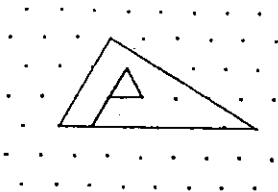
Vous pouvez vérifier l'exactitude de votre résultat en vous fabriquant une telle boîte kaléidoscopique. En plaçant un objet entre les quatre miroirs, vous pourrez peut-être réussir à y jeter un coup d'œil de sorte que vous voyiez le motif se répétant à l'infini dans toutes les directions. (Il n'est pas facile concrètement de réussir à «zieuter» à l'intérieur d'une telle boîte ; on peut toujours regarder par-dessus les miroirs, ou encore laisser une petite ouverture entre deux miroirs. Mais idéalement, il faudrait être situé soi-même dans la boîte. Il pourrait être commode, à cet égard, de s'imaginer être un vampire : ces êtres, selon la superstition populaire, ont la propriété de ne pas réfléchir d'image dans un miroir !)

Vous aurez remarqué, à l'examen de la situation précédente, que l'effet d'un tel prisme kaléidoscopique est de propager le motif de base dans toutes les directions. On obtient aussi un recouvrement du plan qui s'appelle un *pavage* : c'est comme si on disposait de tuiles qui étaient répétées à l'infini.

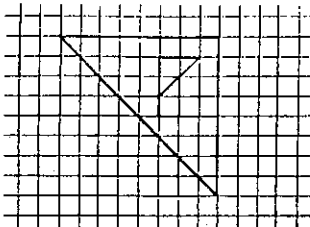
Quelles sont les combinaisons de miroirs qui donneront lieu à des effets intéressants dans un prisme kaléidoscopique ? En se rappelant les directives de Brewster pour la construction d'un «bon» kaléidoscope, on voit que les angles appropriés seront ceux qui divisent 360° en un nombre *pair* de parties aliquotes. Le plus grand de ces angles disponibles est donc 90° : c'est le cas de la boîte carrée dont nous venons de parler. (Il serait bien sûr également possible de considérer une boîte kaléidoscopique rectangulaire.)

Peut-on envisager des combinaisons de plus de quatre miroirs qui pourraient donner de bons effets kaléidoscopiques ? Après tout, n'oublions pas, comme les abeilles le savent depuis fort longtemps, que l'hexagone régulier peut servir de base à un pavage du plan. Pourrait-on alors concevoir des prismes kaléidoscopiques hexagonaux ? Non, et ce en raison des directives de Brewster : l'angle intérieur de l'hexagone régulier (120°) divisant le cercle en *trois* parties aliquotes, nous nous heurtons ici aux problèmes d'interférence dont il a été question à la Section III.





Prisme 90° - 60° - 30°



Prisme 90° - 45° - 45°

Il nous reste à examiner le cas de prismes kaléidoscopiques à trois miroirs. Quels sont les choix d'angles possibles ? A nouveau en raison des principes de Brewster concernant la symétrie des figures engendrées, les trois angles entre les miroirs devront être de la forme de $180^\circ/a$, $180^\circ/b$ et $180^\circ/c$ respectivement, où a , b et c sont des nombres naturels. Mais puisque la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut 180° (encore ce bon vieux théorème qui vient à notre aide !), il s'ensuit donc que les nombreuses a , b et c doivent satisfaire la relation.

$$\frac{180^\circ}{a} + \frac{180^\circ}{b} + \frac{180^\circ}{c} = 180^\circ$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

Il est assez simple d'identifier les solutions entières de l'équation précédente : si on suppose, pour clarifier la discussion, que $a \leq b \leq c$, il n'y a que les trois cas que voici (vérifiez-le !) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

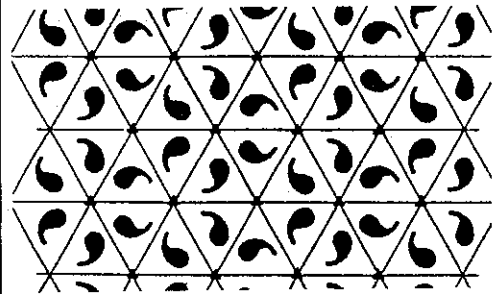
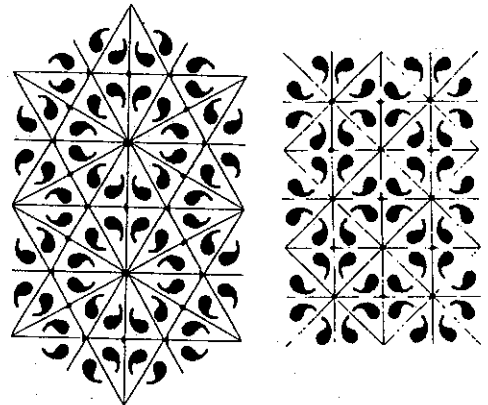
C'est trois solutions correspondent respectivement aux prismes kaléidoscopiques triangulaires suivants :

- le prisme 90° - 60° - 30°
($a = 2, b = 3, c = 6$)
- le prisme 90° - 45° - 45°
($a = 2, b = 4, c = 4$)
- le prisme 60° - 60° - 60°
($a = 3, b = 3, c = 3$)

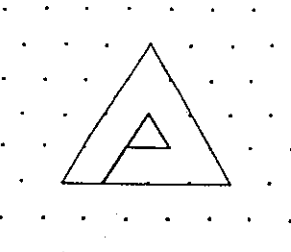
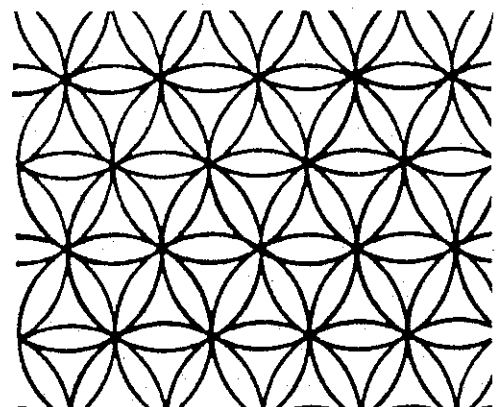
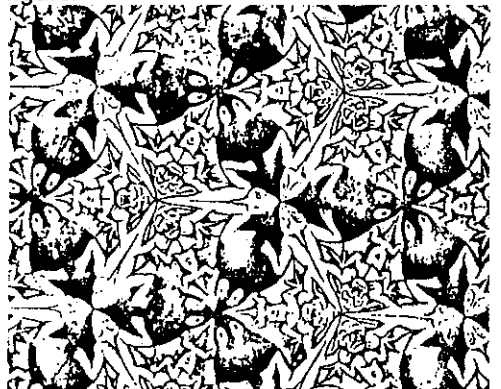
Nous allons maintenant examiner ces instruments de plus près. Pour chacun des trois treillis qui suivent, déterminez toutes les images du motif de base à l'intérieur des limites données, les côtés des triangles servant de miroirs.

Encore une fois, il serait possible de vérifier vos résultats en fabriquant de véritables prismes kaléidoscopiques. Mais les difficultés techniques rendent la chose assez délicate. Par ailleurs, il est intéressant d'observer qu'il y a une grande régularité quant au nombre de réflexions nécessaires pour obtenir une certaine région du pavage, au fur et à mesure que l'on s'éloigne du motif de départ. Ce nombre de réflexion est indiqué sur le graphique suivant pour le cas 60° - 60° - 60°.

Les trois graphiques qui suivent représentent de façon schématique les figures obtenues à l'aide de chacun des prismes kaléidoscopiques triangulaires.



Et lorsqu'on y joint le talent de l'artiste, voici ce que cela peut donner. La première illustration est due au peintre hollandais Maurits C. Escher (1898-1972) tandis que la seconde remonte à la civilisation mésopotamienne. Dans chaque cas, vous pouvez identifier le motif de base ayant permis, par le jeu des miroirs, de retrouver toute la figure.



Prisme 60° - 60° - 60°



RIBAMBELLES ET NAPPERONS

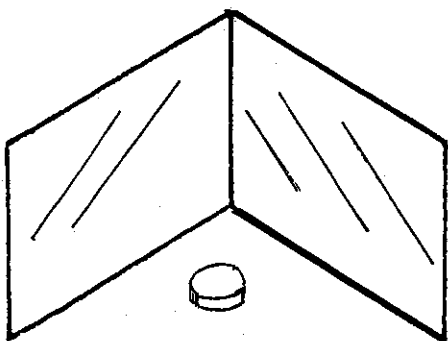
Jean GRIGNON - Montréal

Une étude mathématique des ribambelles et autres rosaces obtenues par pliages et découpages. L'auteur met en œuvre toutes les symétries du plan.

