plot

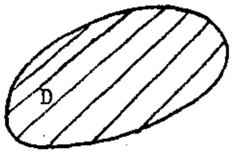
BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n°9

AIRES ET PÉRIMETRES

par Mustapha RAIS (Poitiers - Vienne)

Une conférence prononcée à Niort en 1978, et reprise dans les cahiers du Groupe du Clain.



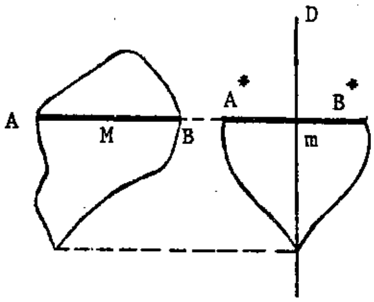
1) On considère dans le plan une courbe fermée sans point double, on appelle D le domaine entouré par cette courbe. A ce domaine D il est possible ([2]) d'attacher un certain nombre de quantités mathématiques parfois d'origine physique ou mécanique : Par exemple l'aire A de D, son périmètre L, son moment polaire d'inertie I, sa capacité électrostatique C, sa rigidité torsionnelle P, sa fréquence principale Les questions auxquelles s'intéressent les auteurs de [2] peuvent être décrites par les deux résultats suivants qu'ils démontrent parmi d'autres :

- De tous les <u>triangles d'aire donnée</u> A, le triangle <u>équilatéral</u> est celui qui a le plus petit périmètre, le plus petit moment d'inertie, la plus petite capacité électrostatique, la plus petite fréquence principale mais la plus grande rigidité torsionnelle.

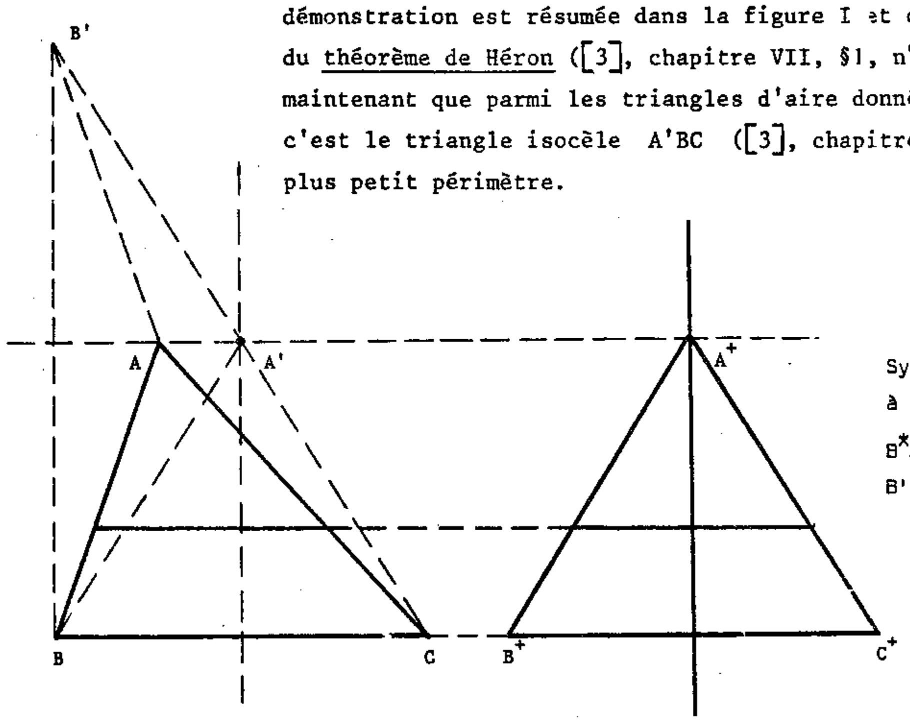
- De tous les <u>quadrilatères d'aire donnée</u> A, le <u>carré</u> est celui qui a le plus petit périmètre, ..., mais la plus grande rigidité torsionnelle.

2) L'étude du comportement du périmètre et de la fréquence principale, à <u>aire constante</u>, est présentée de manière très agréable par G. Polya dans [1]. L'outil principal est la <u>symétrisation de Steiner</u>, dont on peut donner une définition de la manière suivante : Soit D une droite du plan. La symétrisation transforme une figure F en une figure F^* qui a les propriétés suivantes : F^* est symétrique par rapport à D.

Toute perpendiculaire à D qui rencontre l'une des deux figures F et F^* rencontre nécessairement l'autre et les deux intersections ont la même longueur, celle de F^* consistant en un intervalle. En pratique, pour "tracer" F^* à partir de F, on abaisse de chaque point M de F la perpendiculaire à D, on "découpe" l'intersection AB de cette perpendiculaire avec F et on la fait glisser perpendiculairement à D jusqu'à l'amener à cheval symétriquement sur D : les longueurs A^*B^* et AB sont égales, et m est le milieu de A^*B^*.



3) Par exemple, si on symétrise (figure I) le triangle ABC par rapport à une perpendiculaire à un de ses côtés, on obtient un triangle <u>isocèle</u> $A^*B^*C^*$. Il est important de remarquer que les deux triangles ABC et $A^*B^*C^*$ ont <u>la même surface</u> (même base et même hauteur). Par contre, le périmètre de $A^*B^*C^*$ est <u>inférieur</u> à celui de ABC (la démonstration est résumée dans la figure I et c'est un cas particulier du <u>théorème de Héron</u> ([3], chapitre VII, §1, n° 2)). Du coup, on sait maintenant que parmi les triangles d'aire donnée et ayant BC comme côté, c'est le triangle isocèle A'BC ([3], chapitre VII, §1, n° 3) qui a le plus petit périmètre.



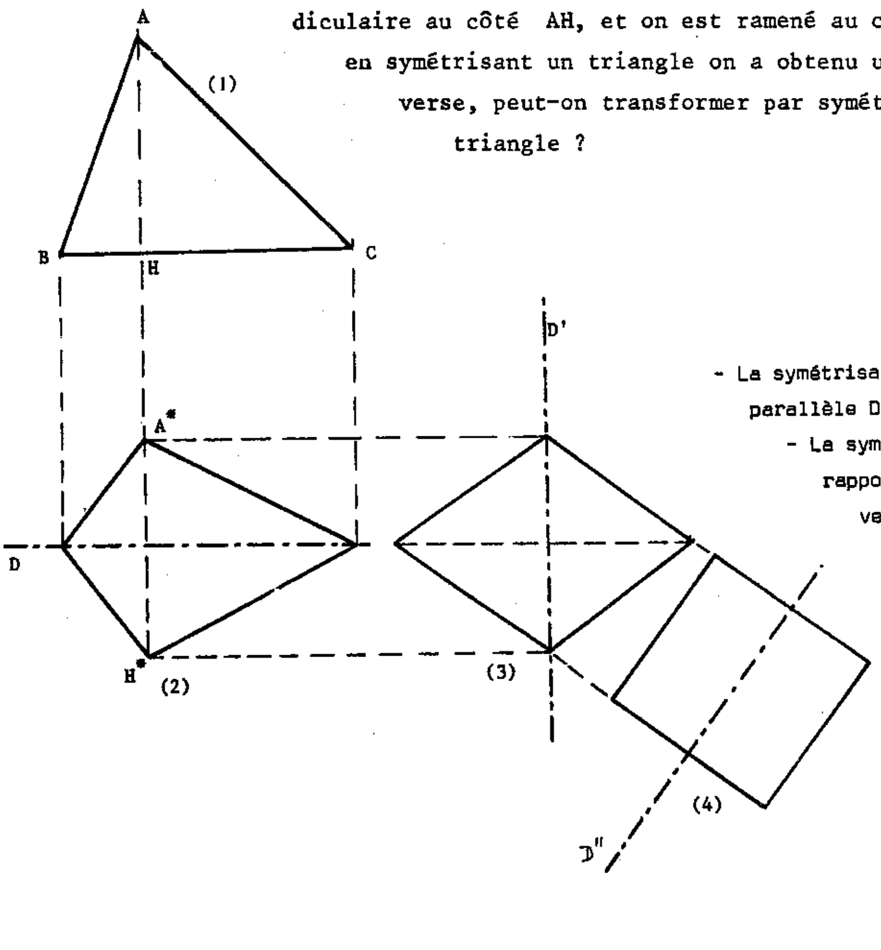
<u>Figure I</u>

Symétrisation d'un triangle par rapport à la médiatrice d'un se ses côtés.

$B^*A^* + A^*C^* = BA' + A'C = B'A' + A'C = B'C$

$B'C \quad B'A + AC = BA + AC$

4) Si on symétrise le triangle ABC par rapport à une parallèle D au côté BC, (figure II), on obtient un quadrilatère, mais ici aussi l'aire n'a pas changé et le périmètre a diminué (en fait, on a symétrisé les deux triangles ABH et AHC par rapport à une perpendiculaire au côté AH, et on est ramené au cas précédent). En tous cas, en symétrisant un triangle on a obtenu un quadrilatère. En sens inverse, peut-on transformer par symétrisation un quadrilatère en triangle ?



<u>Figure II</u>

- La symétrisation du triangle ABC par rapport à la parallèle D à son côté BC donne le quadrilatère (2).
- La symétrisation du quadrilatère (2) par rapport à la parallèle D' à sa diagonale verticale donne le losange (3).
- La symétrisation de losange (3) par rapport à une perpendiculaire D" à un de ses côtés donne le rectangle (4).

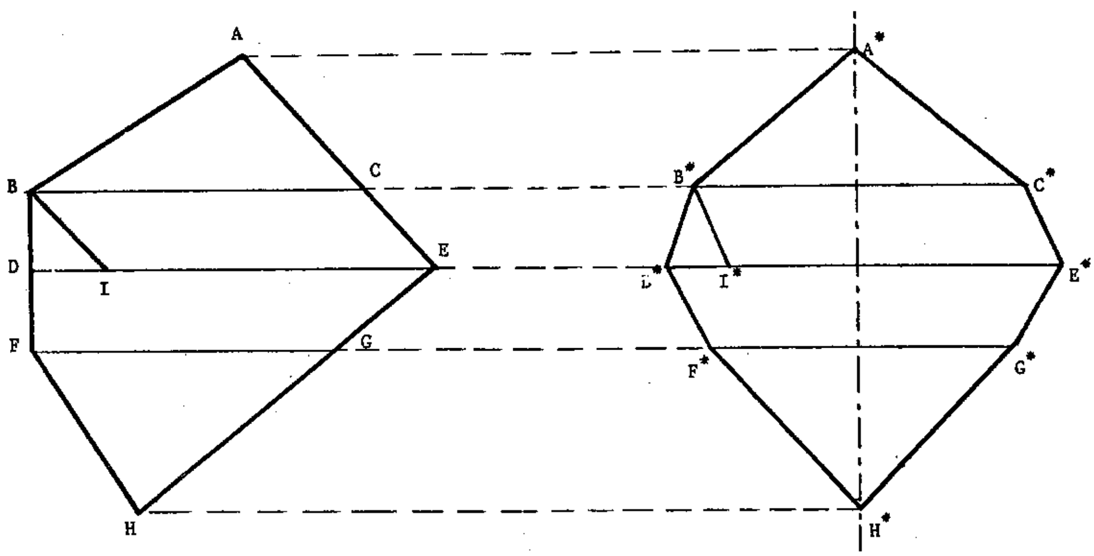
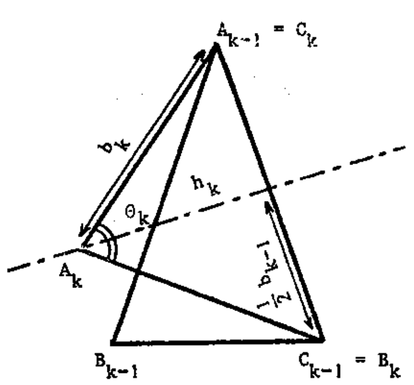
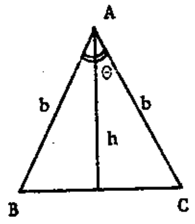


Figure III $B^*D^* + C^*E^* = B^*D^* + B^*I^*$ $BD + BI = BD + CE$

5) Dans la figure III, on a tracé le symétrisé d'un pentagone ABFHE. Le résultat est un heptagone, qui a même surface mais un périmètre inférieur. Pour démontrer ce résultat, on découpe le pentagone en triangles et trapèzes. Les deux trapèzes DEGF et $D^*E^*G^*F^*$ ont même aire (mêmes bases et même hauteur). Pour démontrer que $B^*D^* + C^*E^*$ est inférieur à $BD + CE$, on mène par B^* la parallèle B^*I^* à C^*E^* et par B la parallèle BI à CE et on compare les triangles BDI et $B^*D^*I^*$ (voir figure III).

6) Quand on a rendu isocèle un triangle par symétrisation, on peut le symétriser à nouveau par rapport à la médiatrice d'un des deux côtés égaux. On obtient un autre triangle isocèle et on peut recommencer. On obtient ainsi une suite de triangles isocèles ayant tous la même surface, qui deviennent de plus en plus proches du triangle équilatéral ayant la même surface. Dans la figure IV, on a décrit le passage du (k-1)ème triangle isocèle au kième. La suite des triangles isocèles "converge" vers le triangle équilatéral.





$S = \frac{1}{2} b^2 \sin \theta$

Figure IV

Par récurrence sur k, on trouve :

$b_{k-1}h_k = 2S$

$(\frac{1}{2}b_{k-1})^2 + h_k^{\,2} = b_k^{\,2}$ ou encore :

$(\frac{1}{2}b_{k-1})^2 + \frac{4S^2}{(b_{k-1})^2} = b_k^{\,2}$

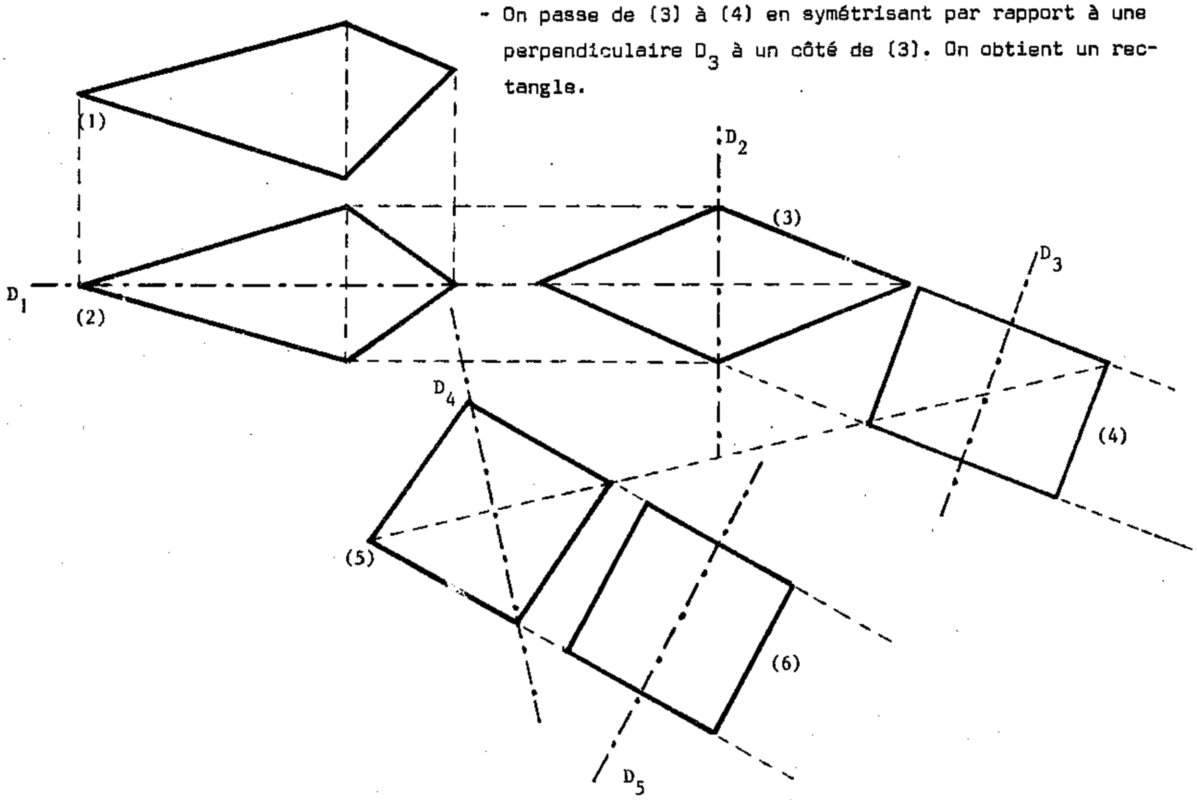
$\lim_k b_k^{\,2} = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ et $\lim_k \theta_k = 60°$

7) Dans la figure V, on a décrit la procédé qui permet par une suite de symétrisations d'un quadrilatère de se rapprocher indéfiniment du carré ayant même surface.

