

# plot

BULLETIN DES RÉGIONALES A P M E P  
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

## Sommaire du n° 8 :

### Rencontres

Guy Robin - *Une construction des distributions* 3

### Pratique

Daniel Daviaud - *Un peu d'histoire dans un cours de probabilités* 9

Marc Blanchard - *Du matériel pour la classe (2)* 13

Jeannine Cartron - *Thème de calcul en Premier Cycle :  
A propos de la suite de Fibonacci* 16

Serge Parpay et Pierre Chevrier - *Les suites de Beatty* 20

Michel Labrousse - *Nombres Croisés* 26

### Echanges

Jean Fromentin - *Dans un club mathématique : les dominos.* 27

*Colloque sur la formation continue des enseignants :  
Poitiers, Mai 1978* 30

*Vie des Régionales* 32

*Appel aux lecteurs* 34

**Agenda** 35



## UNE CONSTRUCTION DES DISTRIBUTIONS

par Guy ROBIN (Limoges - Haute Vienne)

C'est vers 1945 que L. SCHWARTZ [5] introduisit les distributions pour donner une base solide à certains calculs effectués en physique utilisant par exemple la "fonction de Dirac".

Cette notion de distribution qui généralise la notion de fonction est maintenant très utilisée en physique quantique, en optique, électronique, probabilité et mathématique pure.

### RAPPEL DE LA CONSTRUCTION DE Q

Dans  $\mathbb{N}$  considérons l'opérateur  $M^p$  de multiplication par  $p : x \rightsquigarrow xp$  et soit  $D^p$  l'application :  $x \rightsquigarrow x/p$  définie sur l'ensemble des multiples de  $p$ .

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad M^p \circ M^q &= M^{p+q} \\ M^p D^p x &= x \quad \forall x \text{ multiple de } p \\ D^p M^p x &= x \quad \forall x \end{aligned}$$

$(p, y) \in \mathbb{N}^2$  étant donné il n'est pas toujours possible de résoudre l'équation  $M^p x = y$ . On remarque alors que s'il existe un ensemble  $Q \subset \mathbb{N}$  dans lequel on peut prolonger les opérateurs  $M^p$  et résoudre toute équation du type précédent alors :

$$M^p x = y \quad \text{et} \quad M^q x = z \quad \Rightarrow \quad M^q y = M^p z$$

On considère alors sur  $\mathbb{N}^2$  la relation d'équivalence :

$$(y, p) \mathcal{R} (z, q) \iff M^q y = M^p z$$

et on montre que l'ensemble quotient  $Q = \mathbb{N}^2 / \mathcal{R}$  répond à la question.

### INTRODUCTION A NOTRE PROBLEME

Désignons par  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré au plus  $n$ ,  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues.

Soit  $\mathcal{J}$  l'opérateur intégration défini sur

$$\mathcal{E} : f \rightsquigarrow \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^n = \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^{n-1}.$$

Soit  $\mathcal{D}$  l'opérateur dérivation défini sur les fonctions dérivables  $f \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \mathcal{J}^p \circ \mathcal{J}^q &= \mathcal{J}^{p+q} \\ \mathcal{D}^p \circ \mathcal{J}^p f &= f \quad \forall f \in \mathcal{E} \\ \mathcal{J}^p \mathcal{D}^p f &= f + \mathcal{P}_{n-1} \quad \forall f \text{ p-fois dérivable} \\ &\quad \mathcal{P}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad \mathcal{J}^p \mathcal{D}^p f = f(\mathcal{P}_{n-1}) \quad \forall f \text{ p-fois dérivable}$$

$(p, f) \in \mathbb{N} \times \mathcal{E}$  étant donné il n'est pas toujours possible de résoudre sur  $\mathcal{E}$  l'équation  $\mathcal{J}^p x = f$  ; ceci nécessite en effet que  $f$  soit p-fois dérivable. S'il y a une solution elle n'est unique que modulo  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

Cherchons donc un ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$  dans lequel on puisse prolonger  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{D}$  et tel que toute équation  $\mathcal{J}^p x = f(\mathcal{P}_{p-1})$  ait toujours une solution.