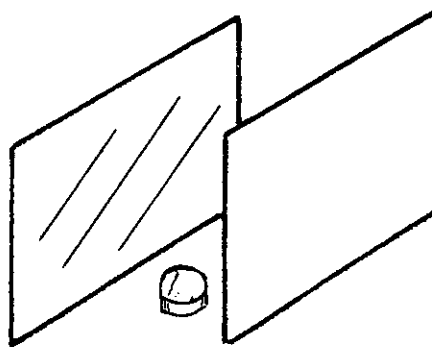
Y AURAIT-IL UN PRÉALABLE ?

Non, il n'y a pas de préalable au travail suggéré dans ce document. Il peut y avoir lieu cependant, de susciter un intérêt particulier pour ces réalisations en faisant un travail d'exploration à l'aide de menus objets et de miroirs.

Cette exploration, bien que sans lien direct avec le pliage et le découpage, permet d'établir un contact immédiat avec les rosaces et les frises. Deux miroirs placés à angle, structurent en rosace des objets placés dans le champ de réflexion. Si ces miroirs sont maintenus en parallèle, face à face, tout objet déposé entre ces plans réfléchissants fait naître une frise théoriquement infinie...



(Position pour générer des rosaces)

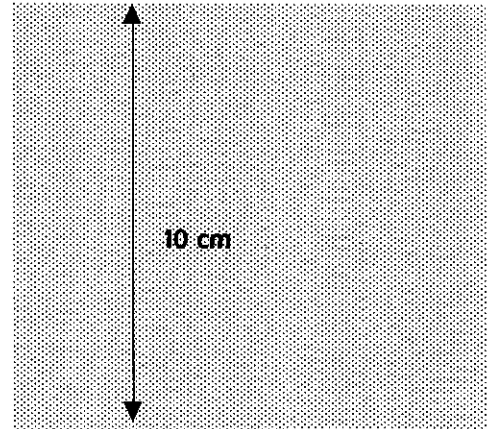


(Position pour générer des frises)

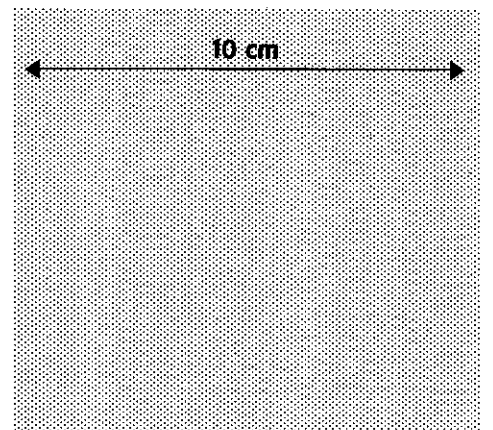
A LA VEILLE DE L'ACTION

Les modèles figurant dans ce document sont reproduits en réduction. Les rosaces ont été réalisées à partir de pièces carrées de 10 cm de côté, les frises, à partir de bandes de largeurs variées.

La présentation finale de rosaces et de frises est obtenue par la mise en place de la pièce préalablement pliée, coupée, puis dépliée et collée. Cette technique assure l'authenticité des pièces même si elle risque de choquer l'œil d'un dessinateur averti. L'idée doit être supportée par la matière et doit surtout la dépasser. La théorie des rosaces et des frises ne sera pas ébranlée par des ajustements légèrement imparfaits, qui seraient apparus au moment du découpage ou de la mise en position pour le collage final.



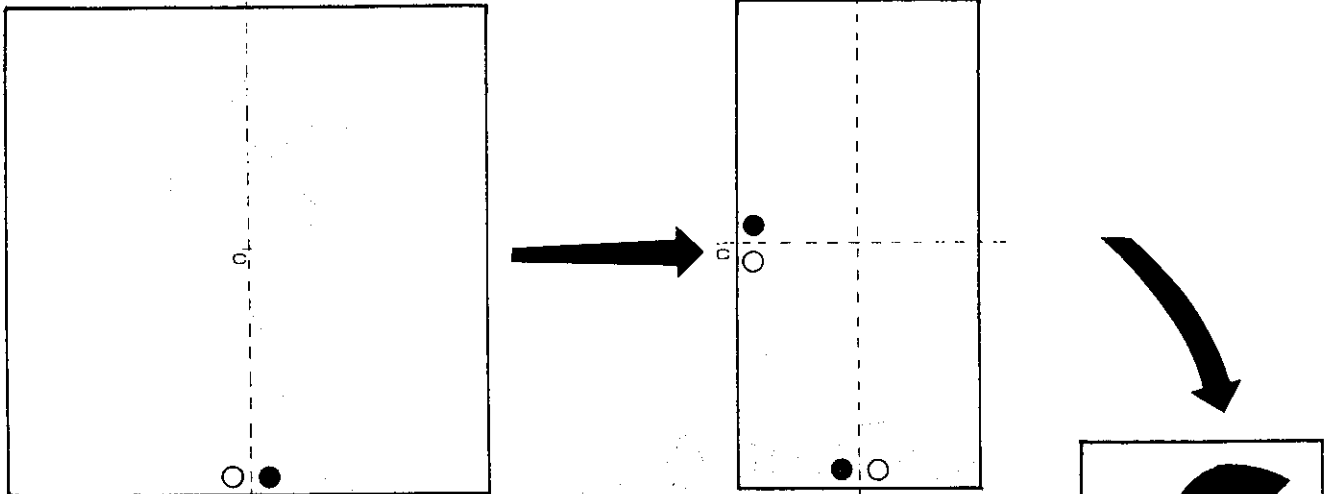
Dans les pages qui vont suivre, on retrouvera les pliages à effectuer le découpage et la pièce obtenue. Pour préciser le pliage à effectuer, une ligne pointillée indique à chaque étape la ligne de pliage. Cette ligne constituera, au moment de nos observations, un axe de symétrie. Par pliage, la section où apparaît un cercle vide (○) s'appliquera sur celle où on retrouve un cercle plein (●). Des flèches (→) indiquent la suite des étapes.



Au moment du découpage, la partie ombrée de la figure est concernée. Après dépliage, on retrouve la figure finale.

UN PREMIER PLIAGE

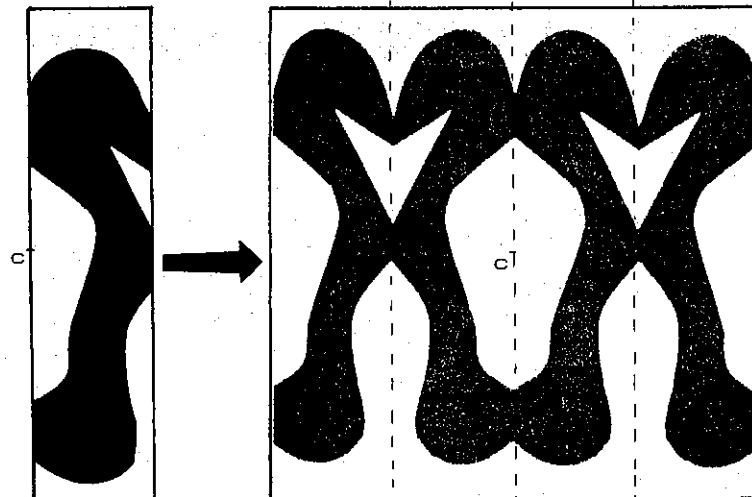
Le premier pli permet de passer de la figure de gauche à celle de droite. Par la suite, on peut choisir de faire un second pli, soit dans le même sens que le premier (pli A), soit perpendiculairement au premier (pli B). Ces opérations, suivies dans chaque cas d'un découpage, permettront de créer deux modèles distincts, qui mettront en évidence l'un une rosace, l'autre une frise.



Le découpage d'un motif dans une feuille de papier pliée à plusieurs reprises, nous lance dans une aventure qui deviendra enrichissante. Il suffira d'ajouter à l'habileté du pliage et du découpage une réflexion didactique tant sur la beauté du modèle obtenu que sur les transformations en cause.

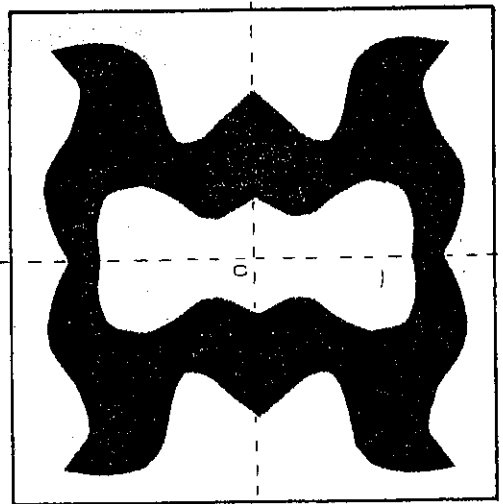
Et surtout, n'hésitez pas à laisser aller votre imagination pour varier les modèles. Si après découpage vous n'obtenez que des ensembles de pièces éparses comme il a été mentionné plus tôt, alors ayez en tête l'adage: «Cent fois sur le métier...»