Figure V

La symétrisation d'un quadrilatère quelconque (1) par rapport à une droite D_1 perpendiculaire à une de ses diagonales le transforme en le quadrilatère (2) qui est symétrique par rapport à une de ses diagonales.

- En symétrisant (2) par rapport à une perpendiculaire D_2 à l'axe de symétrie D_1, on obtient le losange (3).
- On passe de (3) à (4) en symétrisant par rapport à une perpendiculaire D_3 à un côté de (3). On obtient un rectangle.



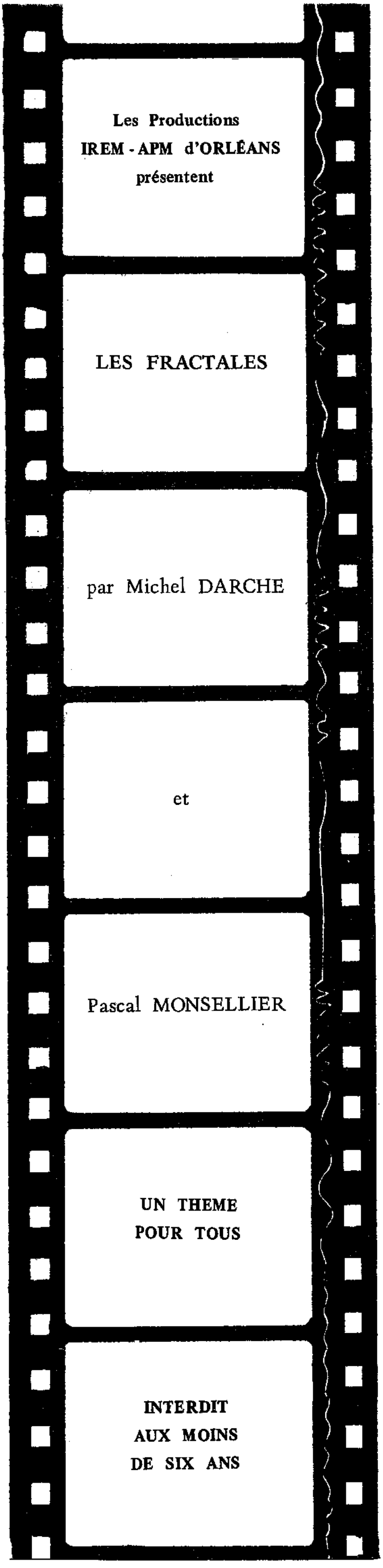
- On repasse à un losange (5) en symétrisant par rapport à une perpendiculaire à une diagonale.
- On repasse à un rectangle comme on est passé de (3) à (4).
- On repasse à un losange .... etc.

BIBLIOGRAPHIE

(1) *George POLYA : "Circle, Sphere, Symmetrisation and some Classical Physical Problems", in E. Beckenbach, Modern Mathematics for the Engineer, Second Series, Mc Graw Hill, 1961 (p. 420 - 441).*

(2) *George POLYA & G. SZEGO : "Isoperimetric Inequalities in mathematical Physics", Annals of Mathematics Studies, n° 27, Princeton University Press, 1951.*

(3) *R. COURANT & H. ROBBINS : "What is mathematics", Oxford University Press, 1948 (particulièrement le chapitre VII).*



Nous vous proposons dans les pages qui suivent deux mini-thèmes pour la (les) classe(s). Ils n'ont pas de points communs, sauf d'être issus d'un ensemble de lectures et de réflexions que nous avons baptisées FRACTALES (voir page 22).

Le mot "Thème" traîne partout ces temps-ci. Chacun lui donne la signification qu'il veut. Disons ce que nous y mettons, nous.

FRACTALES est un thème à support mathématique, comme les thèmes qui s'intitulent "Carrés magiques", "Fibonacci", "le cube" (1) ... Ces thèmes parlent d'objets mathématiques qui deviennent peu à peu familiers à l'élève sans devenir une notion d'enseignement proprement dite. Ils peuvent être abordés à tous les âges, ou presque (disons du CP à l'Université... du 3è âge), avec des moyens et des objectifs appropriés à chacun.

Ce type de thème se distingue nettement des autres possibilités que nous avons recensées :
- thèmes à contenus notionnels ("vectoriel" , "les transformateurs", "approche des probabilités" (1) ...) qui permettent de cerner une notion mathématique à enseigner.
- thèmes sur l'homme et son milieu ("le pêche en mer", "les épidémies", "train-métro-autobus" (1) ...) qui permettent d'aborder des concepts mathématiques divers à l'aide d'un sujet tiré de l'environnement
- thèmes interdisciplinaires ("énergies pour demain", "motifs répétitifs" (1) ...) où chaque matière concernée peut s'investir.
- thèmes à support a-disciplinaire qui concernent un comportement ou une activité d'apprentissage qui ne sont pas uniquement liés à une ou plusieurs notions d'enseignement (se repérer, conjecturer ...)
- etc ....

(1) Thèmes qui existent, ici ou ailleurs, ou qui pourraient exister !

Les thèmes à support mathématique (comme fractales) même - et surtout - s'ils sont dégagés d'une notion précise à enseigner, nous paraissent essentiels pour l'apprentissage des grandes notions que les élèves doivent acquérir. Par exemple "Carrés Magiques" (2) est un thème qui n'est d'aucun secours pour intégrer le concept d'espace vectoriel s'il n'est proposé qu'en Seconde. Par contre, s'il est un sujet d'activités dès le premier cycle (ou, pourquoi pas, dès le Primaire), il devient peu à peu un "objet-support concret" qui permet des représentations utiles pour les apprentissages : le concept d'espace vectoriel dans le second cycle s'insèrera dans un long cheminement; il pourra avoir un sens en transcendant le "concret" des carrés magiques.

De même nous pensons que le thème "Fractales" peut être manipulé assez tôt et que les objets qui le constituent peuvent jouer le rôle "d'objet-support concret" pour l'apprentissage de notions comme, par exemple, celles de l'Analyse. Des concepts comme "limites" ou "infini dénombrable" sont partout présents dans ces pages, et nous avons vu des élèves de 5è manipuler des suites sans difficultés majeures (sans "savoir" bien entendu ce qu'était une suite).

Pour finir, disons que :

- l'ensemble FRACTALES est composé actuellement d'une dizaine de thèmes, et que nous en publions ci-après deux.
- ces thèmes ont été expérimentés sous des formes plus ou moins provisoires, avec des groupes allant du CP à des enseignants en stage à l'Irem, en passant par des élèves du Secondaire (1er et 2è cycle) et des élèves-maîtres.
- le travail proposé est et demeurera provisoire . On peut rêver, et imaginer que circuleront bientôt entre les enseignants intéressés non pas des textes figés comme celui-ci, mais des dossiers évolutifs où chacun apportera sa pierre à la réflexion commune, et qui permettront la constante évolution nécessaire à l'expression d'une pensée collective en action ...

On peut rêver... et on peut commencer à le réaliser. Nous y pensons.

(2) dont l'APM a fait la première brochure à "thème" (Publication APM n° 10. 1975)

AU PRINTEMPS TOUS LES ARBRES POUSSENT ...

CADRE

Population : de la Maternelle à l'Université du 3è age.

Eglise St Aignan. Orléans.

Contenus mathématiques :

- dénombrements, arbres
- suites, récurrence
- topologie
- homothéties, angles

Intentions :

Observer la croissance des arbres, et les arbres eux-mêmes, en toute saison.

Objectifs : ?

Matériel : des arbres.

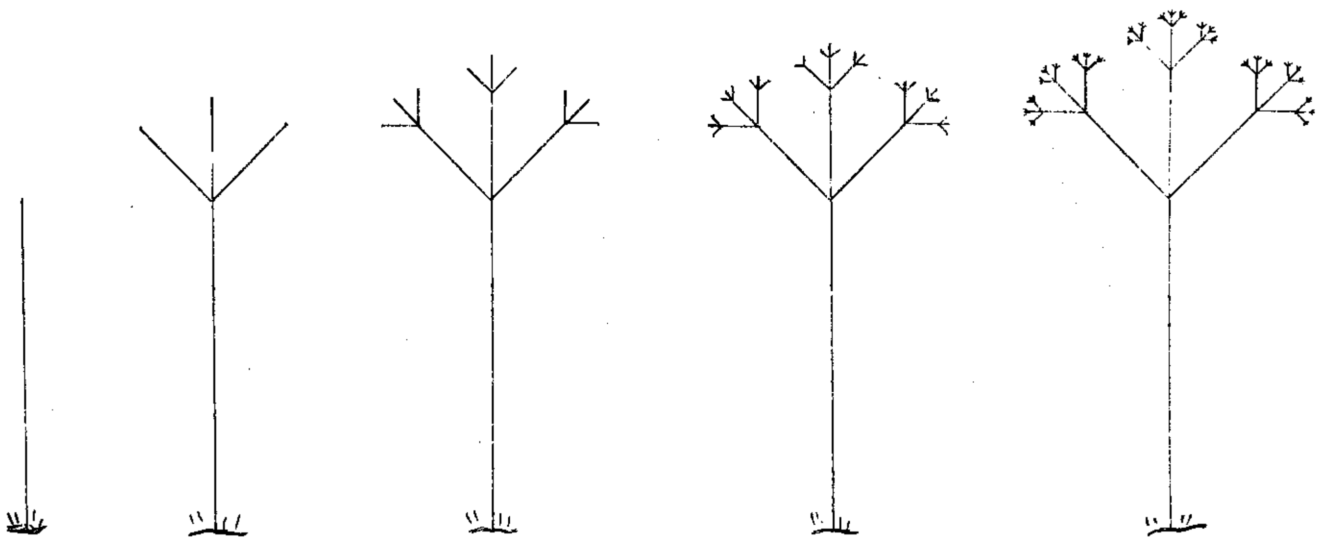
Méthode :

Opération coup de pouce.

Bibliographie :

- P. STEVENS : Patterns in nature (Press Book - Boston 1974)
- A. DELEDICQ : les Doums (in Bulletin Pentannuel n° 14 - Cedic Décembre 1977)
- Grand N n° 6 (Irem-Crdp Grenoble Mai 1975)
- Math Ecole n° 73 (1976), n° 75 (1976) et n° 87 (1979) (Edité à Genève)

① De printemps en printemps



et ainsi de suite, de suite ....

? Que peut-on en dire (nombre d'extrémités, longueur des branches ... etc) ?

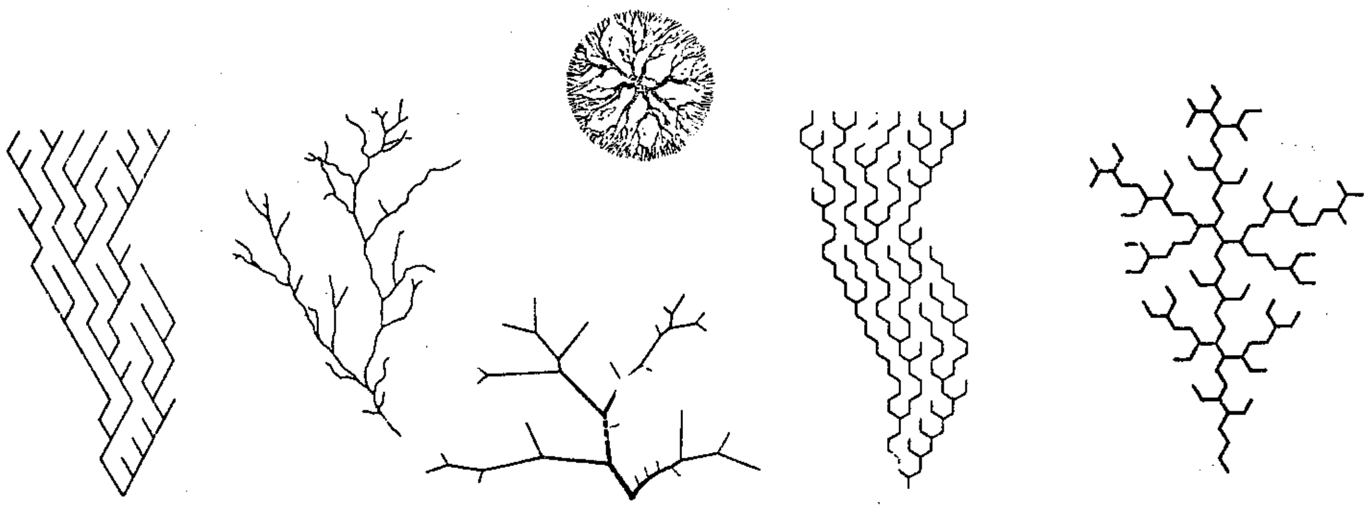
Ces représentations peuvent être introduites comme outils de résolution d'exercices en tout genre : dénombrement, numération en base ... et ceci avec des enfants de 6 ans.

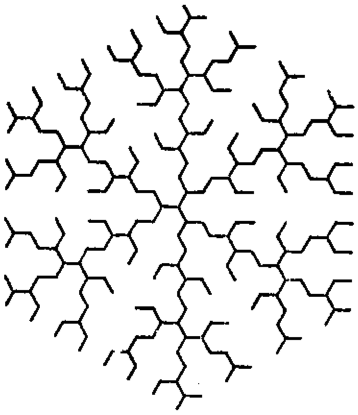
Extensions et généralisations possibles : au lieu d'aller de 3 en 3, on peut aller de 2 en 2, de 4 en 4, de 2 en 3 puis de 3 en 4 ....

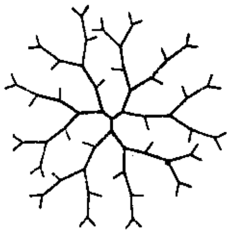
② Ressemblances (source : Patterns in nature cf Bibliographie).

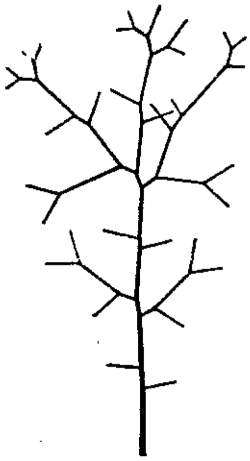
Certaines des figures ci-dessous ont le même principe de construction.

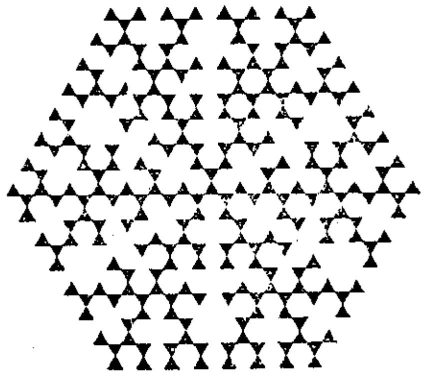
? Lesquelles ?