$$\text{Si } \mathcal{J}^p x = f(\mathcal{P}_{p-1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^q x = g(\mathcal{P}_{q-1}) \quad \text{alors :}$$

$$\mathcal{J}^{p+q} x = \mathcal{J}^q(\mathcal{J}^p x) = \mathcal{J}^q(f) \quad (\mathcal{P}_{p+q-1}) \quad \text{d'une part}$$

$$= \mathcal{J}^p(\mathcal{J}^q x) = \mathcal{J}^p(g) \quad (\mathcal{P}_{p+q-1}) \quad \text{d'autre part.}$$

$$\text{Donc} \quad \mathcal{J}^q(f) = \mathcal{J}^p(g) \quad (\mathcal{P}_{p+q-1})$$

relation équivalente à

$$\forall m \geq \sup(p, q) \quad \mathcal{J}^{m-p} f = \mathcal{J}^{m-q} g \quad (\mathcal{P}_{m-1})$$

## DEFINITION DES DISTRIBUTIONS

Sur  $\mathcal{E} \times \mathbb{N}$  on définit la relation :

$$(f, p) \mathcal{R} (g, q) \iff \mathcal{J}^q f = \mathcal{J}^p(g) \quad (\mathcal{P}_{p+q-1})$$

c'est une relation d'équivalence.

Exemples : 1)  $(2x, 1) \mathcal{R} (x^2, 2) \mathcal{R} (x^2 + 2x + 3, 2) \mathcal{R} (2, 0)$

2) Si  $Y$  désigne la fonction d'Heaviside c'est-à-dire

$$Y(x) = 1 \iff x > 0 \quad \text{et} \quad Y(x) = 0 \iff Y(x) < 0$$

$(Yx^2, 2) \mathcal{R} (Yx, 1)$  et il n'existe pas de fonction  $f$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $(Yx, 1) \mathcal{R} (f, 0)$ .

L'ensemble quotient  $\mathcal{L} = (\mathcal{E} \times \mathbb{N}) / \mathcal{R}$  sera l'ensemble des distributions. On notera  $[f, p]$  ces éléments.

Exemple :  $[Yx, 2]$  est appelée distribution de Dirac ; elle est notée  $\delta$  et est d'un usage fondamental.

## STRUCTURE ALGEBRIQUE DE $\mathcal{L}$

On définit l'addition comme dans  $\mathcal{Q}$ , après réduction au même dénominateur.

$$\begin{aligned} [f, r] + [g, s] &= [I^{m-r} f, m] + [I^{m-s} g, m] \\ &= [I^{m-r} f + I^{m-s} g, m]. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  on pose :

$$\alpha[f, r] = [\alpha f, r].$$

Ces deux opérations sont bien définies et confèrent à  $\mathcal{C}$  une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

PLONGEMENT DE  $\mathcal{E}$  DANS  $\mathcal{C}$

La correspondance  $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$   
 $f \longmapsto [f, 0]$

est un morphisme injectif d'espace vectoriel et permet de considérer que  $\mathcal{E}$  est contenu dans  $\mathcal{C}$  en faisant l'identification.

$f = [f, 0]$ .

FONCTIONS LOCALEMENT SOMMABLES

Si  $\mathcal{L}_{loc}$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrables (au sens de Lebesgue) sur tout segment de  $\mathbb{R}$  alors comme

$\forall f \in \mathcal{E}$  on peut considérer l'application suivante  
 $\mathcal{L}_{loc} \rightarrow \mathcal{C}$   
 $f \longmapsto [f, 1]$

\* (pp) = presque partout

Cette application est un morphisme d'espace vectoriel et son noyau est l'ensemble des fonctions nulles \*(pp) ; on peut donc considérer que  $\mathcal{C}$  contient l'ensemble  $L_{loc}$  des classes de fonctions de  $\mathcal{L}_{loc}$ .

Remarque-

La définition des distributions aurait pu être donnée à partir de  $\mathcal{L}_{loc}$  au lieu de  $\mathcal{E}$  ; on montre facilement que la correspondance

$(L_{loc} \times \mathbb{N}) / \mathbb{R} \longrightarrow (\mathcal{E} \times \mathbb{N}) / \mathbb{R}$   
 $[f, p] \longmapsto [f, p+1]$

( $\tilde{f}$  désigne la classe de  $f$  dans  $L_{loc}$ ), est un isomorphisme.