Une première frise...



(figure 2)

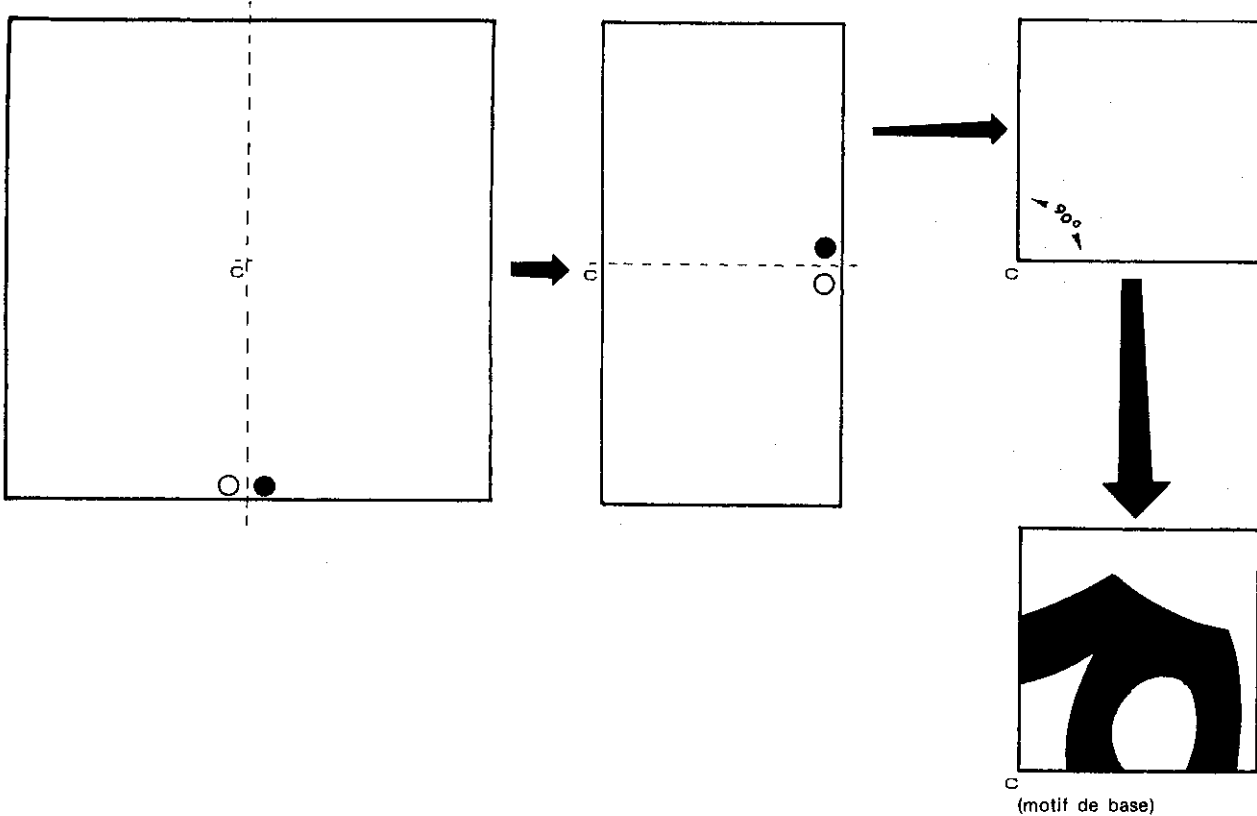
Une première rosace...



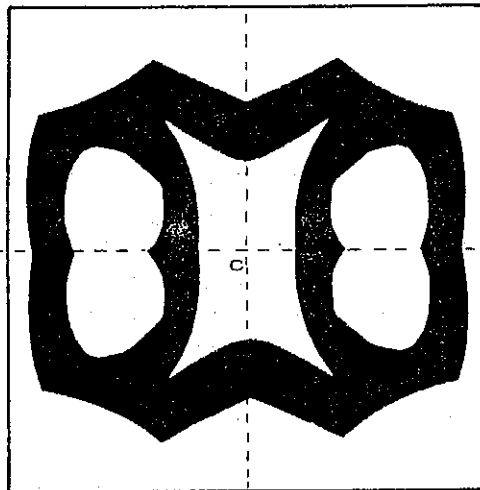
(figure 1)

ROSACE (deux axes)

Pliage



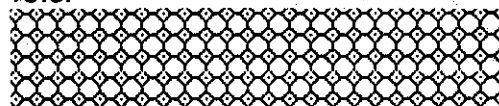
Découpage



(figure 3)

Observations :

Les deux plis forment les axes de symétrie de la figure.
 Le centre C est un centre de rotation de la figure. Chaque rotation de 180 degrés autour de C ramène la figure à sa position initiale.
 Le motif de base revient quatre fois.

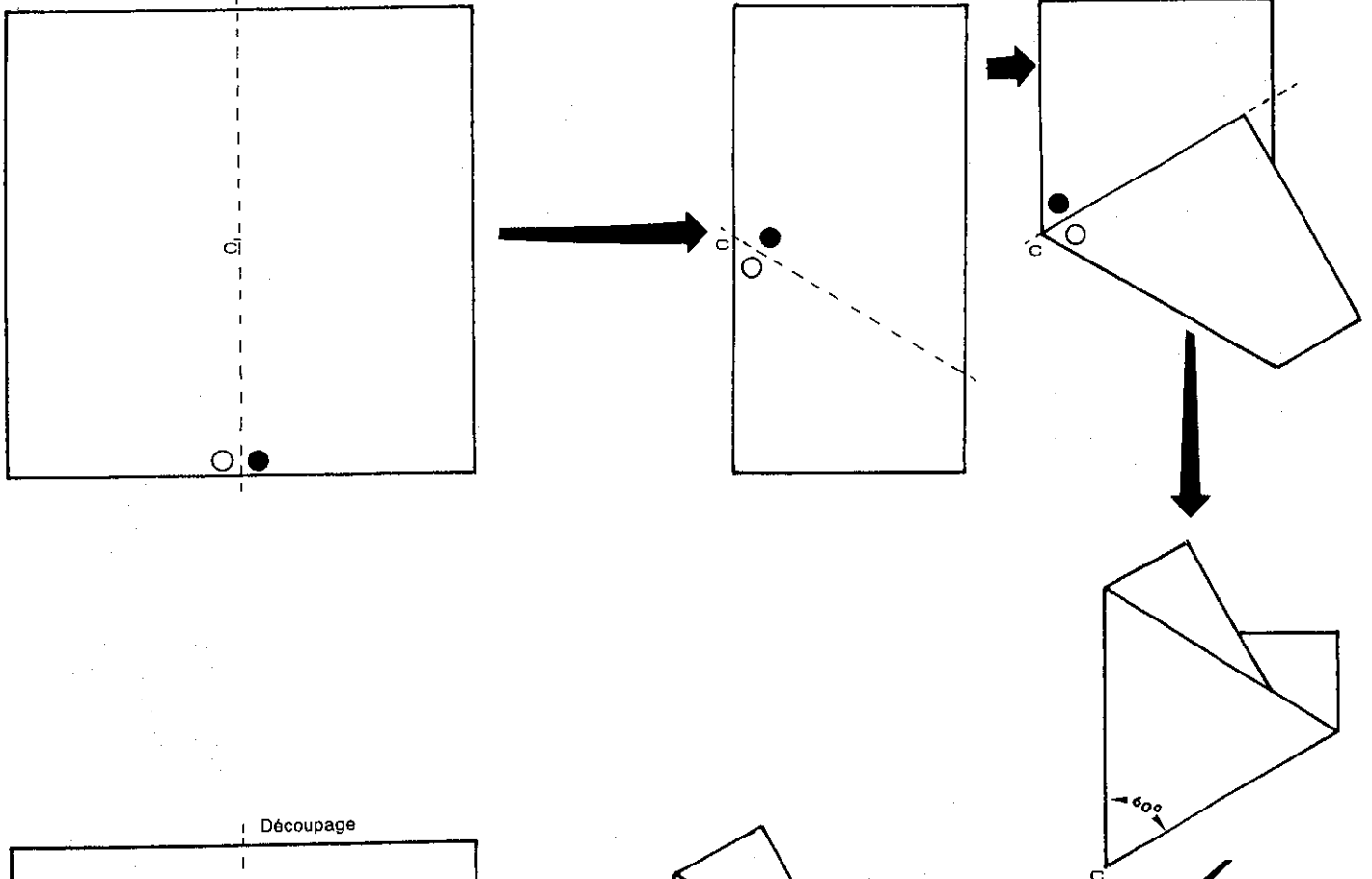


NOTE :