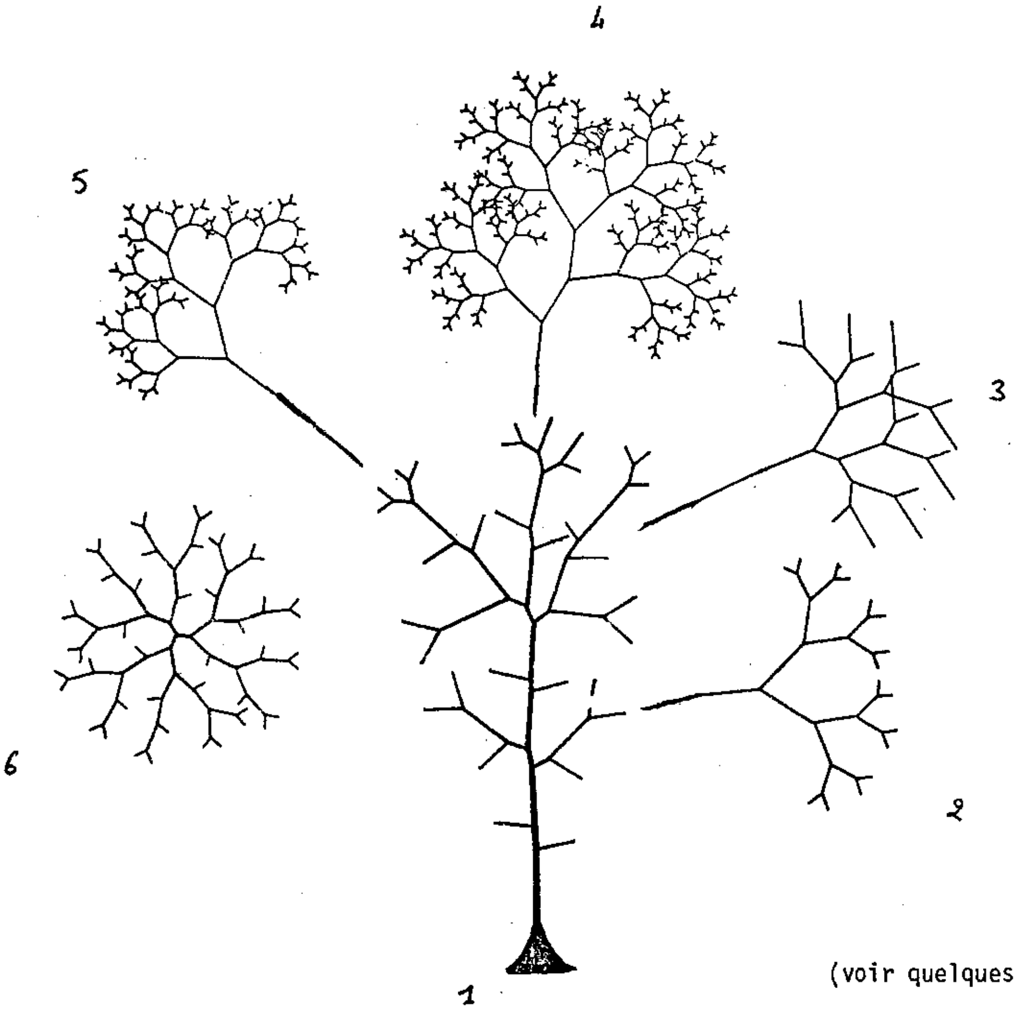




(3) Quel est le mode de croissance ?

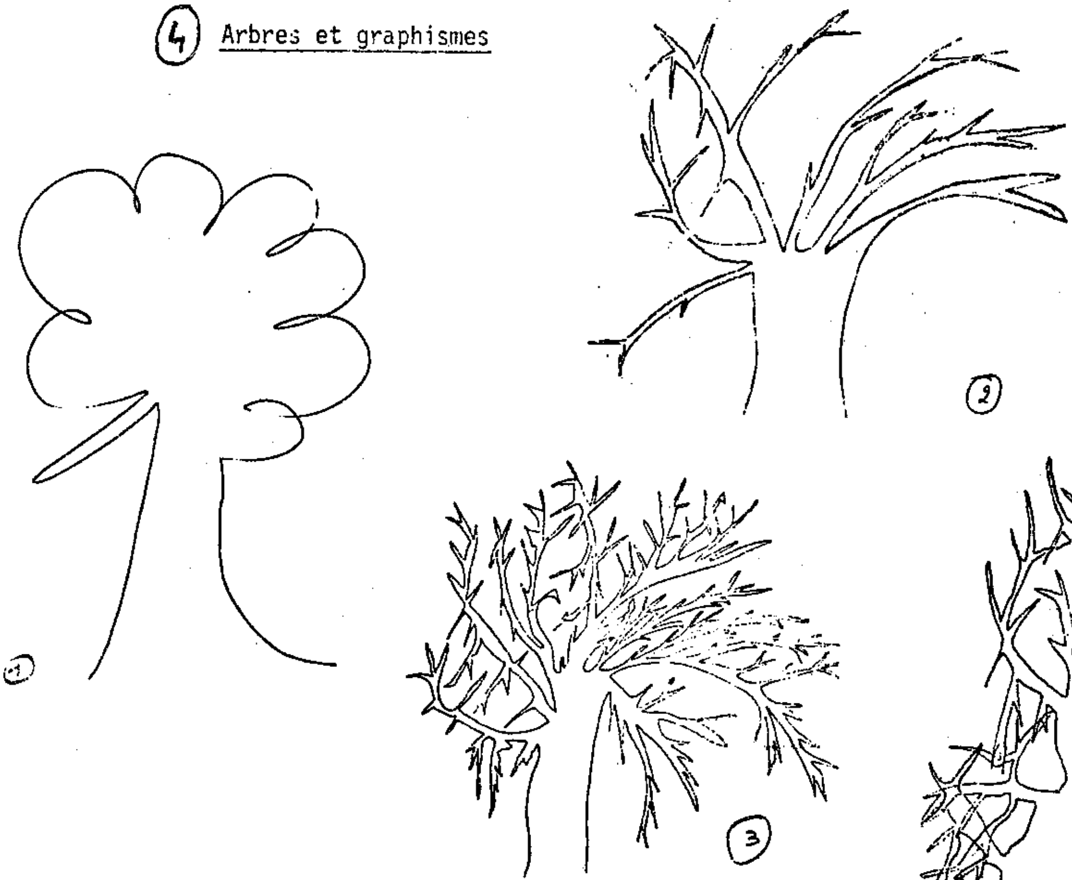
Observez les générations successives de branches.

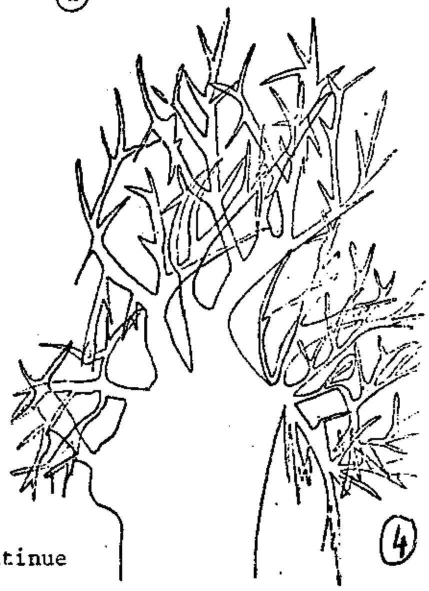
? Pouvez-vous en déduire le "moule" qui se reproduit d'année en année ?



(voir quelques solutions page 14).

(4) Arbres et graphismes





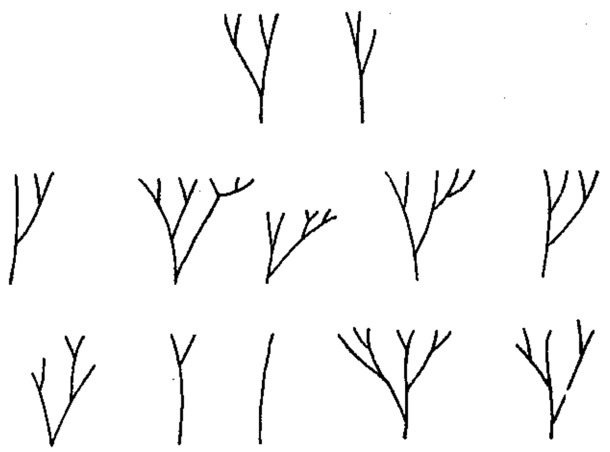
Ecole Normale d'Institutrices d'Orléans. FPI 1979.
La consigne donnée était : dessiner un arbre à l'aide d'une ligne continue en une minute (1), deux minutes (2), trois minutes (3), quatre minutes (4).

(5) Les palmiers "doums" (source : Pentannuel n° 14; cf Bibliographie)

LES DOUMS

André DELEDICQ

Au Niger, une certaine sorte de palmiers s'appelle un « doum ». Voici le dessin des branches de quelques uns de ces arbres :



«A les voir», comment se développent ces arbres ?

Et combien y a-t-il de «sortes» de doums à 3 branches ? et à 4 branches ?

Quelques questions au sujet de la «modélisation» des doums :

- Comment exprimer que deux doums sont d'une même «sorte» ?
- Combien y a-t-il de «sortes» de doums à 5 extrémités ?
- Trouver un code tel que deux doums d'une même «sorte» aient le même codage.
- Comment trouver tous les doums à 6 extrémités à partir des **dessins** des doums à 5 extrémités ?
- Comment trouver tous les doums à 6 extrémités à partir des **codes** des doums à 5 extrémités ?

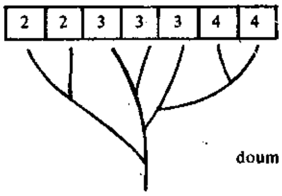
Pour nous, il s'agit de la même «sorte» de «4 branches» !

Les stagiaires ont proposé le codage suivant :

Un doum est codé par une suite de nombres naturels de longueur égale au nombre d'extrémités du doum : chaque terme de la suite indique le nombre de divisions rencontrées entre le pied et l'extrémité correspondante.

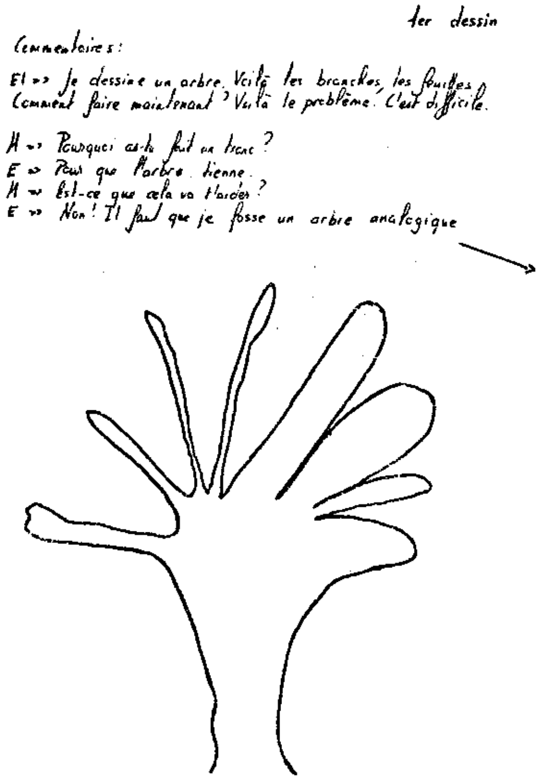
Remarque : Les «chiffres» du code sont rangés par ordre croissant. Il y a de nombreuses questions à se poser au sujet de ce codage...

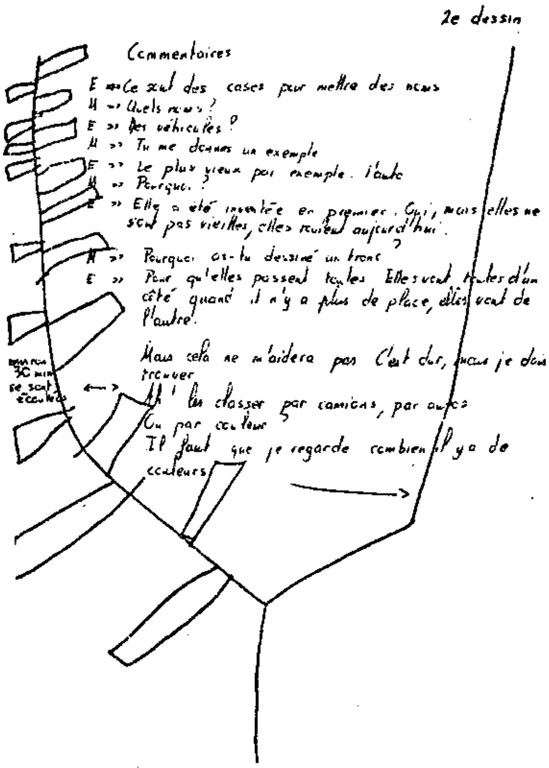
Exemple :



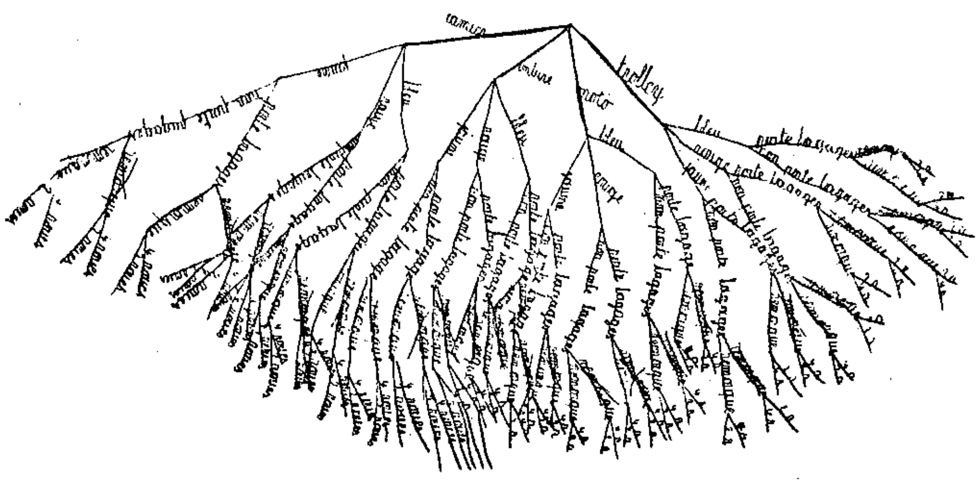
⑥ Les arbres à l'école élémentaire

Se référer aux Bulletins de "Grand N" et de "Math Ecole" cités dans la Bibliographie. Voici par exemple des extraits de "Math Ecole".





Les enfants sont patients et persistants dans leur tâche. Il s'en est trouvé pour dessiner des arbres «tentaculaires» qui rendent difficile une analyse féconde. L'arbre reproduit ci-après, témoigne de l'acharnement de certains enfants à aller au bout d'un travail.



Extrait de "Math Ecole" n° 87 (Mars 1979)

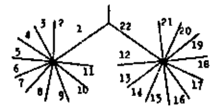
Au tableau: $\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 10 \\ \hline \end{array}$

Par groupe, les enfants cherchent à «habiller» cette opération. L'histoire retenue est la suivante:
Dix boissons différentes peuvent être servies dans deux verres de tailles différentes. Combien y a-t-il de possibilités de consommer de façon variée ?
Chaque équipe cherche une représentation possible et on en fait la récapitulation au tableau noir: un élève dessine un diagramme fléché, un autre établit un tableau cartésien, un troisième construit un arbre.

L'aspect du deuxième arbre surprend un peu les enfants qui ont quelques doutes sur sa validité ! Après examen par rapport à la situation concrète, l'unanimité est faite.
Par ailleurs, certains enfants associent chaque multiplication à un arbre précis, tandis que d'autres élèves estiment que cela n'a pas d'importance (commutativité).
Alors que personne n'a mis en doute le résultat de l'opération (à cet âge tout le monde sait que deux fois dix cela fait vingt !), les arbres vont mettre en évidence une difficulté d'ordre symbolique, une incompréhension au niveau du vocabulaire et une occasion de sentir une fois de plus que la multiplication, conceptuellement, n'a rien à voir avec l'addition.

Extrait de "Math Ecole" n° 75 (Novembre 1976)

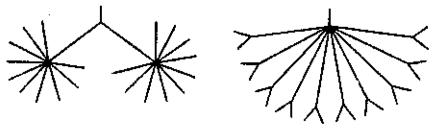
Une fillette s'exclame tout à coup en observant le premier arbre:
— Mais c'est pas vingt possibilités ! Moi j'en trouve vingt-deux !
Devant l'étonnement de tous, elle vient s'expliquer et compte:



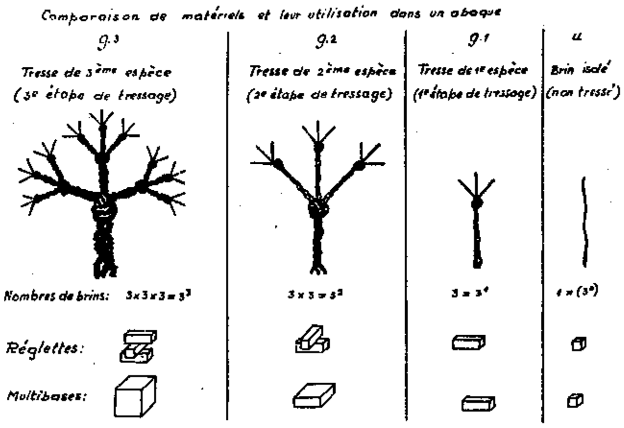
C'est alors qu'un élève apporte sa contribution en venant écrire l'opération inverse:

$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$

Cela suggère à un autre enfant de venir dessiner un second arbre. On se trouve en présence de la situation suivante:

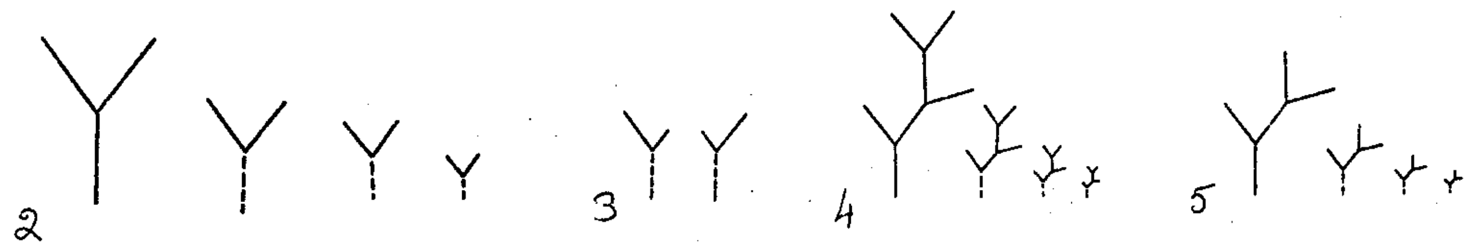


$\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$



Extrait de "Math Ecole" n° 73 (1976)

Quelques solutions au 3



Des documents doivent être préparés d'urgence, même sous forme d'ébauche, comportant le savoir faire, la finalité et des propositions d'activité dans les diverses parties du programme, en précisant si possible les objectifs terminaux du 2d cycle dans les sections A, B, C, D, E (et F G H si possible).