Comme dans la pratique on confond  $f$  et  $\tilde{f}$  on peut écrire par exemple que :

$\delta = [Y, 1]$ .

Il n'est pas dans notre but de construire toute la théorie des distributions mais de montrer comment on peut prolonger simplement certaines opérations définies sur  $\mathcal{E}$  et de remarquer qu'il est alors plus simple de calculer dans  $\mathcal{C}$ .

LA DÉRIVATION DANS  $\mathcal{C}$

Nous allons montrer qu'il est toujours possible de dériver dans  $\mathcal{C}$ .

Désignons encore par  $\mathcal{D}$  l'opérateur de dérivation dans  $\mathcal{C}$ . Remarquons d'abord que si  $f$  est  $C^1$ ,  $f$  et  $f'$  sont des éléments de  $\mathcal{C}$  ; on doit donc avoir :

$\mathcal{D}f = f'$

soit  $\mathcal{D}[f, 0] = [f', 0] = [f, 1]$

ce qui nous amène à poser la définition suivante :

Définition de  $\mathcal{D}$   $\mathcal{D}[f, p] = [f, p+1]$ .

Cette définition est bien posée ; elle montre que toute distribu-

tion est dérivable et par suite, indéfiniment dérivable.

On peut écrire :

$$[f, p] = \mathcal{D}[f, p-1] \mathcal{D}^2[f, p-2] = \dots = \mathcal{D}^p[f, 0] = \mathcal{D}^p f$$

Ainsi : Toute distribution s'interprète comme la dérivée n<sup>ième</sup> d'une fonction continue.

Exemple fondamental : (fig. 1)

Soit  $f$  une fonction présentant un point de discontinuité de première espèce à l'origine et  $C^1$  en dehors ; la fonction  $f'$  qui existe sur  $\mathbb{R}^*$  est donc définie (pp) ; elle définit une fonction de  $\mathcal{L}_{loc}$  et donc une distribution notée encore  $\mathcal{D}f'$ . Soit  $\mathcal{D}f$  la dérivée de  $f$  au sens des distributions. Déterminons la relation entre  $\mathcal{D}f$  et  $f'$ .

Désignons par  $\sigma(f) = f(0^+) - f(0^-)$  le saut de la fonction  $f$  à l'origine

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f - f' &= [f, 1] - [f', 0] = [f, 1] - [\mathcal{J}f', 1] \\ &= [f - \mathcal{J}f', 1]. \end{aligned}$$

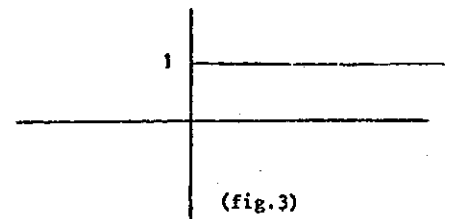
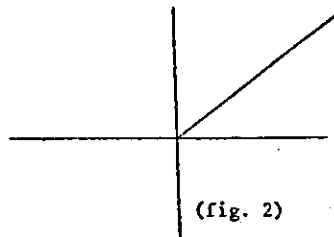
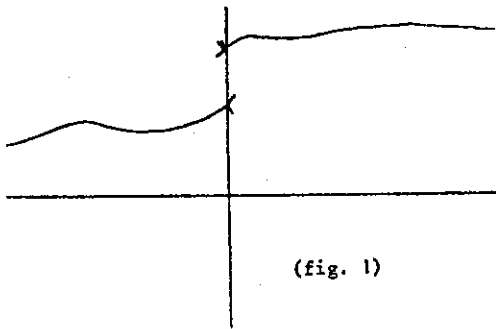
$$\text{Or } \mathcal{J}f' = \begin{cases} x & f' = \begin{cases} f(x) - f(0^+) = f(x) - f(0^-) - \sigma(f) & \text{si } x > 0 \\ f(x) - f(0^-) & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{Soit } \mathcal{J}f' = f - f(0^-) - \sigma(f) Y$$

$$\text{D'où } \mathcal{D}f - f' = [f(0^-) + \sigma(f)Y, 1] = \sigma(f)[Y, 1] = \sigma(f)\delta$$

$$\text{Soit } \boxed{\mathcal{D}f = f' + \sigma(f)\delta}$$

Ainsi la dérivée de la fonction  $Yx$  (fig. 2) est  $Y$  (fig. 3) la dérivée de  $Y$  est  $\delta$ .