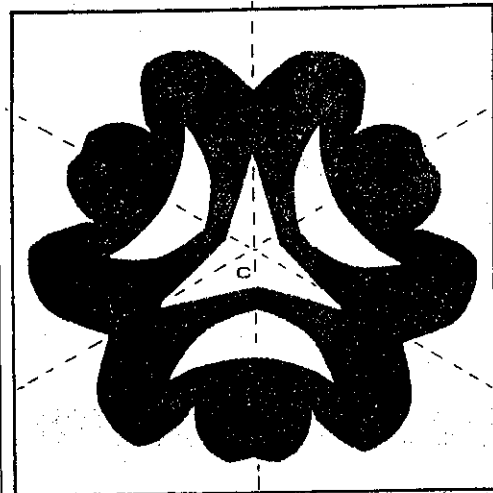
La forme initiale de la feuille de papier importe peu. Tout se joue dans le découpage autour du point central C. Pour réussir à chaque fois, il vaut mieux tenir d'une main, en C, la feuille de papier déjà pliée et tailler de l'autre le motif initial désiré. A la dernière coupe, on pourra enlever le centre C, si on veut voir apparaître une perforation centrale.

ROSACE (trois axes)

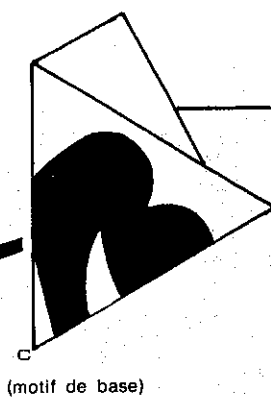
Pliage



Découpage



(figure 4)



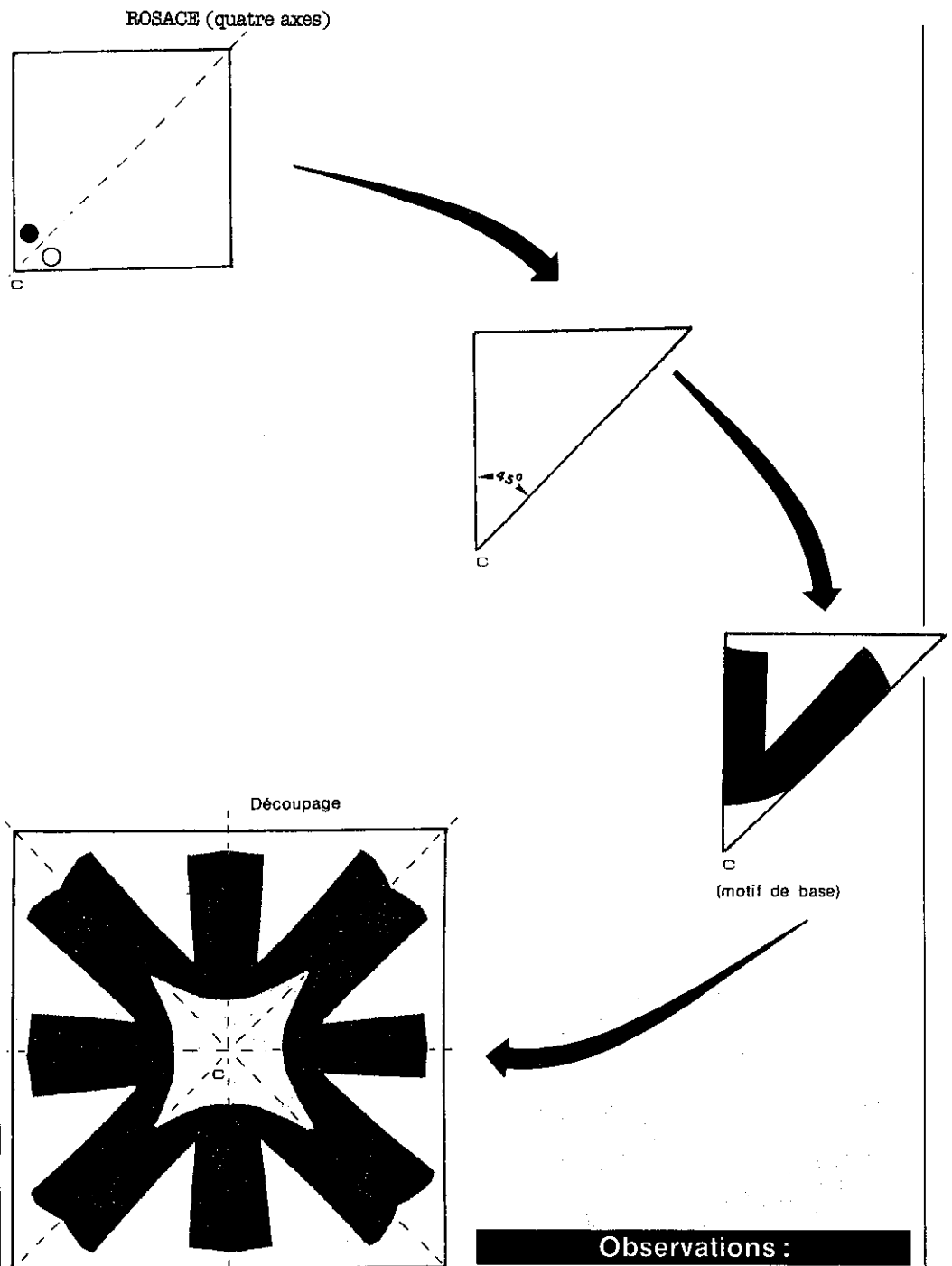
Observations :

Les trois plis forment trois axes de symétrie.
Le centre C est le centre de rotation de la figure. Chaque rotation de 120 degrés fait coïncider la figure avec sa position initiale. Le motif de base revient six fois.

NOTE :

Si vous le désirez, utilisez un rapporteur d'angles pour préciser les lignes de pliage. Cette utilisation d'un instrument de mesure ne vous dispensera pas cependant de devoir développer un talent d'artisan dans l'art du pliage. Le papier lui-même apporte des contraintes. Plus il y aura de pliages à effectuer, plus il faudra utiliser un papier mince et de bonne qualité.

NOTE : Pliage et rosace.
 Le travail qu'on vous propose dans ce document permet de générer un type particulier de rosace qui se situe dans la catégorie de celles qui admettent des symétries. En reportant un motif de base par rotation autour d'un point, on obtiendra un modèle appartenant à une autre catégorie. Ceux qui voudront explorer ce domaine trouveront une bonne information dans le volume d'Yvon Bossard, **Rosaces, frises, et pavages**, vol. 1, édité chez Cédic (Paris 1977).



(figure 5)

Il faut vous reporter 2 pages avant pour retrouver les premières étapes du pliage. Construire une rosace à quatre axes consiste à compléter le pliage utilisé pour la réalisation d'une rosace à deux axes. Aux deux plis requis pour une rosace à deux axes, il faut en ajouter un troisième avant de découper. On aura alors $2 \times 2 \times 2$, soit 8 épaisseurs de papier.

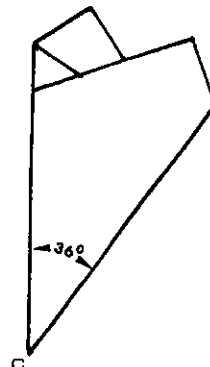
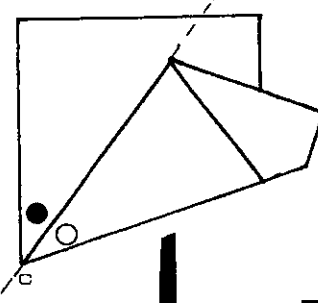
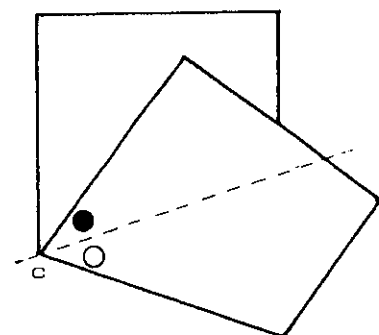
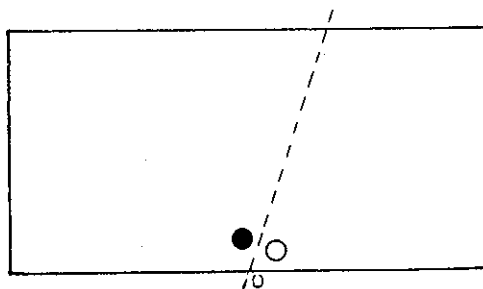
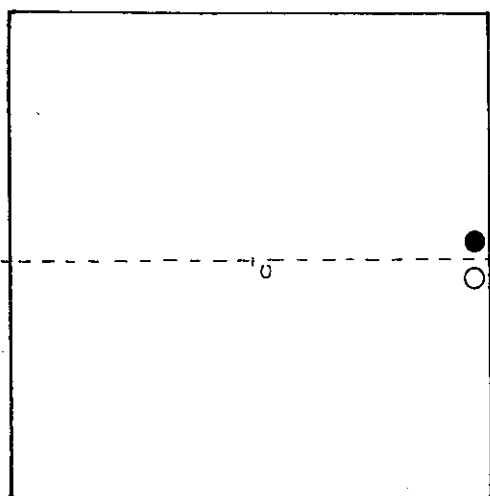
Observations :

On a fait, à trois reprises, des plis qui ont amené les deux sections du papier à se recouvrir complètement. On a alors obtenu une organisation en huit épaisseurs. Le motif de base apparaîtra huit fois. Par pliage, on a généré quatre axes de symétrie.