La répartition suivante est proposée :

Probabilités, statistiques, organisation de données

OVAERT et HENNEQUIN

Analyse et cinématique

TISON, REISZ, MARTINAUD

Algèbre et Arithmétique

CHEVALARD

Algèbre Linéaire

DAVID

Géométrie

(Les Bordelais, MARION, BKOUCHE ?)

Activités de Calcul Algorithmique

(MERIGOT, OVAERT)

La discussion globale du matin ne permet guère d'avancer ; les seules propositions écrites que le sous-groupe possède sont des mises au point (non terminées) de OVAERT, le programme U. P. U. M. et quelques idées transcrites par TISON pour l'analyse.

La spécialisation suivante est retenue :

Section A PECHILLON (Lille) (avec DECHAZEAUX Nancy ?)
Section B MERIGOT (Nice) (avec DECHAZEAUX et Mme GRAND de Nancy et le groupe Math Eco de Rennes)

Section C MARTINAUD (Marseille)
Section D LIMOGES et le groupe Math - Biologie
Section E CLERMONT
Sections FGH GRENOBLE et Mme GRAND (Nancy)

L'après-midi, après un essai de recherche sur les objectifs spécifiques à telle ou telle section et sur les objectifs terminaux communs à toutes les sections le sous-groupe se divise en 3 parties, ce qui permet d'aboutir à :

- Nécessité de continuité entre 3ème et 2de en géométrie
- Nécessité de tenir compte des autres disciplines
- La mise au point d'activités est indispensable même dans les sections où la théorie est la plus poussée
- Développer les activités de calcul et les activités graphiques.

Prochaines réunions de ce sous-groupe :

Samedi 24 Novembre 9 H IREM Paris Sud
Samedi 8 Décembre 9 H IREM Paris Sud

Bon courage à tous

M. David

M. DAVID

UNIVERSITE DE REIMS
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Moulin de la Housse - B.P. 347 - 51062 REIMS Cédex

Colmez J. Rees

-:-:-:-:-:-:-:-

I. R. E. M.

Tél. (26) 40 42 01
(26) 47 82 61
poste 208

Reims, le 12 Novembre 1979

Pour Information

Réf. :

COMPTE-RENDU de la REUNION du 10.11.1979

Sous-groupe Inter I.R.E.M. Programmes Second Cycle

Suite à la décision de l'ADIREM du 29 septembre 1979, ce sous-groupe a été convoqué le 10 Novembre à Paris-Sud.

Participants : COLMEZ F. (IREM Paris-Sud), DAVID (Président ADIREM), EZQUERRA (IREM Limoges), GABORIEAU (IREM Rennes), HENNEQUIN (IREM Clermont), D. LE BERRE (Prof. 2d cycle IREM Grenoble), LIEGEOIS (Prof. 2d cycle IREM Besançon) MERIGOT (IREM Nice) MICHAUT (Prof. 2d cycle IREM Clermont), OVAERT (Inter IREM Analyse, APM, IREM Nice), PECHILLON et WATTEZ (Prof. 2d cycle représentant TISON - IREM de Lille).

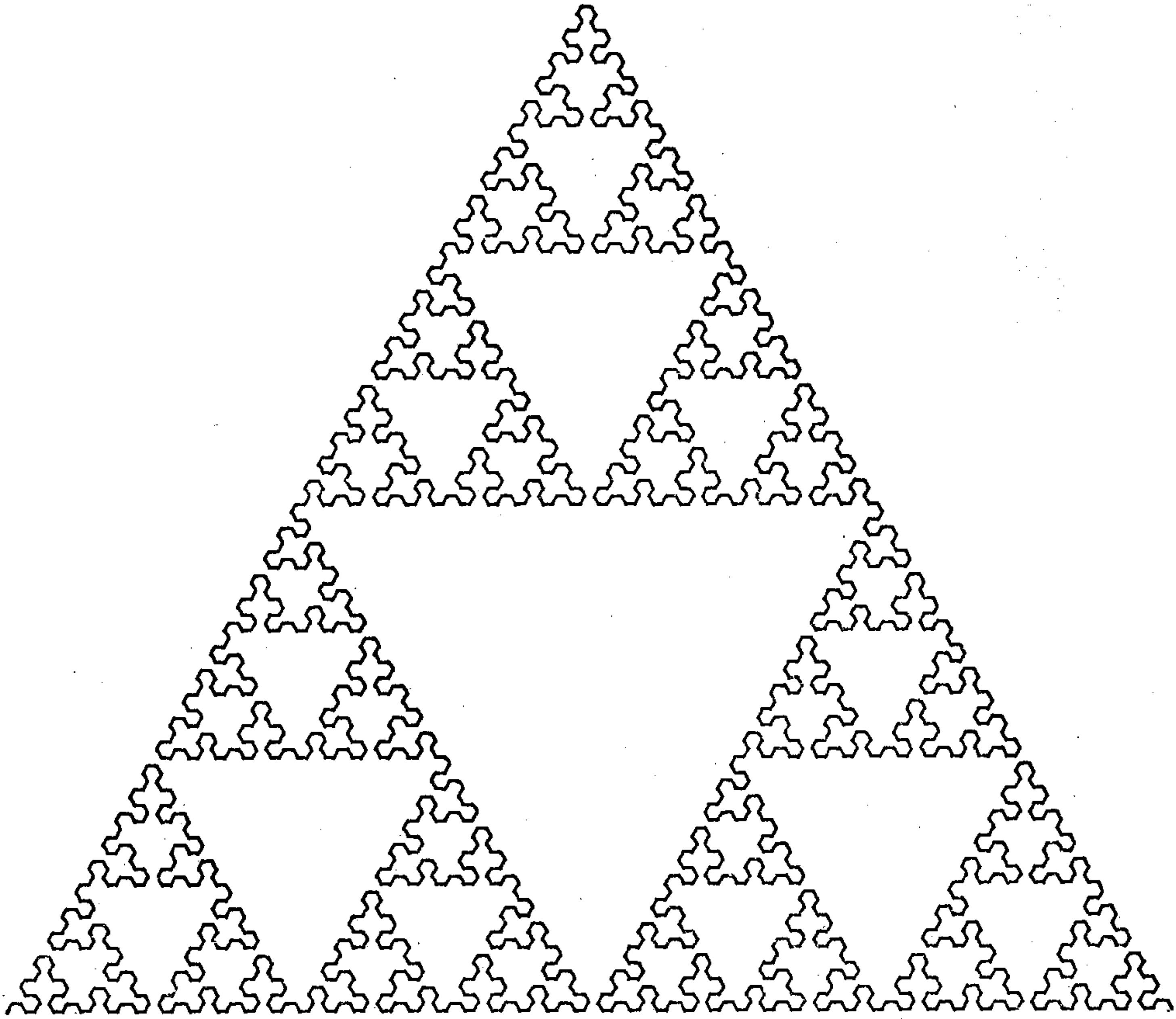
Nous y apprenons les horaires prévus par le Ministre :

2des indifférenciées		4 H	sans dédoublement
1ères	(A	2 H	"
	(B	5 H	"
	(C D E	6 H	"
	(F G H	? ?	"
Terminales	(A	2 H	"
	(B	5 h	"
	C	10 H	"
	(D	6 H	"
	(E	9 H	"
	(F G H	? ?	"

OVAERT déplore que ce groupe de travail ne dispose que de peu de documents, ni d'information directe concernant la réunion de Mercredi dernier.

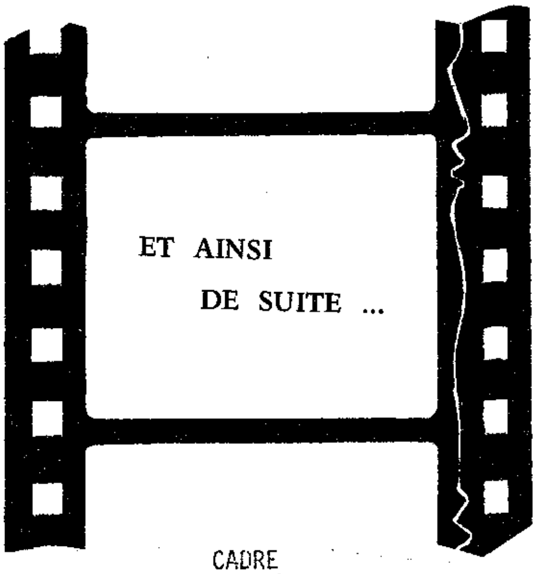
Le groupe convoqué par l'I.G. se réunira tous les mercredis jusqu'au 24 janvier au Lycée Montaigne ; il importe que notre sous groupe travaille, pour aider TISON et MALGRANGE, et aussi pour préciser et réunir les réflexions des IREM, pour une action à plus long terme.

...



A B

courbe de Spierpinski S_7 de rang sept.



ET AINSI DE SUITE ...

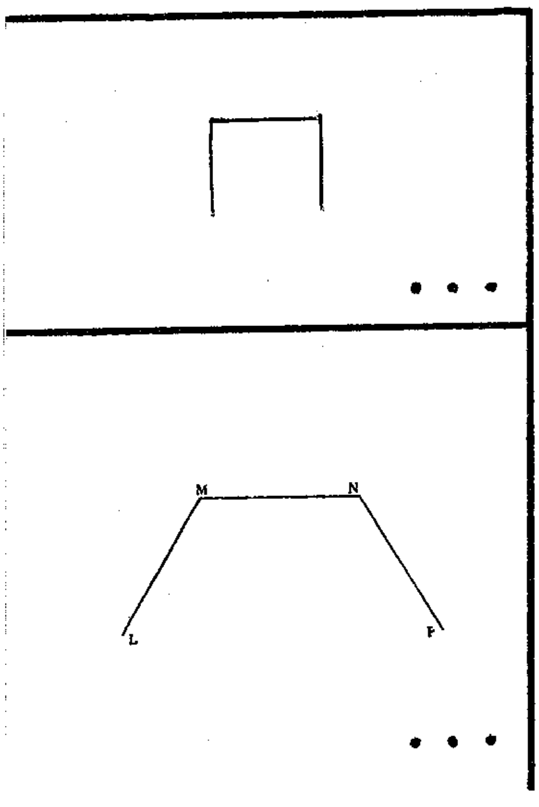
CADRE

Population : de la 6è à la Terminale, et même après...
formation continuée des enseignants.

Contenus mathématiques : - notions de suites, de limites.
- convergence, divergence, somme, série.
- encadrements, valeurs approchées.
- induction, validation (mais est-ce un contenu mathématique ?).

Intentions : 1 - se familiariser avec les notions de suites, de limites, à partir de situations sensibles et observables (des figures).
2 - lier le fini et l'infini.

Objectifs : 1 - construire des suites de figures.
2 - prévoir la ... suite et vérifier ses hypothèses avec les outils de calcul dont on dispose (de la 6è à la Terminale).
3 - faire apparaître des suites et séries géométriques.



Matériel : papier quadrillé - crayon - règle - compas.

Méthodes : - débroussaillage en petits groupes, discussion et synthèse collectives.
- apport d'informations sur les contenus mathématiques suivant les niveaux.
- pour chaque exercice on peut être plus ou moins contraignant, ou de plus en plus, ou de moins en moins.

Bibliographie :

- CUNDY et ROLLETT : Modèles Mathématiques (Cedic 1978) : pages 70 à 77.
- PERMAMA : Elément de cours PMM 3025 (Télé-Université - Québec).
- The Graphic Work of M.C. ESCHER (Ballantine Books - New-York 1978).
- J.L. LOCHER et alii : Le Monde de M.C. Escher (Chêne 1976).

Pour chaque exercice, les questions à poser sont du type :

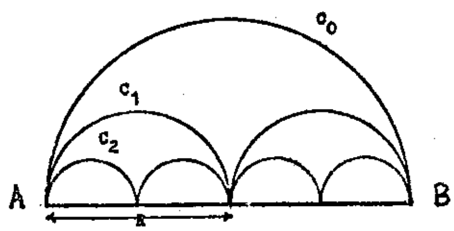
? continuer la construction.

? que se passe-t-il ?

? que se passe-t-il quand n { devient très grand / augmente indéfiniment / tend vers l'infini } ?

? pouvez-vous justifier vos hypothèses matériellement ? par le calcul ?

(1) Une suite de demi-cercles

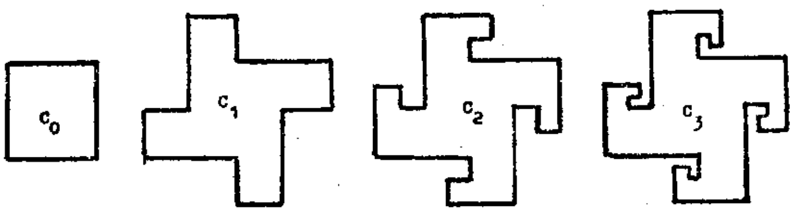


On considère la suite de lignes constituées
- d'un demi-cercle de rayon R
- puis de deux demi-cercles de rayon R/2
- puis de quatre demi-cercles de rayon R/4
- ....

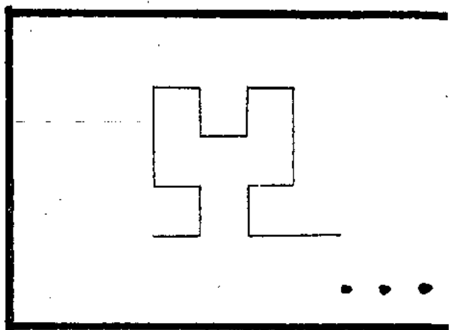
? que deviennent le nombre d'arcs, le rayon des demi-cercles ?
la longueur de la ligne, l'aire du domaine limité par la ligne et le segment [A,B]?

(2) Les carrés qui s'enroulent

Voici une suite de figures :

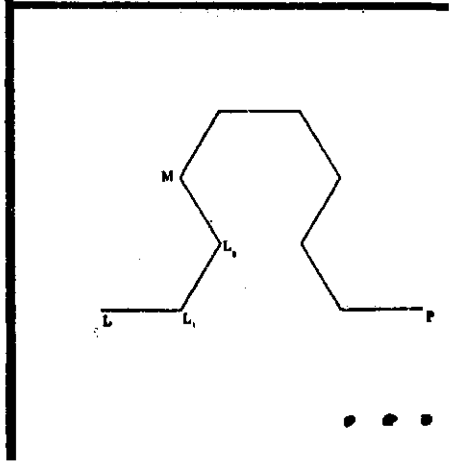


La première C_0 est un carré dont la longueur du côté mesure a unités de longueur. Pour la deuxième on ajoute, dans un mouvement tournant, 4 carrés de côté de longueur a/2. Pour les figures suivantes on ajoute chaque fois, en tournant, quatre carrés dont les côtés mesurent la moitié des côtés des carrés précédents.