## RETOUR AU PROBLEME DE DÉPART

Bien que cette vérification soit inutile pour le développement ultérieur il est bon de montrer que nous avons résolu le problème posé au départ, à savoir que toutes les équations du type  $\mathcal{J}^p x = f(\mathcal{P}_{p-1})$  ont une solution dans  $\mathcal{C}$ ,  $f$  étant élément de  $\mathcal{E}$  ou plus généralement de  $\mathcal{C}$ . Il faut d'abord étendre  $\mathcal{J}^p$  à  $\mathcal{C}$ .

Il est naturel de regarder la correspondance  $[f, p] \rightsquigarrow [\mathcal{J}f, p]$  mais ce n'est pas une application ; on définit correctement :

$$\mathcal{J} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{P}_0$$

$$[f, p] \rightsquigarrow \text{la classe de } [\mathcal{J}f, p] \text{ dans } \mathcal{C}/\mathcal{P}_0$$

De même  $\mathcal{J}^p$  défini par composition est une application de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}/\mathcal{P}_{p-1}$ . L'opérateur de dérivation  $\mathcal{D}^p$  s'annulant sur  $\mathcal{P}_{p-1}$  définit aussi une application notée  $\mathcal{D}^p$  de  $\mathcal{C}/\mathcal{P}_{p-1}$  dans  $\mathcal{C}$ , et l'on a,  $\bar{T}$  désignant l'image canonique de  $T$  dans  $\mathcal{C}/\mathcal{P}_{p-1}$

$$\mathcal{J}^p \mathcal{D}^p T = \bar{T}$$

$$\mathcal{D}^p \mathcal{J}^p T = T$$

L'équation  $\mathcal{J}^p x = \bar{T}$ ,  $T \in \mathcal{C}$ , admet donc  $x = \mathcal{D}^p T$  comme unique solution en effet :

$$\mathcal{J}^p x = \bar{T} \Leftrightarrow \mathcal{D}^p \mathcal{J}^p x = \mathcal{D}^p \bar{T} = \mathcal{D}^p T \Leftrightarrow x = \mathcal{D}^p T.$$

## LE PRODUIT DE CONVOLUTION

Pour deux fonctions continues  $f$  et  $g$  on définit le produit de convolution comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Ce produit n'existe pas toujours mais lorsqu'il existe,  $f * g$  est une fonction continue.

Pour deux distributions  $[f, p]$  et  $[g, q]$  telles que le produit  $f * g$  existe, on pose :

$$[f, p] * [g, q] = [f * g, p+q].$$

Ce produit a d'importantes propriétés. Certains sous-ensembles de distributions sont stables pour  $(+, *)$  et constituent un anneau dans lequel les calculs sont simples.

A titre d'exemple calculons  $\delta * T$ ,  $\delta$  étant la distribution de Dirac ( $\delta = [Y, 1]$ ) et  $T$  une distribution quelconque.

$$\delta * T = [Y, 1] * [f, p] = [Y * f, p+1]$$

$$\text{or } Y * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) Y(x-t)dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \mathcal{J} f + C$$

$C$  étant une constante.

$$\text{Donc } \delta * T = [\mathcal{J} f + C, p+1] = [\mathcal{J} f, p+1] = [f, p] = T$$

$$\text{Donc } \boxed{\delta * T = T}$$

$\delta$  est ainsi l'élément neutre ; en théorie des fonctions le produit de convolution n'admet donc pas d'élément neutre. Quand on sait l'importance de cette notion et de celle de symétrique on entrevoit mieux l'intérêt de raisonner dans  $\mathcal{C}$ .

On pourra aussi vérifier les égalités :

$$\mathcal{D} \delta * T = \mathcal{D} T$$

$$Y e^{\lambda x} * (\mathcal{D} \delta - \lambda \delta) = \delta$$

## CONCLUSION

Nous venons de présenter une construction axiomatique des distributions suivant en cela J. SEBASTIÃO E. SILVA [4]. D'autres présentations sont possibles.