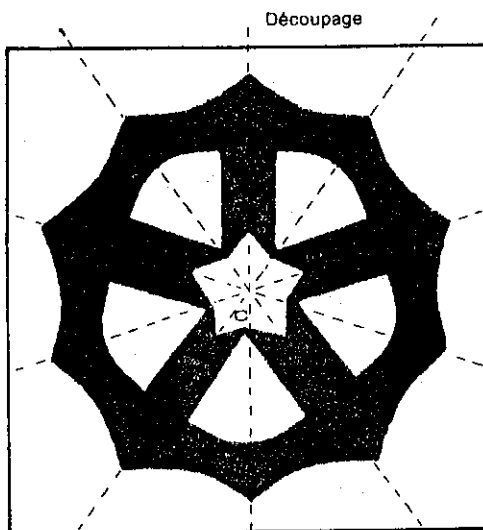
Suite à des rotations d'un quart de tour, soit 90 degrés, la figure coïncide avec sa position initiale. On dira qu'elle admet quatre rotations.

ROSACE (cinq axes)

Pliage



(motif de base)



(figure 6)

Observations :

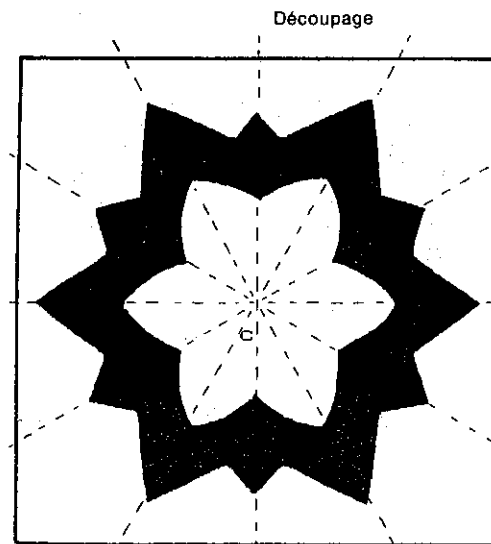
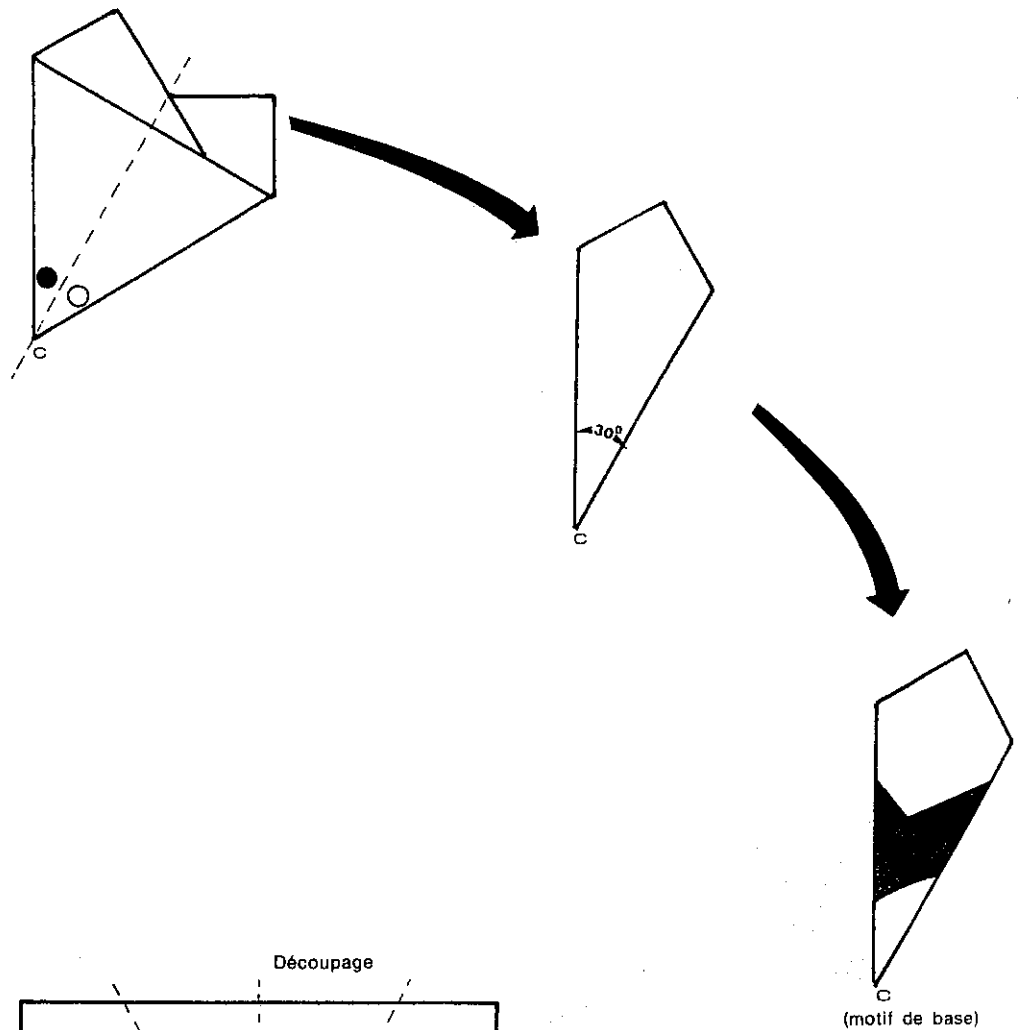
Le premier pliage amène les deux sections du carré de papier à se recouvrir. Les deux pliages suivants produisent deux secteurs semblables, l'un avec huit épaisseurs de papier et l'autre avec deux épaisseurs de papier. Le dernier pliage amène le découpage du motif de base dans un arrangement où on a dix épaisseurs de papier.

On a ainsi généré une figure qui admet cinq axes de symétrie. De plus, à chaque rotation de 72 degrés de centre C, la figure coïncide avec sa position initiale. Elle admet cinq rotations. Le motif de base revient dix fois.

NOTE :

Ce pliage demande davantage d'habileté. Autant utiliser un rapporteur pour les premiers essais. Comme déjà mentionné, un papier mince et des ciseaux de bonne qualité permettront de sortir de ces dix épaisseurs de papier de jolies rosaces bien équilibrées.

ROSACE (six axes)



(figure 7)

Il faut vous reporter 2 pages avant pour retrouver les trois premières étapes du pliage. En effet, construire une rosace à six axes consiste à ajouter une étape au pliage prévu pour réaliser une rosace à trois axes. On aura alors $2 \times 3 \times 2$, soit 12 épaisseurs de papier.