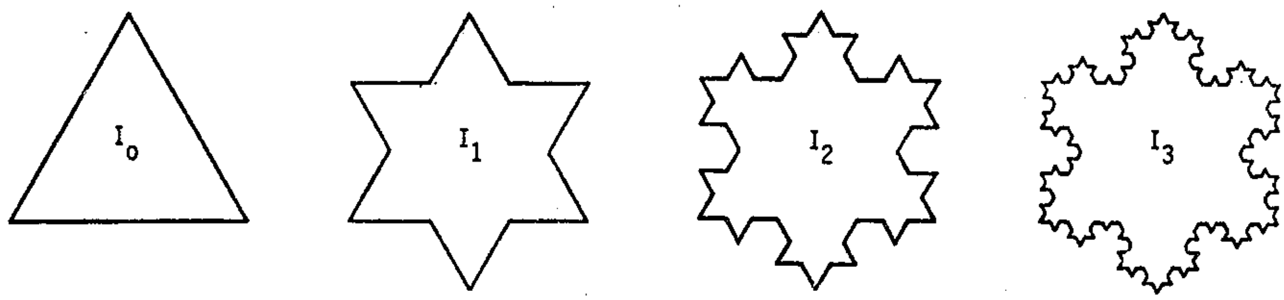


que se passe-t-il si l'on continue la construction ?
à votre avis, que deviennent le périmètre ? l'aire de la figure ? Vérifiez par le calcul.
quel lien y a-t-il entre cette situation et la situation 1 ?

(3) L'île mystérieuse

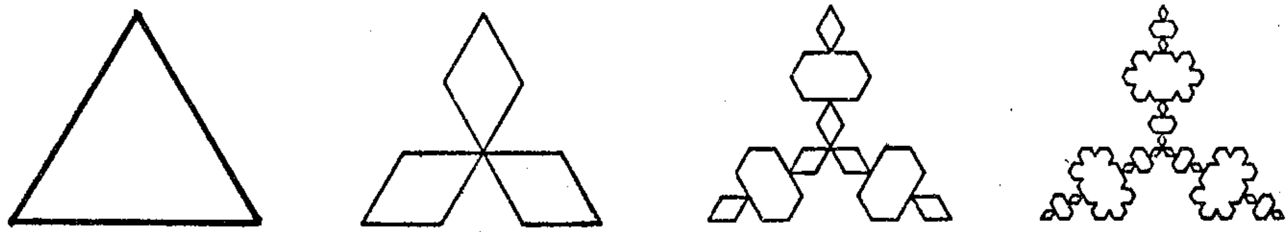


I_0 est un triangle équilatéral; chaque fois, on divise tous les segments en 3 parties égales et on remplace la partie centrale par 2 segments en de longueur égale à la partie centrale disparue, et ainsi de suite, de suite ...



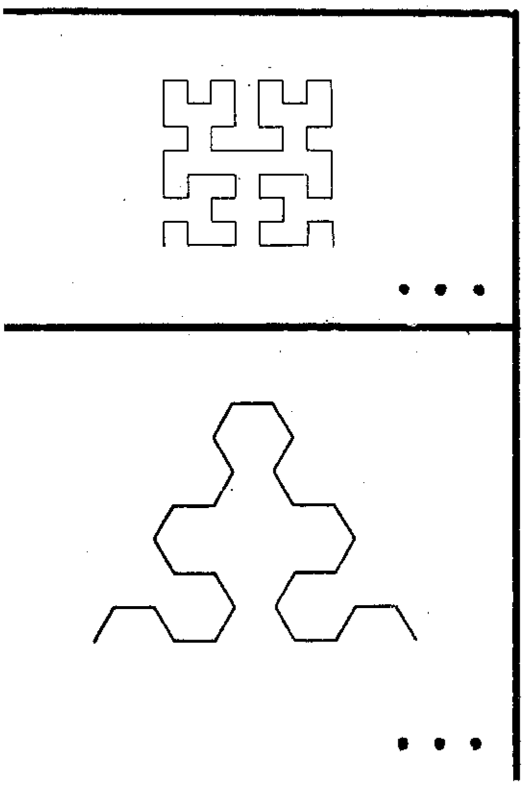
? que se passe-t-il pour le nombre de segments ? Le nombre de "dents" ?
? que se passe-t-il pour la figure ? son aire ? son périmètre ?
(on pourra prendre une unité d'aire et une unité de longueur pour I_o)

Si cette construction a déjà été (trop) rencontrée vous pouvez étudier une figure "voisine" obtenue en remplaçant comme ci-dessus la partie centrale par un ∧ dirigé non vers l'extérieur mais vers l'intérieur. C'est l'anti-flocon de neige.



4 Encore des arcs de cercle

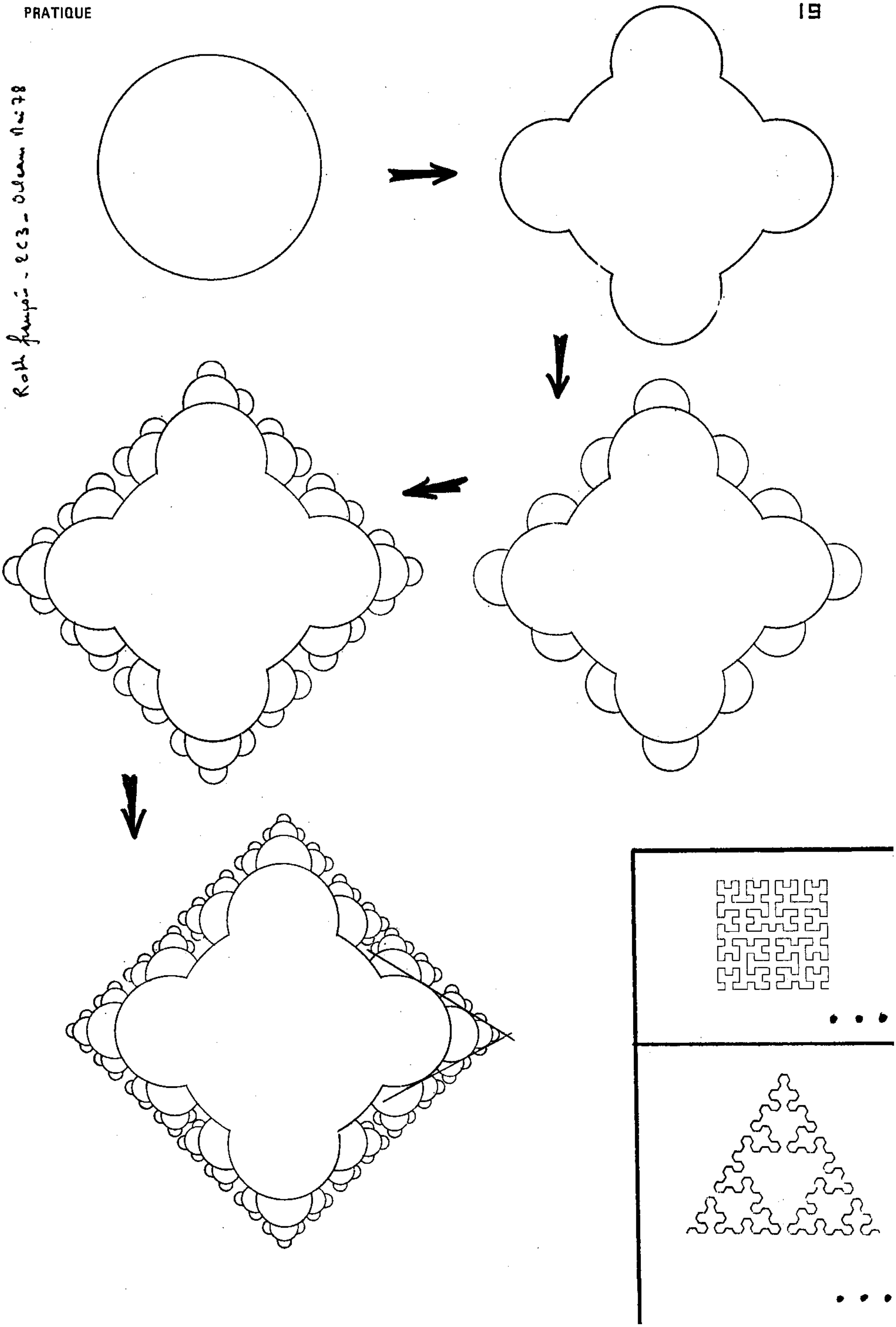
Voici sur la page ci-contre le travail fourni par un élève de Seconde C.
Quels sont les résultats qu'il y valide expérimentalement ? Y a-t-il démonstration ?



5 Et ainsi de suite ...

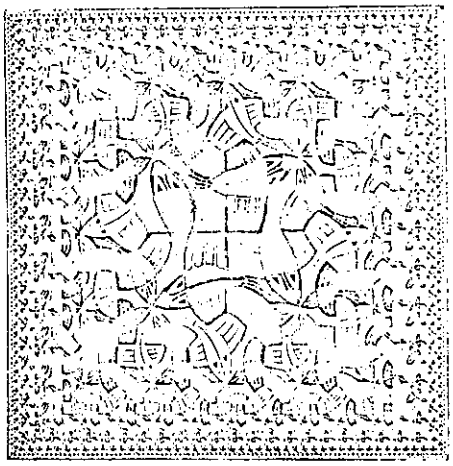
Quelles(s) suite(s) peut-on donner aux figures en coin représentées en bas de page (pages 16 à 20).

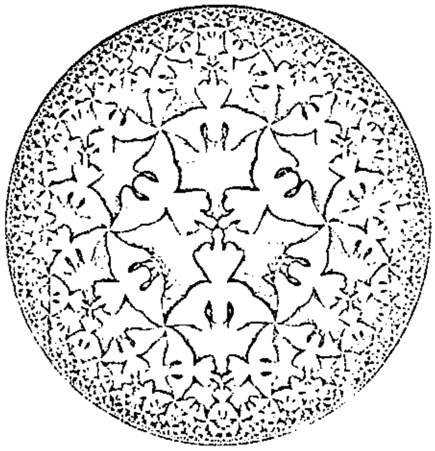
Roth François - 2C3 - Orléans Mai 78



⑥ Questions sans réponse

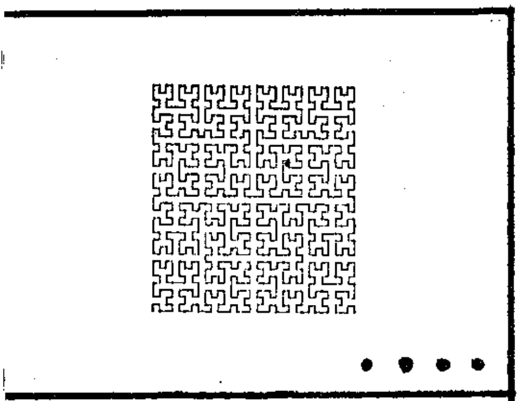
Voici deux (médiocres) reproductions d'oeuvres de M.C. ESCHER dont on peut consulter les originaux (et bien d'autres dessins passionnants) dans tout ouvrage de cet artiste (cf Bibliographie).
Pouvez-vous retrouver par construction (ou tout autre moyen) la limite de ces figures ? (et si oui, nous le faire savoir !).

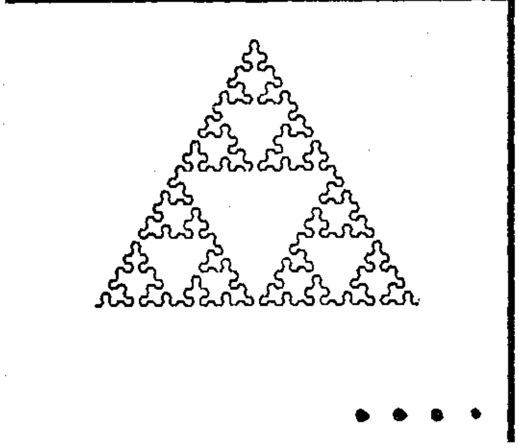




Commentaires et prolongements

Les calculs de limite ou plus simplement les vérifications d'hypothèses peuvent se faire :
- par calcul direct en 1ère, terminale
- par encadrement et calculs approchés de la 6è à la Seconde.





On peut étudier la vitesse de convergence, rechercher la figure qui donne un résultat approché fixé.

On peut demander aux élèves de rechercher d'autres suites de figures incluses dans un domaine borné dont l'aire converge et le périmètre diverge, par exemple une suite de figures ayant pour "limite" une figure d'aire nulle et de périmètre infini.

On peut demander aux élèves de rechercher des situations "concrètes" de la vie courante qui s'illustrent par de telles suites. Voir par exemple "Suites de palabres" page ci-contre.

SUITES DE PALABRES (sur le marché au Togo)

L'acheteur : Combien vendez-vous cet objet ?
Le vendeur : 4000.
L'acheteur : C'est trop cher ! J'en offre 1000 ...
Le vendeur : ??? Allez ! Je le laisse à 3500.
L'acheteur : 1100 !
....
Et ainsi de suite, de suite, de suite, de suite, de suite, de suite, ...
Si ça converge, on fait l'affaire. Si ça diverge, tant pis !

Un groupe Irem, un mardi après-midi, face à cette situation.

- Boaf ! ....
- Si le vendeur baisse à chaque fois de 500 et l'acheteur monte à chaque fois de 100, ils vont se mettre rapidement d'accord à 1500 ...
- Peut-être que le vendeur baisse à chaque fois de 12,5% et que l'acheteur augmente à chaque fois de 10%. Dans ce cas ....

(suivent quelques minutes de calcul, ponctuées de commentaires du genre : ça, c'est une suite géométrique ....)

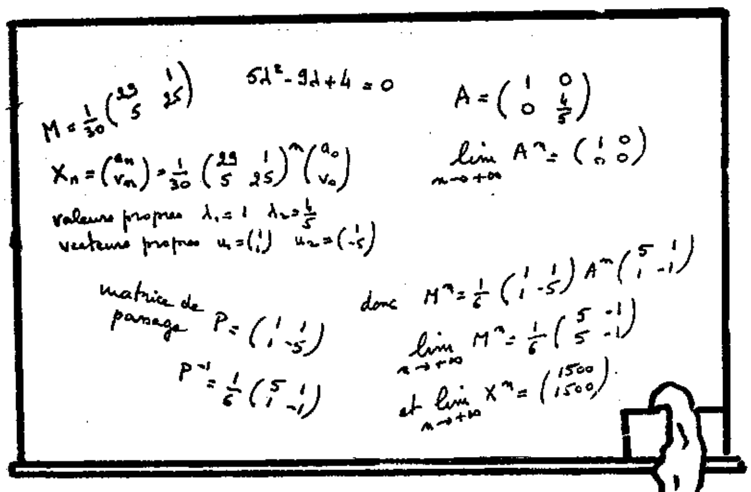
.... ils se mettront d'accord à la 8è proposition du vendeur, mais à quel prix ? Quelque chose entre 1795 et 1771 ...

- Vous n'y êtes pas ! La proposition de chacun ne dépend pas seulement le son offre précédente, mais aussi de l'écart qui existe entre les propositions du vendeur et de l'acheteur. Voyons ....

(au tableau, avec de la craie)

.... si $a_0 = 1000$ et $v_0 = 4000$ (les notations sont évidentes, non ?) alors on peut imaginer quelque chose comme :

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + \frac{1}{30}(v_0 - a_0) = \frac{29}{30}a_0 + \frac{1}{30}v_0 \\ v_1 = v_0 - \frac{1}{6}(v_0 - a_0) = \frac{1}{6}a_0 + \frac{5}{6}v_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{29}{30}a_n + \frac{1}{30}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}v_n \end{cases}$$



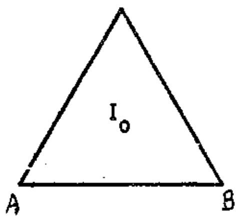
- Comment est-ce que tu étudies ça ? ? ?
- Et si on mettait des matrices ?

(Suit un quart d'heure de calculs. Le tableau est gribouillé dans tous les sens).

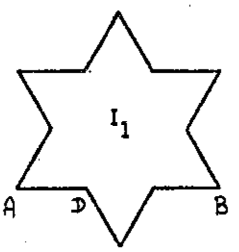
- Ils se mettent encore d'accord sur 1500 ! C'était bien la peine de faire tout cela !

LES FRACTALES QU'EST-CE ?

Les thèmes proposés dans les pages qui précèdent ont été inspirés par diverses lectures, dont beaucoup tournent autour de l'idée d'objet fractal. Il nous a paru intéressant de décrire brièvement ce qu'est un tel objet pour les lecteurs du PLOT qui rencontreraient cette notion pour la première fois.