- Définition comme fonctionnelle linéaire : SCHWARTZ [6], RODDIER [3]
- Définition comme limite de fonctions : LIGHTHILL [1]
- Définition à partir du produit de convolution : MIKUSINSKI [2]

Pour calculer avec les nombres réels il n'est pas besoin de connaître leur définition. Il en est de même pour les distributions : la définition n'intervient alors que pour l'étude de nouveaux concepts : convergence des suites de distributions, séries de distributions, séries de Fourier, transformation de Laplace, de Fourier.....

---

 RÉFÉRENCES

- [1] LIGHTHILL Fourier analysis and generalised functions  
Cambridge University Press 1970
- [2] J. MIKUSINSKI Operational Calculus  
Pergamon Press 1959
- [3] F. RODDIER Distributions et transformation de Fourier  
Ediscience Paris 1971
- [4] J. SEBASTIÃO E. SILVA Sur une construction axiomatique des  
distributions. Rev. Fac. Ciencias - Lisboa  
2e série A 1954 p. 79.186
- [5] L. SCHWARTZ Théorie des distributions I, II.  
Act. Scient. Ind N° 1091 Hermann Paris (1950)
- [6] L. SCHWARTZ Méthodes mathématiques pour les sciences physiques  
Hermann 1965

## UN PEU D'HISTOIRE DANS UN COURS DE PROBABILITÉS

par Daniel DAVIAUD (Jonzac - Charente Maritime)

En 1976-77 et 1977-78, un groupe de l'IREM de POITIERS se réunissait à Angoulême et étudiait quelques points d'Histoire des Mathématiques. Des problèmes historiques dont la résolution a donné naissance au calcul des probabilités ont été proposés à des lycéens qui ne connaissaient que des notions de Combinatoire. Il s'agissait, selon l'expression consacrée, d'introduire "une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques".

En classe, les élèves semblent intéressés par ce travail : ils y découvrent d'autres aspects du personnage qu'est Pascal, se sentent réconfortés de savoir que Cardan ou d'Alembert aient pu se tromper. Ils sont en présence d'une mathématique qui se constitue de façon vivante et humaine. L'activité des mathématiciens comporte des erreurs, des remises en cause et des corrections ; elle ne se réduit pas à rédiger des exposés synthétiques entièrement déductifs.

Les problèmes proposés ici présentent une situation concrète (un jeu), un modèle mathématique primitif (compter des décompositions en I et II, linéarité en III et IV) et la constatation que ce modèle n'est pas conforme à l'expérience ; cela provoque la recherche d'un autre modèle plus adéquat.

On peut espérer que de tels exercices aideront les élèves à comprendre la nature du savoir lorsqu'ils y réfléchiront en cours de philosophie. On peut imaginer aussi que les professeurs de mathématiques se demanderont pourquoi d'illustres savants donnèrent des réponses erronées à des questions "très faciles" et qu'ils deviendront plus compréhensifs envers certaines erreurs d'élèves.

Naturellement, la fiche présentée ici est perfectible.

Voici d'ailleurs les références qui serviront à l'élaborer : ce ne sont malheureusement pas toujours des documents originaux.

- Les lettres de Pascal à Fermat (1654) se trouvent dans les Oeuvres complètes de Pascal ; le problème des dés en est issu.

- L'article de E. Borel dans l'Encyclopédie Française, section E, probabilités, évoque le jeu de passe-dix à la page 1.92.1.

- Le livre de P. Raymond "De la Combinatoire aux Probabilités" (collection Algorithmes, Maspéro) fait allusion au problème du Grand Duc de Toscane (page 70), et à une erreur de Cardan concernant les dés (page 68).

- L'erreur de d'Alembert est exposée (par exemple) par Northrop dans "Fantaisies et Paradoxes mathématiques" (page 173).