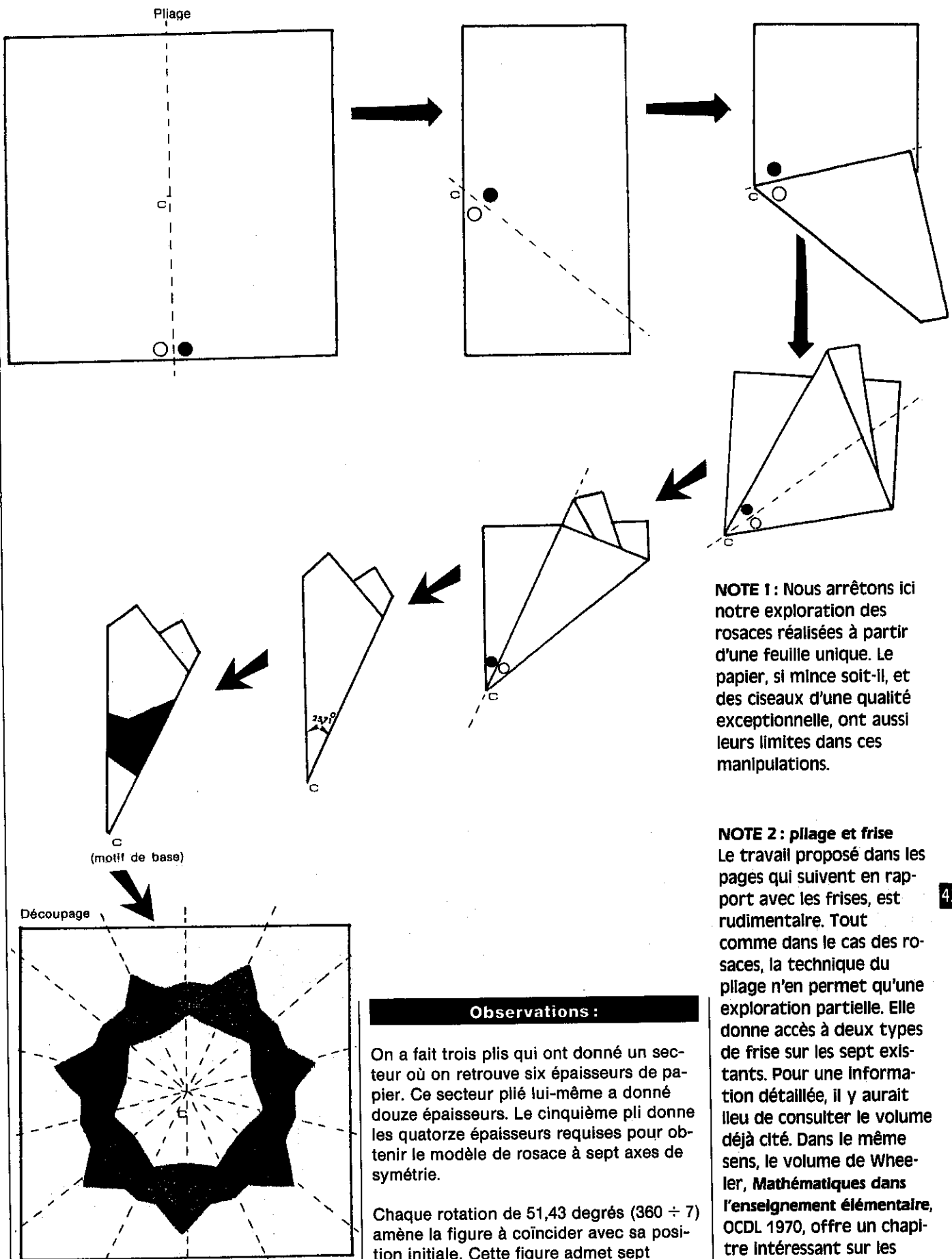
Observations :

Les douze épaisseurs de papier, après découpage et dépliage, vont se répartir en douze secteurs coupés par six axes de symétrie. Chaque secteur a un angle au centre de 30 degrés.

Suite à une rotation de 60 degrés, la figure coïncide avec sa position initiale. On dira qu'elle admet six rotations.

Le motif initial revient douze fois.

ROSACE (sept axes)



NOTE 1 : Nous arrêtons ici notre exploration des rosaces réalisées à partir d'une feuille unique. Le papier, si mince soit-il, et des ciseaux d'une qualité exceptionnelle, ont aussi leurs limites dans ces manipulations.

NOTE 2 : **pliage et frise**
Le travail proposé dans les pages qui suivent en rapport avec les frises, est rudimentaire. Tout comme dans le cas des rosaces, la technique du pliage n'en permet qu'une exploration partielle. Elle donne accès à deux types de frise sur les sept existants. Pour une information détaillée, il y aurait lieu de consulter le volume déjà cité. Dans le même sens, le volume de Wheeler, *Mathématiques dans l'enseignement élémentaire*, OCDL 1970, offre un chapitre intéressant sur les mosaïques.

Observations :

On a fait trois plis qui ont donné un secteur où on retrouve six épaisseurs de papier. Ce secteur plié lui-même a donné douze épaisseurs. Le cinquième pli donne les quatorze épaisseurs requises pour obtenir le modèle de rosace à sept axes de symétrie.

Chaque rotation de 51,43 degrés ($360 \div 7$) amène la figure à coïncider avec sa position initiale. Cette figure admet sept rotations.

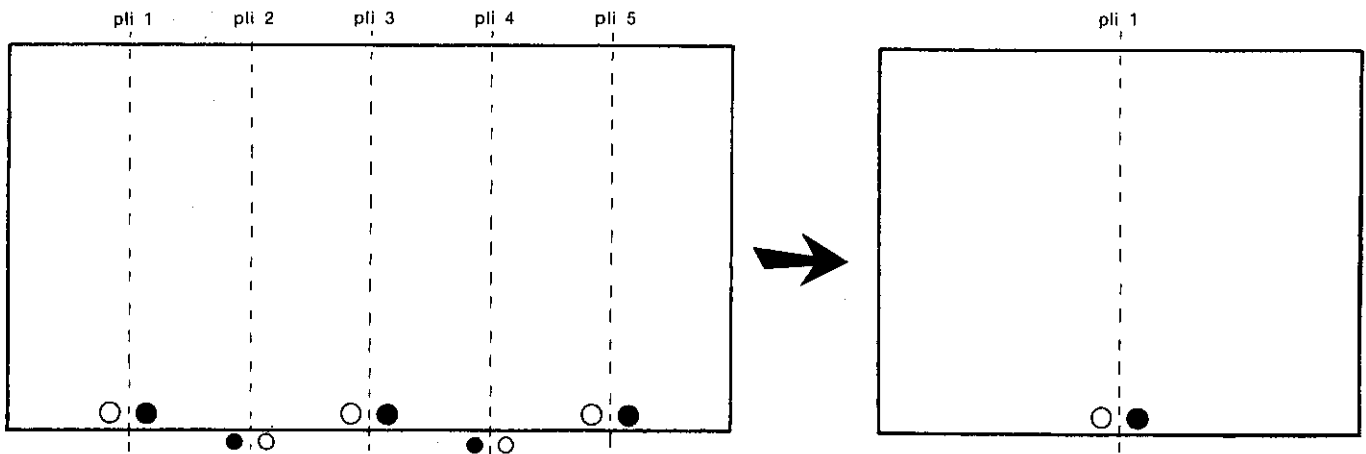
(figure 8)

FRISES

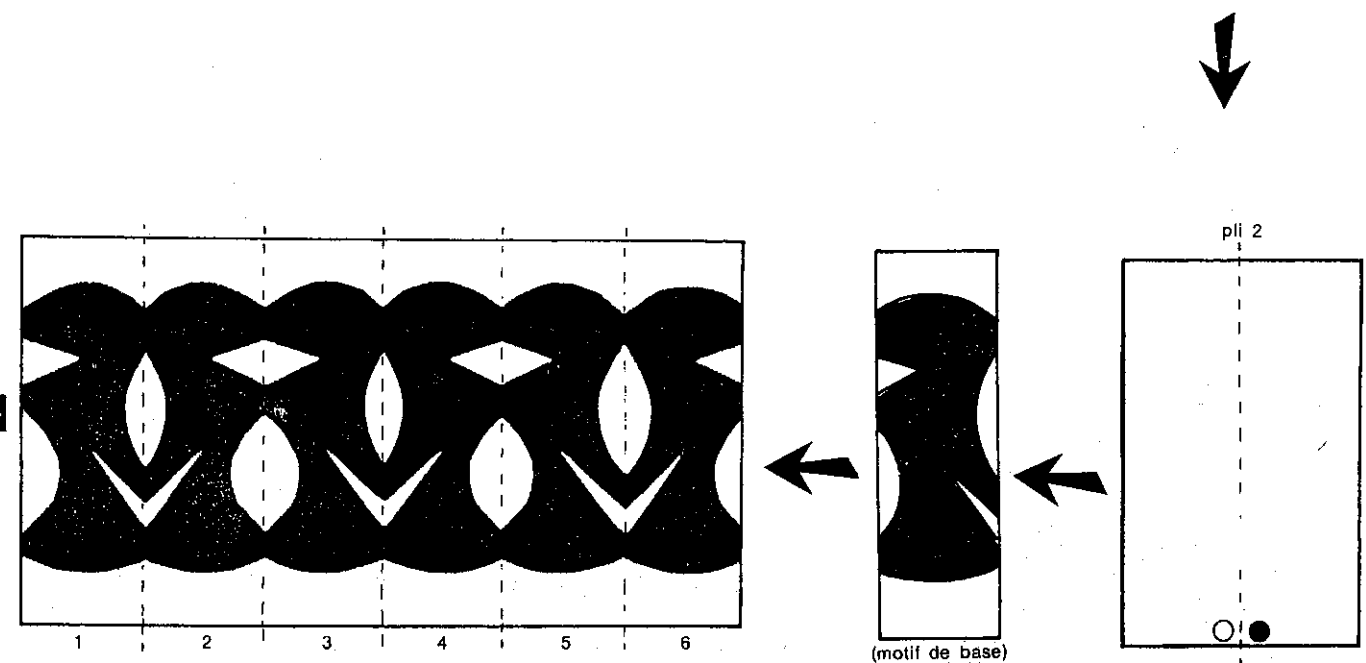
ET NOUS VOICI EN RIBAMBELLE...