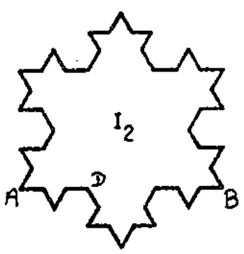
Le concept d'*objet fractal*, (ou plus simplement de *fractale*), dont l'explicitation est due à Benoît Mandelbrot, est à la fois récent et ancien. Récent, parce que ce mot a moins de dix ans; ancien, car les idées qu'il synthétise préoccupent les mathématiciens depuis des dizaines d'années. Plutôt que d'en donner une définition générale (qui serait probablement fausse !), étudions sur un exemple classique les quatre idées au carrefour desquelles ce concept se situe.



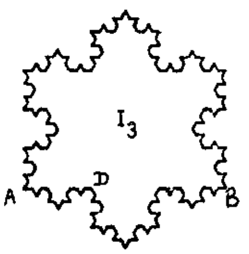
L'exemple classique

Vous avez rencontré le "flocon de neige", du à von Koch (1904). On part d'un triangle équilatéral; on applique à chaque côté la transformation ——— ⟶ —/\— qui consiste à remplacer le tiers central par deux segments de longueur égale au tiers du segment initial. On itère le procédé ... jusqu'à "l'infini". La "limite" obtenue est le flocon de neige.

1ère idée : un Monstre



Cet exemple appartient sans conteste à la "galerie des monstres" des mathématiciens du siècle dernier. Alors que le début du XIXè siècle admettait (et parfois démontrait !) que toute fonction continue sur un intervalle y est dérivable (sauf, éventuellement, en des points isolés), Bolzano (1836) puis Riemann (1861) et surtout Weierstrass (1872) prouvent le contraire. Ce dernier fournit même un exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable. Trente ans plus tard, le suédois Helge von Koch fournit l'exemple géométrique équivalent : le tiers inférieur du "flocon de neige" a pour frontière une courbe continue qui n'admet nulle part de tangente, puisque chaque point de cette courbe "limite" est un sommet ...



Le flocon de neige appartient à la galerie des monstres pour une autre raison : l'intersection de la courbe de von Koch avec le segment $[A,B]$ du triangle initial est le triadique de Cantor ... Ce modeste flocon est bien un concentré des grandes disputes du siècle dernier.

Bernard Bolzano (1781-1848), dans sa "Théorie des Fonctions" (1836), étudie les propriétés des fonctions continues et des fonctions monotones sur un fermé borné. Il fournit des exemples de distinction entre continuité et dérivabilité.
Bernhard Riemann (1826-1866) étudie en 1861 la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(nx)}{n^2}$ [F(nx) étant la partie fractionnaire de nx] qui est une fonction de x continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel, et intégrable. Il étudie aussi, sans démontrer ses propriétés, la fonction $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sin(n^2x)$.
Karl Weierstrass (1815-1897) rencontre en 1872 une fonction continue sans dérivée : $\sum_{n\geq 0} b^n \cos(\Pi a^n x)$ (a entier impair supérieur ou égal à 3, b réel strictement compris entre 0 et 1, tels que $ab > 1 + \frac{3\Pi}{2}$), ce qui clôt le débat , ou presque puisque
Charles Hermite (1822-1901) trouve encore la sottise (ou l'humour ?) de dire dans une lettre à Stieljes : *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues sans dérivées.*

2è idée : l'homothétie interne

Une autre propriété du flocon de neige est remarquable : si l'on grossit trois fois la portion de courbe comprise entre A et D, on voit la même chose que si l'on regarde à l'oeil nu la courbe entre A et B. De même, il suffit de grossir suffisamment toute portion de courbe pour voir la même chose que la courbe dans son ensemble. Il s'agit là d'une façon de parler puisque nous sommes incapables de "voir" cette courbe, mais c'est une façon de mettre en évidence la propriété d'*homothétie interne* (ou *scalance*) dont elle jouit : sa construction est telle que chaque partie "ressemble" au tout.

3è idée : la dimension

Les mots *courbe* (ou *ligne*), *surface*, *volume*, sont attachés à un concept topologique de dimension. L'appellation *courbe de von Koch* sous-entend que le flocon de neige a pour dimension 1. Or Haussdorff a exposé en 1919 une propriété de la dimension qui, appliquée à notre exemple, donne un curieux résultat.

Prenons par exemple la droite : sa dimension est 1. Chaque segment de longueur X de cette droite peut être recouvert par N segments de longueur $\frac{X}{N}$, chacun d'entre eux étant l'image du segment initial par une homothétie de rapport $r = \frac{1}{N}$.

Pour le plan, dont la dimension est 2, on voit facilement que tout rectangle peut être recouvert par N rectangles dont chacun se déduit du rectangle initial par une homo-

Le triadique de Cantor

On part d'un segment initial : on enlève le tiers central; puis on enlève les tiers centraux des deux segments restants, puis les tiers centraux des quatre segments restants ... etc. La "limite" est le *triadique de Cantor* qui est un ensemble *parfait* (ie: fermé et sans point isolé) et *totalement discontinu* (ie: la composante connexe de chaque point est réduite à ce point).

Benoît Mandelbrot, dans son livre "Fractals : form, chance and dimension" donne la définition suivante :
Un fractale est un ensemble pour lequel la dimension au sens de Hausdorff (D_H) est strictement supérieure à la dimension topologique (D).
Par exemple, on trouve :
- ligne du mouvement brownien : D = 1, car c'est une ligne; $D_H = 2$ (elle recouvre tout le plan).
- flocon de neige : D = 1 (c'est une ligne) mais $D_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618...$
- triadique de Cantor : D = 0 (c'est un ensemble de mesure nulle) mais $D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}63093...$

thétie de rapport $r = \frac{1}{\sqrt[2]{N}} = \frac{1}{N^{1/2}}$.

Pour l'espace de dimension 3, on constate que tout parallépipède rectangle peut être pavé par N parallépipèdes dont chacun se déduit du domaine initial par une homothétie de rapport $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} = \frac{1}{N^{1/3}}$.

Dans chacun des cas précédents, on constate que :

$r = \frac{1}{N^{1/D}}$ { D étant la dimension, N étant le nombre de parties recouvrantes et r étant le rapport des homothéties permettant d'obtenir chaque partie à partir du tout.

Cette relation s'écrit aussi $\log r = -\frac{1}{D}.\log N$. On constate donc que la dimension vérifie la relation :

$$\boxed{D = -\frac{\log N}{\log r}}$$

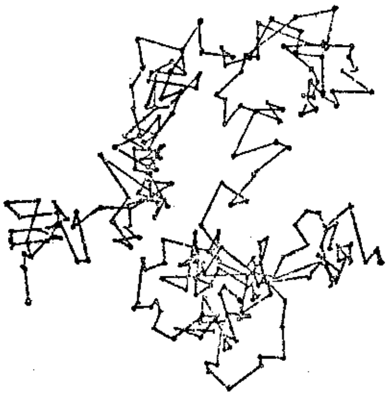
Généralisons cette relation (en supposant que cela ait un sens) à toute figure - telle le flocon de neige - qui est décomposable en N parties qui en sont déduites (à une isométrie près) par une homothétie de rapport r. Dans le cas du flocon de neige, on trouve N = 4 et $r = \frac{1}{3}$ car la partie inférieure de cette courbe est formée de 4 parties qui en sont déduites par une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$. La "dimension" du flocon, au sens de Hausdorff, est donc : $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618...$, nombre qui n'est pas entier mais un "fractionnaire" (c'est de là que vient le mot fractal, bien que dans ce cas ce nombre soit un irrationnel !), compris entre 1 et 2. On aurait envie de dire que la courbe de von Koch est "plus épaisse" qu'une ligne et "moins grosse" qu'une surface ...

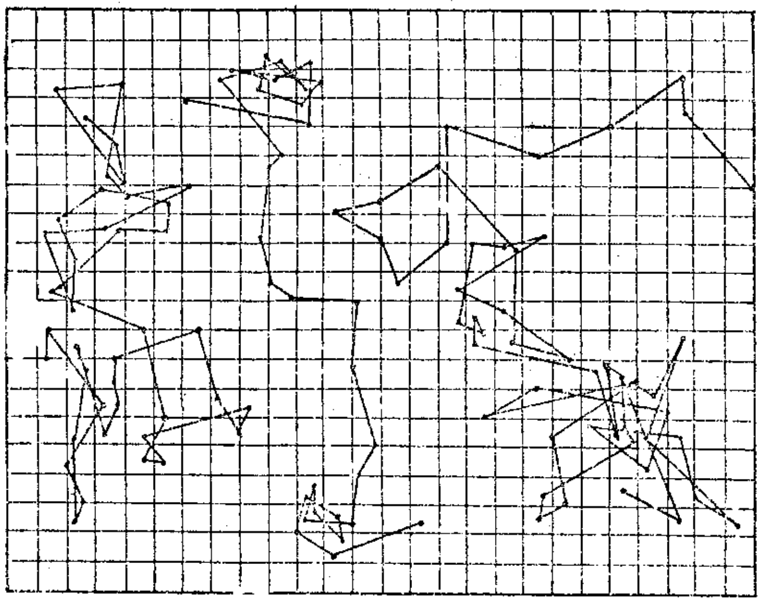
Remarquons d'ailleurs que ce flocon de neige, tout en étant contenu dans un domaine borné, a une longueur infinie puisqu'à chaque étape de sa construction, on multiplie la longueur de la courbe obtenue par $\frac{4}{3}$.

4è idée : décrire la réalité

Deux exemples désormais célèbres vont montrer que des courbes aussi déconcertantes que celle du flocon de neige peuvent être un modèle satisfaisant de certaines réalités physiques. C'est ce que pressentait Jean Perrin dès 1912 : "...*il est puéril de vouloir démontrer en traçant une courbe que toute fonction continue admet une dérivée. Si les fonctions à dérivée sont les plus simples, les plus faciles à traiter, elles sont pourtant l'exception; ou, si l'on préfère en langage géométrique, les courbes qui n'ont pas de tangentes sont la règle, et les courbes bien régulières, telles que le cercle, sont des cas fort intéressants, mais très particuliers*" (in la préface de

Exemples de mouvements browniens.





Les Atomes).

<u>1er exemple</u> : Le mouvement brownien.
Si l'on observe une particule en suspension dans un fluide, et que l'on repère sa position à des intervalles de temps définis, on obtient une courbe très caractéristique. Si l'on faisait l'observation avec des intervalles de temps deux fois plus petits chaque segment serait remplacé, pour tenir compte de la position intermédiaire, par deux segments de longueur totale supérieure. En divisant par deux "à l'infini" la durée séparant deux observations, on obtient une courbe de longueur infinie, qui est continue et qui, en aucun point, n'admet de tangente (chaque point étant un "sommet" de ce curieux polygone). Ces propriétés sont celles de la courbe de von Koch.

<u>2è exemple</u> : La longueur de la côte de la Bretagne.
Cette côte, sur une carte au 1/200 000 est une succession de segments de droite qui permet de définir sa longueur. Sur une carte plus précise au 1/100 000 il apparaît que chacun des segments de la carte précédente est en fait formé de caps et de baies, et on trouve une longueur bien supérieure. Mais sur une carte au 1/50 000 on aperçoit bien d'autres détails, et la longueur trouvée croît encore. En poursuivant cette opération "à l'infini" (en fait, jusqu'au niveau moléculaire !), on constate que si l'on veut tenir compte de tous les grains de sable :

- la côte de la Bretagne n'est pas une courbe rectifiable; sa longueur est "infinie".
- la courbe considérée est continue et n'admet nulle part de tangente.
- tous les morceaux de côte, quelle que soit l'échelle d'observation, se "ressemblent".

Ces propriétés, on l'a reconnu, sont celles du flocon de neige. Les différences entre ce dernier et les deux exemples "réels" sont importantes : le modèle mathématique pêche par sa trop grande régularité dans la complexité. La réalité, elle, est fondamentalement irrégulière. On trouvera dans le livre de B. Mandelbrot (Cf Bibliographie) des explications concernant la "dimension" des côtes et celle des surfaces montagneuses : celle de la côte de la Bretagne avoisine 1,3; celle de certains reliefs montagneux est proche de 2,3 ...

Pour finir, donnons deux exemples où les idées qui sont exposées ici peuvent fournir un modèle mathématique acceptable à des situations a priori complexes.

1. Chaque goutte d'eau tombant sur la terre finissant à la mer, on peut imaginer qu'un réseau hydrographique est un ensemble de lignes remplissant "presque" toute la surface (pour que tout point soit relié au réseau), donc de dimension "presque" égale à 2.

2. Le poumon est un organe où la surface d'échange air-sang doit avoir la plus grande aire possible (infinie ?) pour que les échanges se fassent facilement, et occuper presque entièrement le volume disponible (pour ne pas perdre de place); cette surface doit donc avoir une dimension "presque" égale à 3.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES

(1) Les objets fractals : forme, hasard et dimension, *par Benoît Mandelbrot (Flammarion 1975).*

Le livre de base : un essai qui oscille entre la vulgarisation et la monographie, la réflexion philosophique et l'exposé scientifique. Donne envie d'en savoir plus.

(2) Fractals : form, chance and dimension, *par Benoît Mandelbrot (W.H. Freeman and Company. San Francisco 1977).*

La version anglaise, revue et corrigée, du précédent. Les concepts y sont mieux expliqués... quand on lit l'anglais !

ARTICLES

(3) Les objets fractals, *par Benoît Mandelbrot (in La Recherche n° 85 Janvier 1978).*

Article de vulgarisation, où l'auteur présente d'abord le concept de dimension et les soucis de Cantor.

(4) Des "monstres" mathématiques : les fractales, *par François de Closets (in Sciences et Avenir n° 382 Décembre 1978).*

Un bon article de synthèse, agréable à lire.

(5) Musique blanche et musique brownienne, courbes fractales et musique en $\frac{1}{f}$, *par Martin Gardner (in Pour la Science (Jeux Mathématiques) n° 8 Juin 1978).*

Très intéressant article où l'auteur essaie de définir quels critères doit satisfaire la musique (écrite) pour ressembler à la musique naturelle (les bruits de la nature). Il distingue dans la musique aléatoire la musique "blanche", totalement aléatoire, la musique "brownienne", très fortement autocorrélée, et la "musique en $\frac{1}{f}$*", à mi-chemin entre les deux précédentes, à la fois harmonieuse et proche de la réalité, et qui est liée aux fractales d'une manière non expliquée. Il paraît que Bach et Mozart ont écrit pas mal de cette musique "fractale".*

Dans la partie "Mathématiques et Lyrisme" de votre bibliothèque, où doivent déjà se trouver les Chants du Maldoror de Lautréamont, vous pourrez classer ces phrases du mathématicien Cesaro (citées par Paul Lévy) :

C'est cette similitude entre le tout et ses parties, même infinitésimales, qui nous porte à considérer le courbe de von Koch comme une ligne vraiment merveilleuse entre toutes. Si elle était douée de vie, il ne serait pas possible de l'anéantir sans la supprimer d'emblée, car elle renaîtrait sans cesse des profondeurs de ses triangles, comme la vie dans l'Univers.

DU MATÉRIEL POUR LA CLASSE (3)

par Marc BLANCHARD (Rochefort - Charente Maritime)

UNE MACHINE A SOUSTRAIRE

La soustraction est une opération délicate lors de son premier contact. Son statut est fondamentalement différent de celui de l'addition.

En effet, a, b, c étant des nombres naturels : $a + b = b + a$ et $a + (b + c) = (a + b) + c$ (on dit pour chacune des égalités que l'addition est respectivement commutative et associative). En outre, on peut ajouter en une seule "opération" autant de nombres que l'on veut. C'est possible même si pratiquement, c'est fastidieux. Cette dernière propriété est uniquement possédée par l'algorithme de l'addition.

Pour la soustraction, tout se complique.

Si $a - b$ a un sens à l'école primaire $(a > b)$, alors $b - a$ n'en a pas avant l'introduction des nombres négatifs.

En outre, $a - b - c$ signifie $(a - b) - c$ ou $a - (b + c)$, mais non $a - (b - c)$ égal à $a - b + c$.

Tout enseignant sait combien l'art de la manipulation des parenthèses est délicat.

En outre, pour calculer $a - b - c$, il faut effectuer deux "opérations".

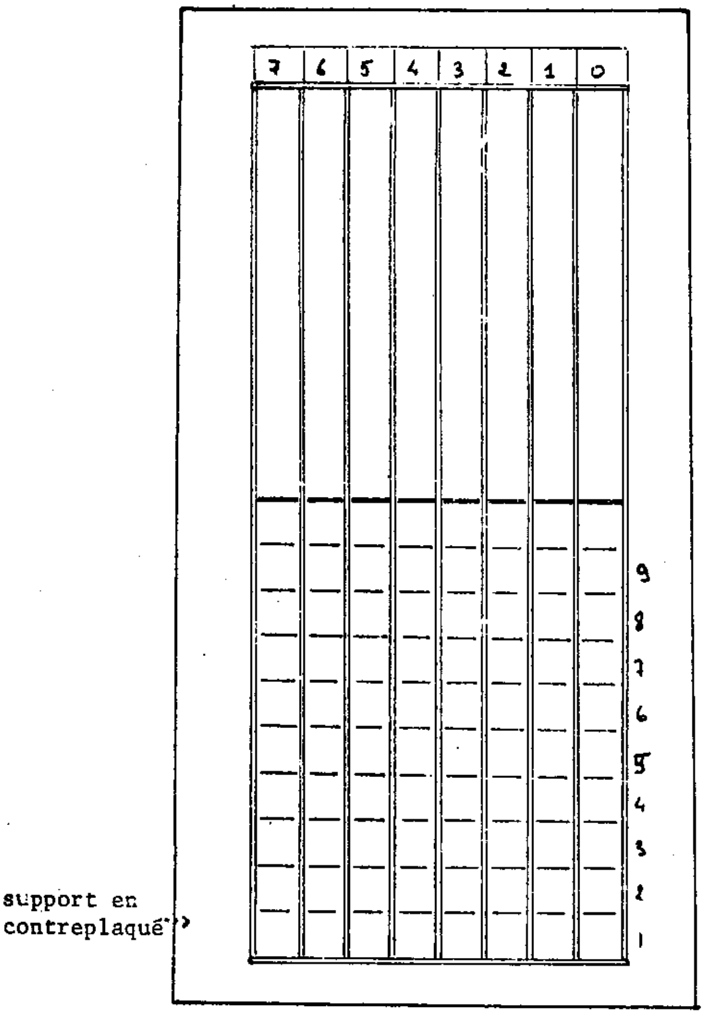
Afin d'introduire l'algorithme de la soustraction, nous proposons le matériel décrit ci-dessous.

Ce matériel est destiné à être abandonné le plus vite possible, dès que les élèves auront compris le mécanisme. Lorsque la compréhension sera acquise, il faudra bien sûr qu'ils deviennent suffisamment entraînés au calcul pour oublier le pourquoi de l'algorithme et réserver leurs réflexions à de nouveaux problèmes.

Nous proposons donc, une machine qui, connaissant a et b (a b) deux naturels, nous permette de lire d = a - b .

Elle se veut construite simplement et de sorte qu'elle permette l'introduction la plus "naturelle" possible de l'algorithme de la soustraction.

Voici son plan :



Les traits doubles représentent de fines baguettes de balsa collées sur le support. Le reste est tracé.

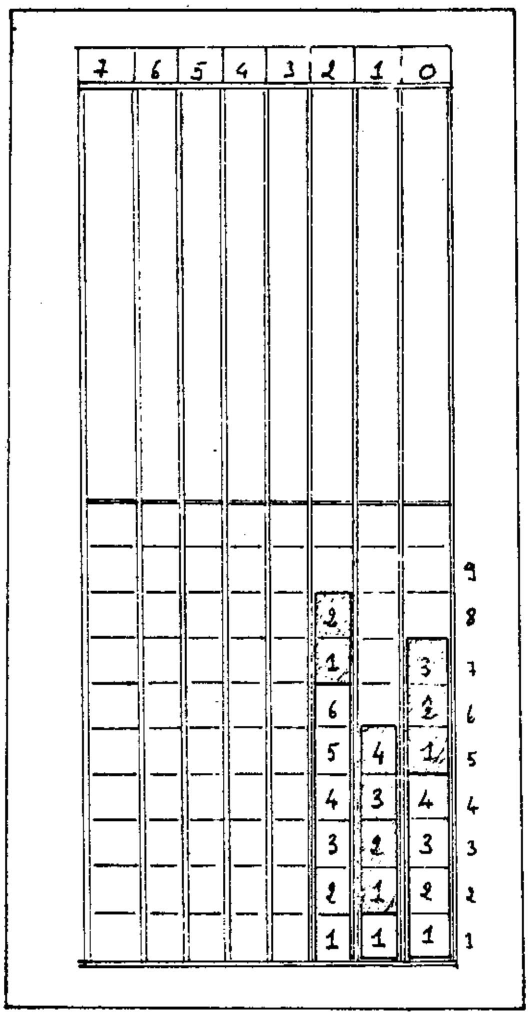
Les colonnes ont pour largeur 2 cm.

En outre, on dispose de bandes de papier fort de largeur 2 cm, de longueur variable, partagées recto-verso en carrés de 2 cm de côtés numérotés successivement de 1 à n (1 < n < 9) (2n cm étant de longueur de la bande).

Les bandes sont d'une couleur choisie d'un côté et d'une autre au verso. Le nom d'une bande sera celui du plus grand chiffre qu'elle contient.

Par exemple, pour soustraire 243 à 857, on dispose une bande 7 dans la colonne 0 , une bande 5 dans la colonne 1 et une bande 8 dans la colonne 2 de sorte qu'elles apparaissent toutes de la même couleur à leur niveau correspondants.

Ensuite, on dispose une bande 3 dans la colonne 0 (le 3 sur le 7), une bande 4 dans la colonne 1 (le 4 sur le 5), une bande 2 dans la colonne 2 (le 2 sur le 8) (*)



La situation est celle du schéma ci-contre.

Le résultat se lit : 6 1 4

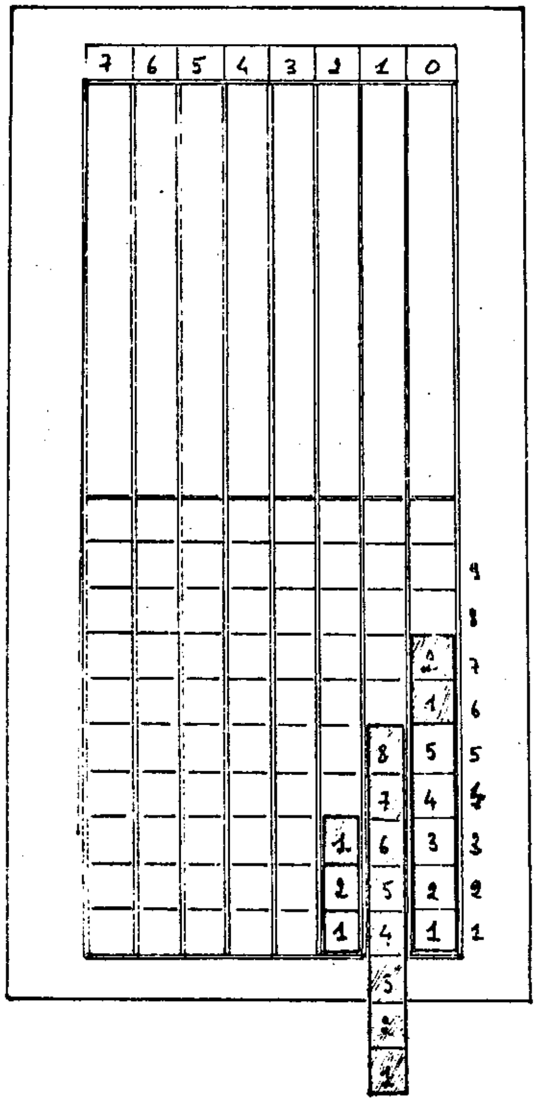
La soustraction sans retenue n'offre donc pas de difficulté.

(*) ces dernières bandes 3, 4, 2 sont de l'autre contenu que celle des bandes 7, 5 et 8.

Maintenant, nouvel exemple : à 357 soustrayons 182.

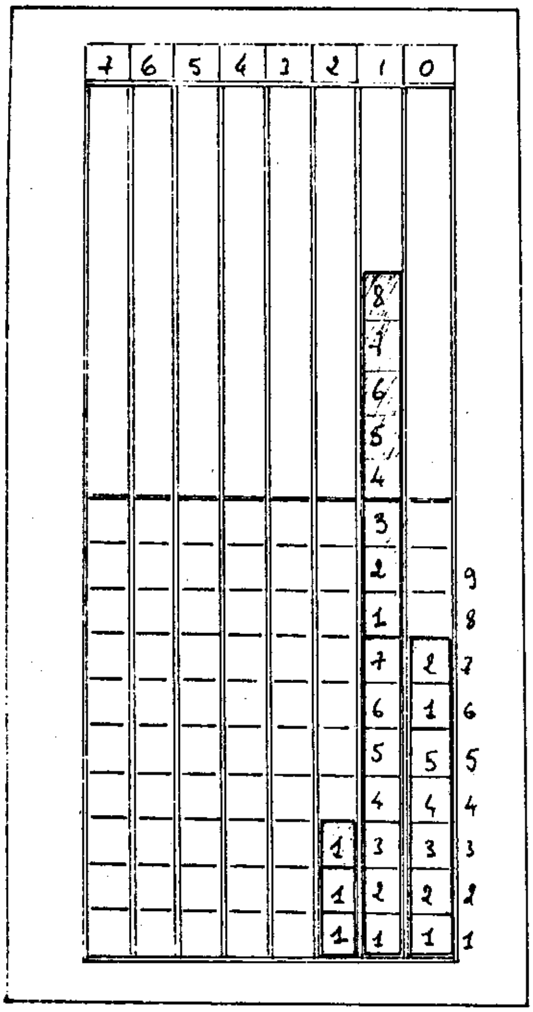
On dispose, de façon analogue à l'exemple précédent les bandes 3, 5 et 7, puis les bandes 1, 8 et 2, pour arriver à la situation ci-contre.

La bande 8 dépasse vers le bas



Pour rétablir la situation, on transforme une centaine en 10 dizaines. C'est-à-dire qu'on retranche une centaine supplémentaire (on dispose une bande 1 sur le 2 de la colonne 2) et on glisse de 10 cases vers le haut le contenu de la colonne 1 pour pouvoir placer une bande 10 partiellement recouverte par la bande 8.

La situation devient donc celle-ci.



On lit le résultat : 1 7 5

La machine peut aussi être utilisée quand le résultat est négatif. Nous laissons au lecteur intéressé le plaisir de découvrir comment.

ÉCHELLES ET PLANETES

- Ces fiches ont été réalisées, d'après une idée de C. DUMOULIN, par une équipe d'animateurs de l'atelier astronomie du C.C.S.M. Jean Gagnant de LIMOGES. Elles sont destinées, à l'origine, à un public de tous âges débutant en astronomie.
  Elles peuvent être utilisées avec profit en classe de 4e. On y trouve une excellente application des puissances de 10 et une utilisation des échelles, fort utile aux géologues et aux géographes.
- Pour l'étude de ces fiches en classe de 4e, j'ai procédé de la façon suivante : un minimum de préparation a été fait en classe à propos de la première partie. Les élèves ont ensuite terminé chez eux la seconde partie. Une heure a été ensuite consacrée à la troisième partie en classe et, enfin une autre heure a été réservée à répondre aux questions (qui ont fusé de toute parts), suscitées par les travaux précédents : cette heure a été particulièrement courte pour tout le monde !

Michel LABROUSSE
Collège Donzelot - LIMOGES

RÉDUCTION A L'ÉCHELLE DU SYSTEME SOLAIRE

par Christian DUMOULIN (Limoges - Haute Vienne)

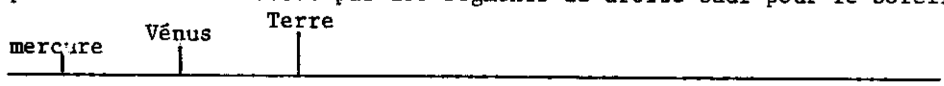
REDUCTION A L'ECHELLE DU SYSTEME SOLAIRE

I - 1ère partie

1) Représentation des diamètres et des principaux satellites.
Echelle : 1 cm pour 10^4km.

	Diamètre en km	Réduction en cm
SOLEIL	1 384 000	
MERCURE	4 900	
TERRE	12 800	
LUNE	3 500	
MARS	6 800	
JUPITER	137 000	
IO	3 500	
EUROPE	3 100	
GANYMEDE	5 000	
CALLISTO	4 900	
SATURNE	115 000	
TITAN	4 800	
URANUS	50 100	
NEPTUNE	49 400	
TRITON	3 800	
PLUTON	5 800	
VENUS	12 100	

2) Représenter les diamètres par des segments de droite sauf pour le Soleil.



3) Représenter les disques des planètes par des cercles à l'échelle précédente pour Mercure, Vénus, la Terre, Mars et Pluton
Représenter les autres planètes par des cercles concentriques.

4) Comparer le diamètre de Jupiter et celui de la Terre

5) Le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son rayon.
Combien de fois Jupiter contient-il la Terre ?

6) Que constate-t-on quant à la taille des planètes intérieures et celle des planètes extérieures.

II) *2ème partie*

7) Distances dans le système solaire

	U.A.	km	m
MERCURE	0,4		
VENUS	0,7		
TERRE	1		
MARS	1,5		
ASTEROIDES	2,8		
JUPITER	5,2		
SATURNE	9,5		
URANUS	19,2		
NEPTUNE	30,1		
PLUTON	39,4		

8) En utilisant la même échelle que dans 7) quel serait le diamètre du Soleil ?

9) Représenter 1 km à l'échelle par 2 cm et tracer avec cette nouvelle échelle les orbites concentriques des planètes intérieures.

10) Quelle est la planète qui s'approche le plus près de la Terre ?
A combien ?
On envoie un signal radar sur cette planète à l'instant où elle est le plus proche de la Terre. Au bout de combien de temps reçoit-on l'écho ?

III) *3ème partie*

Réduction à l'échelle du système solaire.

(réduction simultanée des diamètres et les distances).
On suppose que la Terre est représentée par une sphère de 1 mm de diamètre (une tête d'épingle !)

1°) Donner dans un tableau les diamètres respectifs des différents astres donnés dans Feuille I-1°)
Donner des comparaisons concrètes.

2°) Calculer avec la même échelle les distances des planètes au Soleil.
Donner des points de comparaison.

3°) Calculer la valeur d'une année de lumière en km
Trouver la distance, à l'échelle précédente, de la plus proche étoile du Soleil : Proxima centaure qui est à 4,2 a-ℓ de celui-ci

4°) Quelle serait, à l'échelle précédente, la vitesse de la Terre sur son orbite, par rapport au Soleil ?

UNE JOURNÉE A ROCHEFORT

par Marcel DUMONT et Françoise PASQUIS

ou le Dumont & Pasquis Circus en action !

Le Mercredi 3 Mai 1978, veille de l'Ascension, en une période incitant plutôt à l'évasion, plus de quarante collègues de la Régionale de Rochefort de l'APM, à l'initiative de Marc Blanchard, se rassemblaient entre les quatre murs d'une salle de classe pour discuetr, observer, questionner, répondre aux provocations d'un environnement inhabituel.

En effet, en un temps limité, nous avons déballé documents, travaux, matériels, jeux, bidules à manipuler, films, ...etc; tout ceci afin de faire ressortir :

1. LA GRANDE MISERE DE NOTRE ENSEIGNEMENT.
   - peu de choses à montrer, à observer, à manipuler..
   - peu de choses à chercher,
   - peu de comparaisons,
   - peu d'ouvertures,
   - peu de choix à faire,
   - peu de décisions à prendre... etc

   mais beaucoup d'ennui morose pour bien peu de résultats.
2. LE CARACTERE FORCENE DE CET ENSEIGNEMENT.
   - violation flagrante de la pensée des autres,
   - obligation de penser au même sujet, au même endroit, au même moment, de la même façon...
   - obligation implicite (malgré les déclarations d'intention) de se conformer aux puissants du jour. (En effet, toute initiative originale n'émanant pas de celui ou de ceux qui détiennent le pouvoir, est ignorée, voire rejetée; c'est d'ailleurs pourquoi actuellement on connaît si peu d'initiatives originales susceptibles de tirer l'enseignement de ses ornières !)
3. LA DISTRIBUTION AU COMPTE-GOUTTE DU SAVOIR.
   - jamais deux gouttes en même temps,
   - avec toutes les interdictions d'aller regarder ailleurs, en particulier les manuels ou documents de niveaux "au-dessus" ou ... "à côté" !
4. LE TEMPS PERDU.
   - aux contrôles (indispensables en régime de travaux forcés ou inintéressants),
   - aux évaluations (faussées dès le départ puisque les élèves en grande majo-

rité ne mettent pas en jeu leur potentiel à propos de tâches qu'ils n'ont pas envie de faire).
- aux conférences (inutiles puisque les contenus ressassés depuis des années traînent dans tous les manuels !)