Les pliages utilisés pour préparer le découpage d'une frise sont simples et les divers modèles conduisent au même résultat, sans qu'on soit à l'abri d'un mauvais découpage, qui ne mène nulle part.

En voici deux :



Découpage



(motif de base)

Si on numérote les motifs dans l'ordre, deux motifs de même parité donnent l'exemple d'une translation.

Deux motifs de parité différente sont symétriques l'un à l'autre. S'ils ne sont pas adjacents, alors l'axe n'est pas tracé dans la représentation ci-dessous. Vérifiez avec un miroir semi-transparent.

Observations :

Chaque pli devient un axe de symétrie entre le motif découpé et la représentation qui lui est accolée. De même, tout pli devient axe de symétrie entre deux motifs qui se situent à égale distance de part et d'autre de ce pli.

(figure 9)

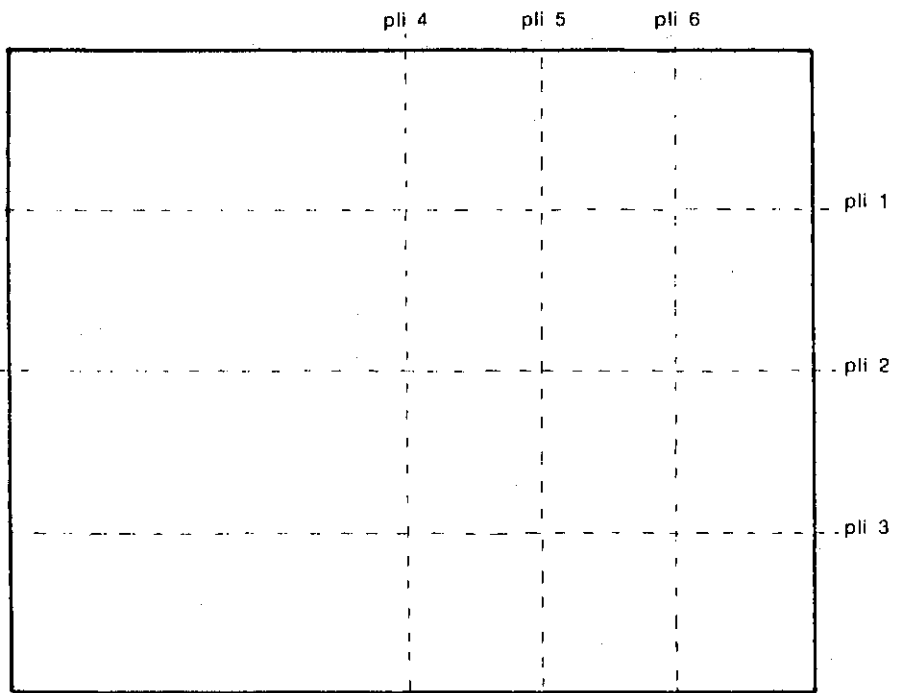
FRISE ET ROSACE

Pliage

On peut faire des frises où le motif va s'étaler sur plusieurs bandes en effectuant plusieurs pliages à l'horizontale et à la verticale.

Dès lors, à partir de certains points, on pourra identifier des rosaces.

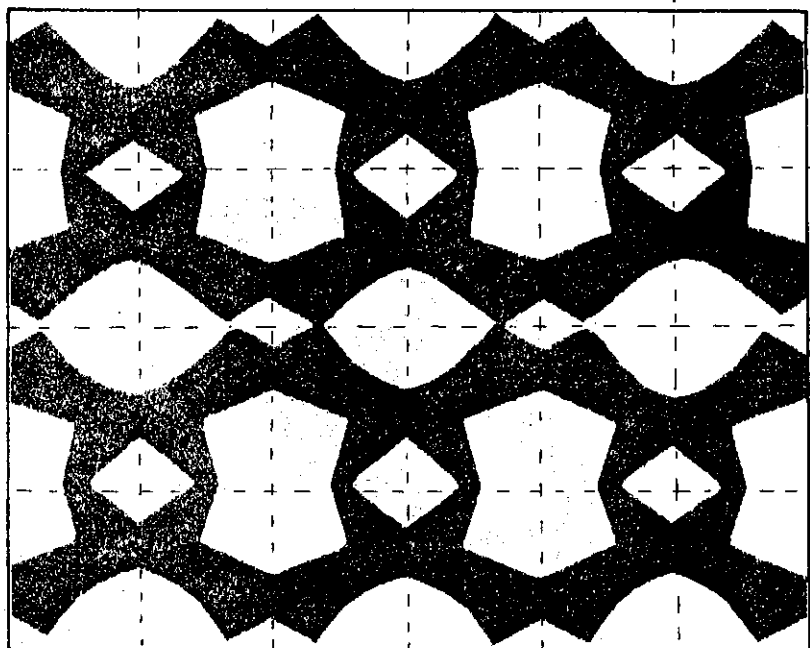
Dans l'ensemble de la figure, on verra que le motif de base a été transformé par isométrie (symétrie, translation, rotation).



Découpage



(motif de base)



NOTE :

Les documents produits par l'association sous le nom de **Transformations I et Transformations II** permettent une exploration des isométries dans un autre contexte.

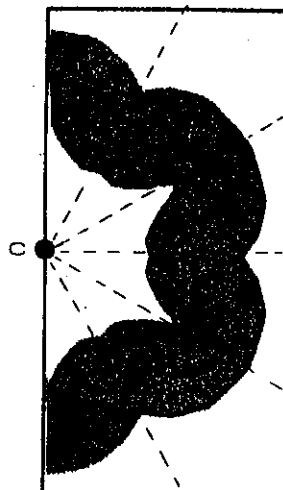
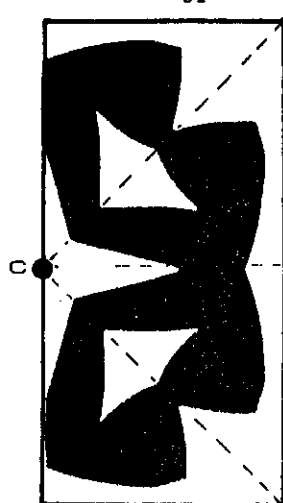
(figure 10)

Ce modèle a été réalisé à partir de deux bandes.

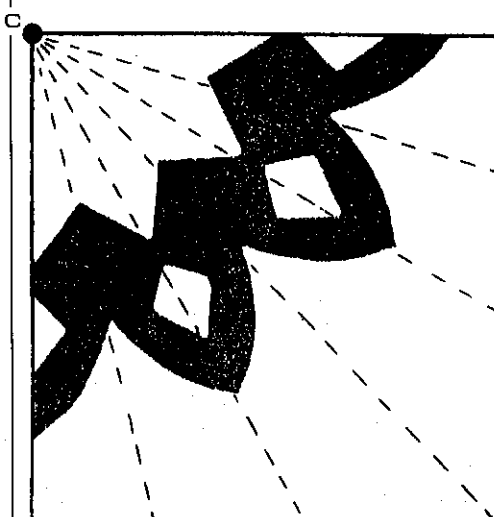
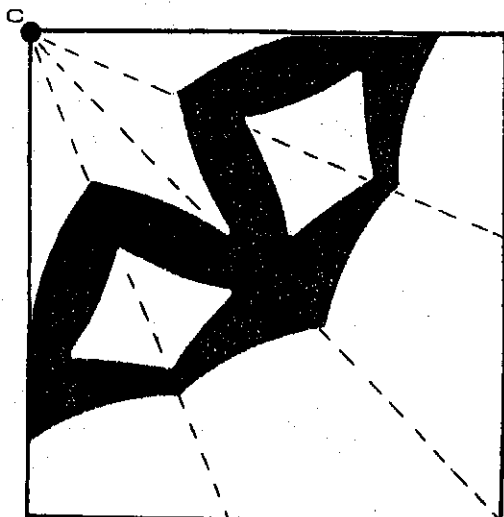
Le tableau qui suit fait état des recommandations déjà suggérées pour le découpage de rosaces. Les pliages de type A donnent une rosace complète. Le type B produit une demi-rosace et le type C, un quart de rosace.