..... etc ..... etc !

Si les discussions en étaient restées sur un plan général, il est évident que des malentendus et la lassitude auraient pu s'en suivre. Mais des travaux d'élèves, appartenant à diverses couches sociales y compris les plus défavorisées, en particulier des fiches de jeux-problèmes inventés par des enfants de 10-11 ans, et celles d'élèves de 2nde et 1ère technique ont permis d'étayer à chaque fois la discussion sur des faits précis. Ils ont permis de montrer :
- que pouvait le potentiel "d'intelligence" des individus lorsque ceux-ci ont envie de faire quelque chose,
- comment l'enrichissement de l'environnement, en particulier documents et matériels LIBREMENT ACCESSIBLES suscitaient motivations et recherches,
- comment un appel constant à l'imagination, à l'intuition pouvait court-circuiter les connaissances et les rendre accessibles à tous en un clin d'oeil,
- comment la libre communication entre les élèves permettait une propagation rapide, à la fois des idées et des motivations,
- comment s'équilibrent des tendances opposées : comme par exemple chercher ou imiter, poser ses propres questions ou répondre aux questions des autres...
- comment la diversification des tâches augmentait les sources d'intérêt, les sources d'idées, par rapprochement, par comparaison ...
- comment la sollicitation constante et la mise en valeur des idées des uns et des autres facilitait la tâche de l'enseignant,
- comment, de ce fait, le rôle de celui-ci s'en trouvait transformé : n'étant plus le détenteur exclusif du savoir dans la classe, il n'est plus le guide indispensable de ceux qu'on a rendus mentalement infirmes; il est seulement celui qui prépare l'environnement, reste à l'affût des ouvertures, apporte son aide lorsqu'on l'appelle ...

Par ailleurs, sur le plan des comportements, divers exemples ont permis de remettre à sa juste place une opinion répandue : "apprendre à raisonner est le summum de l'éducation !". Or la déduction n'est qu'un facteur de validation des idées. Elle n'est pas le facteur essentiel d'apparition des idées. Croire que l'enseignement des mathématiques rend les gens cohérents avec eux-mêmes est une utopie. Il suffit de mettre en évidence toutes les incohérences véhiculées par les usages dans l'enseignement des mathématiques et que pratiquent aveuglément les plus farouches défenseurs de la pureté formelle et logique. Mais pour les voir, il faut élargir et rapprocher les contextes : car nous ne sommes cohérents que par secteurs ! Par contre, la rigueur impitoyable aboutit à l'automatisation des enchaînements du discours. Elle dépend donc des types de langages utilisés plus ou moins bien adaptés au sujet. La programmation sur machine en est une image !

L'un des points importants débattus fut l'opposition entre deux tendances :

- rétrécir un contexte afin de résoudre un problème.
- ouvrir un contexte afin de poser de nouveaux problèmes (permettant éventuellement en retombée de résoudre d'anciens problèmes !).

Enfin, un dernier point n'a pu être clairement explicité : celui du comportement social des élèves, entraide, sens des responsabilités, initiatives ... En effet, il s'agit d'une atmosphère qu'il faut vivre. Toute description ne peut que la trahir en bien ou en mal.

Heureusement, le choc des idées joint à l'environnement matériel a permis de recréer entre adultes una atmosphère un peu comparable où les discussions et controverses sont non seulement tolérées mais vivement encouragées. Il n'y a pas de vérités absolues : tout est lié aux contextes ! Mais comme le disait Z. Diénés à propos de l'un de nos pionniers de la "Didactique de la Mathématique" : " *Comment prétendre apprendre aux autres à comprendre, lorsqu'on n'est plus capable soi-même de comprendre autre chose que ce que l'on a déjà compris !*".

Bref. Beaucoup d'animation, beaucoup de cordialité ont permis de résister pendant plus de trois heures à la claustrophobie d'une salle de classe : il faisait un temps merveilleux au dehors, à deux pas de la mer ! C'est tout dire.

Courage aux Charentais. Tout est à faire. Le problème n'est pas d'être ou de ne pas être d'accord avec ce qui se fait actuellement. Il est de créer, de bâtir de toutes pièces un enseignement à visage humain, adapté au monde de demain. les microprocesseurs vont bientôt nous ouvrir les yeux ! Ce sera sans doute l'une des plus importantes recherches sociales et éducatives qui nous attend.

Post Scriptum :

1. Il faut bien préciser que les organisateurs locaux, Marc Blanchard en particulier, sont les facteurs essentiels de la réussite de cette journée !

2. Depuis Rochefort, deux initiatives ont vu le jour :

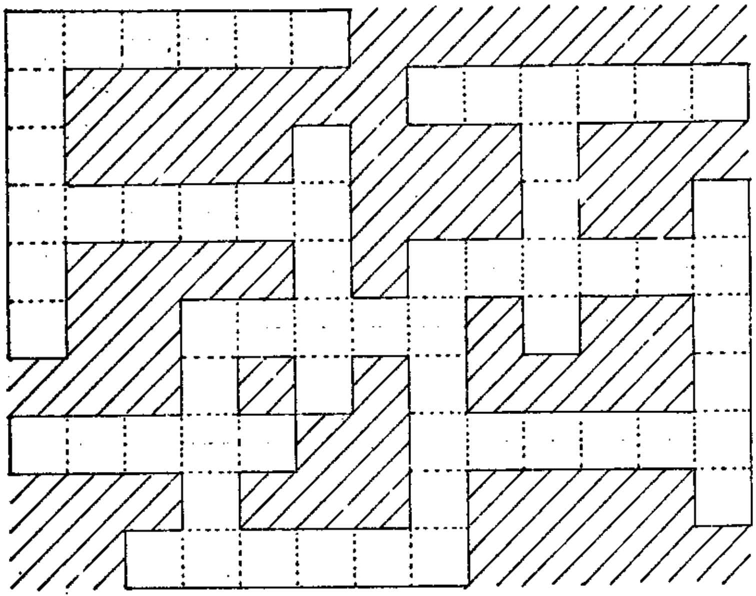
- Elargissant le "déballage" de Rochefort, des foires-expositions où chacun, enfant ou adulte, peut présenter et discuter documents, matériels, jeux, etc, etc, sont organisées sur le thème : "Méthodes, Moyens, Matériels, pour un enseignement de mathématiques adapté au monde réel et contemporain". En 1979, la Régionale de Reims en a organisé une le 7 mars. La Régionale de Haute-Normandie en a organisé les 14 et 15 Mars au CRDP de Rouen, le 21 mars au CDDP du Havre, le 28 mars au CDDP d'Evreux. La Régionale de Limoges en a organisé le 16 mai et la Régionale d'Orléans le 16 juin ... Tous les concours sont bienvenus.
- Une correspondance est en train de se mettre en place entre des classes de mathématiques du Québec et de la France. Les élèves échangent leurs propres productions, problèmes, jeux ou autres informations. La constitution de banques de données est l'un des objectifs. Si vous voulez participer, faites signe !

SCRABBLE

par Michel LABROUSSE (Limoges - Haute Vienne)

Replacer les noms suivants dans les cases du Scrabble :

CALCUL
CANTOR
CARREE
CAUCHY
CENTRE
CERCLE
COMETE
COSMOS
CYCLES
SERIE
SIGMA
SINUS
SOMME
SUITE



Y a-t-il plusieurs solutions ? (Voir une des solutions page 42).

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

Commandez ces brochures à votre Régionale (voir adresse page 43).
Le premier prix est "port compris".
Le prix entre parenthèses est "port non compris".

8. *Mots I*, 1974, 100 p., 9 F (6 F).
9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p., 4,50 F (3 F).
10. *Carrés magiques*, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 5,50 F (4 F).
11. *Mots II*, 1975, 108 p., 9 F (6 F).
12. *Substitutions et groupe symétrique*, par J. Dautrevaux. Epuisé.
13. *Mathématique pour la formation d'adulte* CUEEP, par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 18 F (15 F).
14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 1976, 220 p., 19 F (15 F). 2ème édition.
15. *Mots III*, 1976, 136 p., 9 F (6 F).
16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p., 4,50 F (3 F).
17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p., 29 F (25 F).
19. *Elem-Math III : La division à l'école élémentaire*, 1977, 96 p., 9,50 F (6 F).
20. *Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques*, 1977, 280 p., 29 F (25 F).
21. *Géométrie au premier cycle, tome 1*, 1977, 208 p., 29 F (25 F).
22. *Géométrie au premier cycle, tome 2*, 1978, 328 p., 30 F (25 F).
23. *Pavés et Bulles*, par Françoise Pécaut, 1978, 288 p., 30 F (25 F).
24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-I.R.E.M.)*, 1978, 120 p., 24 F (20 F).
25. *Mots IV*, 1978, 152 p., 11 F (7 F).
26. *Elem-Math IV : Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire*, 1978, 64 p., 7 F (5 F).

PROJET 1980 : EXPOSITION-CARREFOUR-FORUM DE LA RÉGIONALE APMEP d'ORLÉANS - TOURS

La Régionale d'Orléans-Tours de l'APMEP a pris l'initiative de la conception et de la réalisation d'une EXPOSITION-FORUM sur les mathématiques et leur enseignement. Cette exposition, qui pourrait s'intituler :

LES MATHEMATIQUES DANS LA VIE, LES MATHEMATIQUES DANS LA VILLE,

serait une occasion pour les enseignants, les élèves, certains utilisateurs des mathématiques, de montrer des réalisations, de proposer des activités, d'inviter à débattre de problèmes d'intérêt commun un public dont la définition dépend des lieux où pourra être présentée cette exposition. S'il paraît souhaitable d'éviter en général les établissements scolaires, les Maisons de la Culture et des locaux dépendant de comités d'entreprise pourront être utilisés au gré des accords locaux.

Il y a en effet une double idée autour de la réalisation et de la circulation de l'exposition. Si elle est effectivement l'occasion d'une réflexion commune, une certaine partie, un noyau de base pourra circuler à travers l'académie. Si elle est prise en charge par un groupe local : collègues, élèves, parents d'élèves, utilisateurs des mathématiques..., ce groupe local la complètera, l'animera, trouvera une ou plusieurs implantations. Il en assurera la responsabilité.

Qu'est-ce qu'on attend de cette exposition ?

Essentiellement qu'elle permette un contact direct (en dehors des contraintes institutionnelles qui règlent par exemple les rapports entre les profs et les parents d'élèves) entre les enseignants de maths ceux qui font ou utilisent des maths, ceux en sont les victimes, victimes actuelles en ce qui concerne les élèves, victimes "différées" en ce qui concerne les autres.

Mais ce contact doit se faire sur quelque chose, à propos de quelque chose. Ce n'est pas le désir de défendre telle ou telle position sur les maths ou leur enseignement ou les professeurs en tant que catégorie particulière. Ce n'est pas non plus les nécessités actuelles : défense des IREM.

C'est : montrer que le débat formation intellectuelle/enseignement de techniques comporte à la fois des aspects politiques, sociologiques et des aspects didactiques.

C'est : montrer que les mathématiques, par le biais des mathématisations et de l'activité mathématique, interviennent massivement dans la vie contemporaine à la fois dans la résolution de problèmes pratiques, dans l'utilisation idéologique de la notion de vérité, dans des activités plus personnelles comme le jeu.

C'est : montrer que les enseignants de mathématiques ont enrichi leur pratique pédagogique, que cet enrichissement est une nécessité mais qu'il ne peut pas se faire par décret. L'enseignement des mathématiques n'est pas coupé de la vie s'il y a une vie de l'enseignement des mathématiques.

On se propose de rencontrer les questions : à quoi ça sert ? pourquoi on apprend tant de choses ? les mathématiques et la réalité ? pourquoi on n'utilise pas, pour enseigner, les méthodes anciennes ?

On ne cherche pas à apporter une réponse collective, mais à présenter des éléments issus de la pratique quotidienne des enseignants, des utilisateurs pour provoquer une réflexion.

Comment va-t-elle se constituer ?

Trois volets essentiels : un projet, des partenaires, une réalisation.

Le projet est exposé dans ce document, discuté dans les départementales, amendé, enrichi, il fait l'objet d'une rédaction définitive lors d'une réunion de bureau. Il sert de texte de base pour les rencontres avec les partenaires.

Les partenaires. D'une part la Régionale, à travers les départementales et les groupes locaux qui la prennent en charge et en réalisent telle ou telle partie. D'autre part des utilisateurs des mathématiques. Ces utilisateurs se situent à plusieurs niveaux. On pense aux élèves naturellement. On pense aux adultes qui utilisent des mathématiques dans leur travail (INSEE, informatique,...).On pense aussi aux organisations syndicales et aux problèmes de formation. Les contacts avec ces partenaires sont fondamentaux à la fois pour éviter de dissimuler tel ou tel aspect de l'utilisation des mathématiques et pour ne pas oublier les implications et la complexité de son rôle social.

Une réalisation. Par exemple pour l'exposition de base on réunira des réalisations, soit de collègues, soit d'élèves, soit soit de parents d'élèves, soit de personnes extérieures et qui tournent autour d'un ou plusieurs thèmes, d'un ou plusieurs problèmes.

Dans le cadre d'un projet d'EXPOSITION - FORUM - CARREFOUR itinérant sur "LES MATHÉMATIQUES DANS LA VIE
LES MATHÉMATIQUES DANS LA VILLE"
en 1980 la régionale APMEP d'ORLEANS-TOURS recherche des idées, des informations, des concours sur les sujets suivants :

- LES MATHS, L'HOMME ET SON MILIEU.

- MATHS ET METIERS

  Quelles maths sont utilisées dans les différents métiers (artisans, ouvriers...). Quelles exploitations pour la classe ?

- MATHS ET SOCIETE

  Les maths servent à nous "décrire", à nous classer. Mais elles servent à nous sélectionner, à nous cacher des choses, à nous mentir (ou du moins à justifier des mensonges)

  Alors, peut-on en avoir peur ? Doit-on en parler ? Doit-on les laisser aux spécialistes ? Etes-vous doué pour les maths ?

- MATHS ET POLITIQUE

  La guerre et les maths.

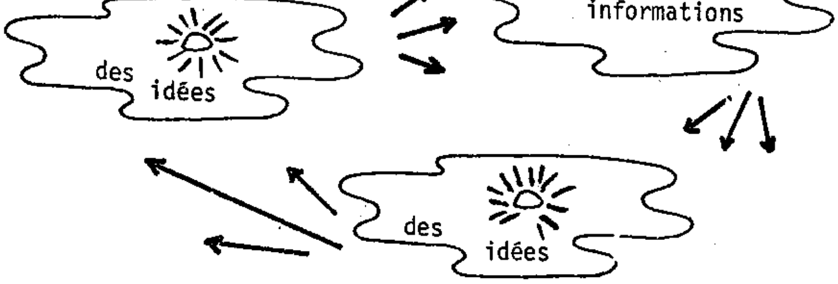
- MATHS ET ECONOMIE

  Les modèles !

- MATHS ET ENVIRONNEMENT

- FONCTION IDEOLOGIQUE DES MATHS. LES MATHS EST-CE LA VERITE ?

POINTS DE DÉPART :



MATERIEL POUR LA CLASSE, MATERIEL POUR LES CLUBS

Par ou pour les élèves de la maternelle à l'université... du 3ē âge.

Des idées, des recherches, des questions, des demandes d'information sur des mini-thèmes en vrac et pour des mini-dossiers évolutifs chacun apporte son caillou, sa pierre, son pavé...
chacun prends des idées....

LES MINI-THEMES

1. Minos-Ocker
2. Morpions
3. Planches Géo-plans
4. à clous Fils tendus
5. Autour du cube
6. En couleur (rain bow !)
7. Aires et volumes
8. "Edres"
9. Surfaces minimales
10. Stratégies
11. L'engrenage
12. Probab.
13. Trans-parences
14. Trans-fort
15. Dé-formations
16. Les articuls
17. Peuzels
18. Pavages. Dallages
19. Papiers - mesures
20. "Vieux jeux"
21. Des "chiffres" et des "nombres"
22. Maths et esthétique.

OBJECTIFS DE CE "THEME".

- recueillir et diffuser toute information sur tout thème d'apprentissage basé sur la construction et/ou l'utilisation de matériel.
- Mettre à la disposition des élèves et des enseignants des dossiers évolutifs décrivant
  . des réalisations (matériel, matériaux),
  . des sources et ressources.

dossiers qui seraient remis à jour périodiquement grâce aux apports de chacun et mis à la disposition de tous.

Offre Permanente de Coopération !

SCRABBLE

une solution possible