Nombre d'axes	PLIAGE			Angle au centre du motif
	TYPE A	TYPE B	TYPE C	
	Nombre de feuilles en épaisseur à couper			
1	2			180 degrés
2	4	2		90 degrés
3	6	3		60 degrés
4	8	4	2	45 degrés
5	10	5		36 degrés
6	12	6	3	30 degrés
7	14	7		25,71 degrés
8	16	8	4	22,5 degrés
9	18	9		20 degrés
10	20	10	5	18 degrés
11		11		16,36 degrés
12		12	6	15 degrés
13		13		13,84 degrés
14		14	7	12,85 degrés
15		15		12 degrés
16		16	8	11,25 degrés
17		17		10,58 degrés
18		18	9	10 degrés
19		19		9,47 degrés
20		20	10	9 degrés

Modèle de type B :



Modèle de type C :

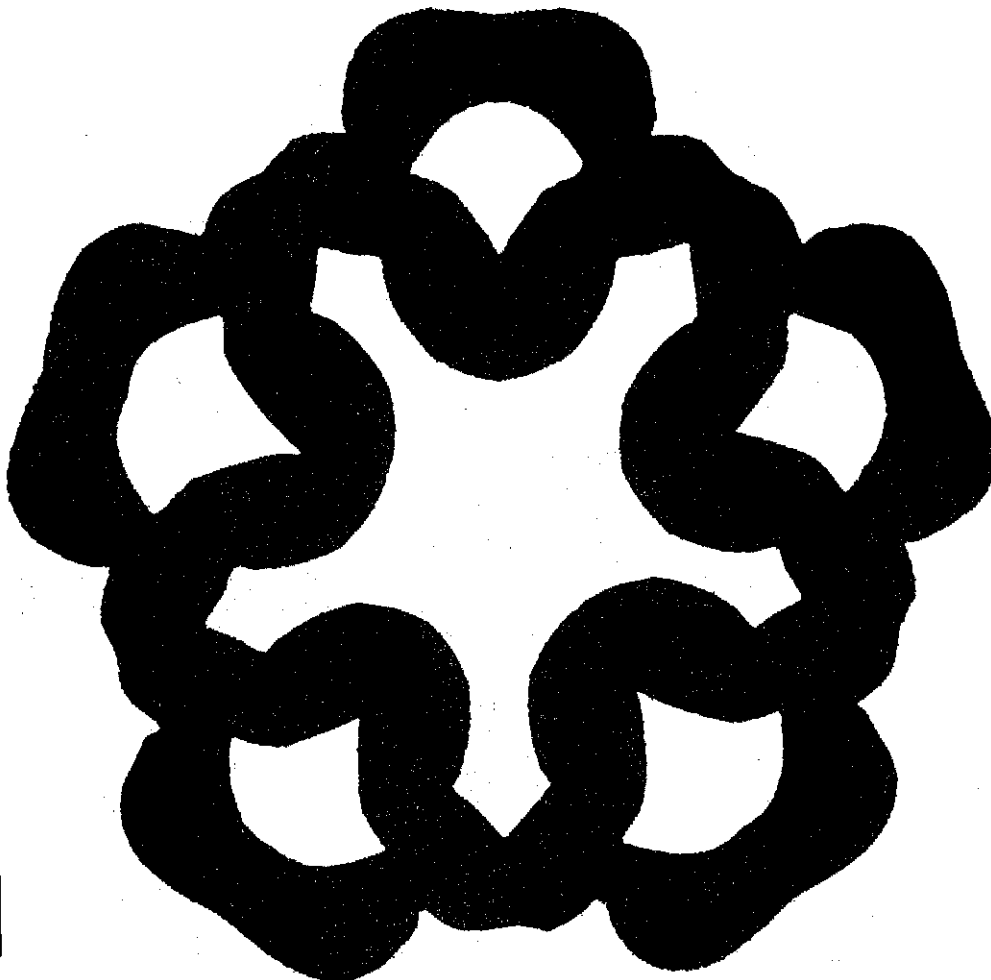
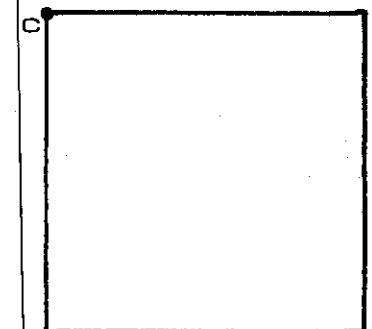
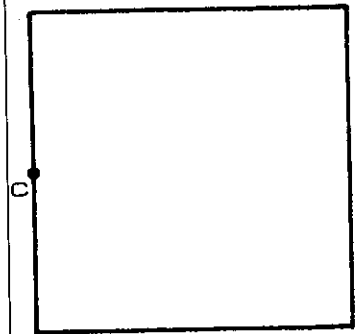
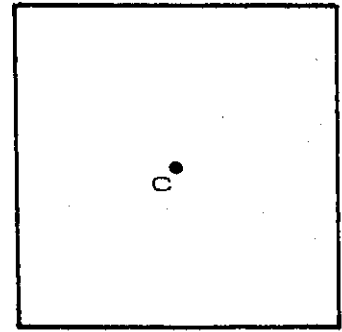


LIMITES DU MATÉRIEL

Les modèles développés nous permettent d'imaginer des rosaces où le motif de base sera répété plusieurs fois ainsi que des frises qui se prolongeront longuement. Cette imagination fertile est ramenée aux limites de la réalité définie par le papier utilisé, la qualité des ciseaux et le nombre de pliages successifs qui dépassent difficilement quatre ou cinq. En effet le nombre de feuilles en épaisseur peut atteindre seize après quatre plis et trente-deux possible de faire de tels pliages et si on a la force nécessaire au découpage, il n'en demeure pas moins que le motif choisi sera déformé.

On peut cependant jouer d'astuce pour diminuer le nombre de feuilles en épaisseur et faciliter la coupe. Pour les rosaces, il suffit de modifier le pliage de façon à ne faire qu'un secteur de la rosace totale. Dans les modèles suggérés, tous les pliages passaient par le point central de la feuille (figure A). On pourrait déplacer ce point de convergence comme on l'indique dans la figure B et la figure C et obtenir respectivement la moitié ou le quart d'un motif.

Ces modifications permettent de faire des rosaces beaucoup plus grandes en partant des pièces de papier suggérées au début (carré de 10 cm de côté). Resteront les difficultés de découper deux ou quatre fois le même motif et d'ajuster ces pièces. Pour les frises, leur longueur est fonction des éléments qu'on voudra bien découper et de leurs ajustements bout à bout.



Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1988

Avec réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom ou établissement _____
 Adresse complète _____
 Code postal et ville _____

Pour les 4 numéros de :
 1983 1987
 1984 1988
 1985 1989
 1986 1990

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre payé par chèque
 désire facture
 nouveau abonné

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Supplément tarif avion	
Pour un an	100 F	80 F	+ 40 F	Total à payer
Par année supplémentaire	+ 75 F	+ 60 F	+ 40 F	

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 88 -

REDUCTIONS 10% pour les abonnés au Plot 10% pour plus de 500 F d'achat

Nom : _____

Adresse : _____

Prix unitaire - Port compris		Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique			
40F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*			
40F	Aléatoire			
40F	Papiers accrochés			
40F	Pliages et mathématiques			
40F	Pavages et symétries			
80F	Dossier " Spécial π " (300 p. Adcs)			
20F	Les Dossiers " Ludi-Math " (Poitiers)	n° 1	n° 2	
40F		n° 3	n° 4	
50F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10F	Affiches pour la classe : «Horizons Mathématiques»		<input type="checkbox"/>	
	60 x 40 cm «Polyèdres dans l'espace» «l'Univers mathématique» 2 pavages hyperboliques à colorier.		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
40F	Pochettes pour rétroprojecteur - n°s 1 à 14	(n°s 4 et 5)	40 F	
80F	Pochettes de diapositives - n°s 2 à 6 (n° 1 : 100F)		n°	
Frais d'envoi forfaitaire :			15 F	
				sous-total
- 10% pour les abonnés au PLOT				
- 10% pour plus de 500F d'achat				
				TOTAL à Payer

* Plot n° 39 ou Géométrie dédéeiste (Rouen)

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

NOUVEAUTÉ

**PLOT
MATÉRIEL
1988
100 pages**