## QUELQUES PROBLEMES HISTORIQUES DONT LA RESOLUTION A DONNE NAISSANCE AU CALCUL DES PROBABILITES

### PROBLEME DU GRAND DUC DE TOSCANE (Cardan - Galilée - 16ème siècle)

En jetant 3 dés, on peut obtenir :

9 points de 6 manières suivantes      et 10 points de 6 manières suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 + 6 \\ 1 + 3 + 5 \\ 1 + 4 + 4 \\ 2 + 2 + 5 \\ 2 + 3 + 4 \\ 3 + 3 + 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3 + 6 \\ 1 + 4 + 5 \\ 2 + 2 + 6 \\ 2 + 3 + 5 \\ 2 + 4 + 4 \\ 3 + 3 + 4 \end{array} \right.$$

Or le Grand Duc de Toscane, joueur assidu, remarqua qu'on obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Pourquoi ?

Cardan (italien, 1501-1576), célèbre pour avoir résolu les équations du 3ème degré a séché sur ce problème que Galilée (italien, 1564-1642) trouva un peu plus tard.

Il s'agit de dénombrer l'ensemble de tous les triplets possibles, et de dénombrer parmi eux, ceux qui constituent les événements "obtenir 9 points" et "obtenir 10 points", on pourra ensuite comparer.

### PROBLEME DU JEU DE PASSE-DIX (Méré - Pascal - 17ème siècle)

Le jeu consiste encore à jeter 3 dés. On gagne si le total des points obtenus sur les 3 dés est 11 ou 12 (passe-dix). Or, vers 1650, le Chevalier de Méré, homme de lettres fréquentant la cour de Louis XIV et les milieux mondains, demande à son ami Blaise Pascal pourquoi le 11 apparaît plus souvent que le 12, alors que chacun d'eux se décompose de 6 façons. Et Pascal explique...

## PREMIER PROBLEME DE DÉS (Cardan - 16ème siècle)

Cardan avait cherché la probabilité d'obtenir un 6 (au moins un) en jetant  $n$  fois un dé. Si  $n = 1$ , cette probabilité est  $1/6$ . Et il avait écrit que si  $n = 2$ , elle est de  $2/6$  ; si  $n = 3$ , elle est de  $3/6$  ; si  $n = 4$ , elle est de  $4/6$ .

Qu'en pensez-vous ? Corriger éventuellement.

D'ailleurs, dans le même ouvrage, Cardan a rectifié son estimation en constatant que, si  $n = 6$ , le résultat  $6/6 = 1$  est visiblement faux.

## DEUXIEME PROBLEME DE DÉS (Méré - Pascal - Fermat - 17ème siècle)

Voici un extrait de la lettre du 29 Juillet 1654 adressée par Pascal au mathématicien toulousain Fermat :

*"Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. le Chevalier de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut)..."*

Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :

*Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.*

*Si on entreprend de faire sonner avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.*

*Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces des deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).*

*Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes."*

Il s'agit de comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en jetant 4 fois un dé, avec la probabilité d'obtenir au moins un double 6 (faire sonner) en jetant 24 fois un double dé.

A propos de l'étonnement de Méré, Jacques Bernoulli (mathématicien suisse, 1654-1705, auteur d'un traité de probabilités) conseille de se méfier des raisonnements de bon sens qui peuvent conduire à des résultats faux : "le calcul montre les choses autrement qu'elles n'é-

taient au premier abord" à un "homme d'un grand bon sens". Ainsi ne faut-il pas raisonner au nom de principes généraux, comme celui des propositions constantes entre éléments occupant des situations identiques mais non identiques eux-mêmes ; il faut "se tenir en garde contre les analogies", contre les modèles qu'on tire d'une ressemblance superficielle. Comparaison n'est pas raison.

#### L'ERREUR DE D'ALEMBERT (18ème siècle)

En 1754, on demanda à d'ALEMBERT quelle était la probabilité d'obtenir FACE au moins une fois en jetant 2 fois une pièce de monnaie. D'ALEMBERT raisonna ainsi. Il y a 3 cas seulement : face au 1er jet, ou face au 2ème jet, ou pas de faces du tout. Or deux de ces trois éventualités (les deux premières) constituent l'événement attendu. Donc la probabilité cherchée est  $2/3$ . Qu'en pensez-vous ?

### LES PUBLICATIONS DE L'A. P. M. E. P.

Commandez ces brochures à votre  
Régionale (voir adresse page 35)

Le premier prix est "port compris".

Le prix entre parenthèses est  
"port non compris".

8. *Mots I*, 1974, 100 p., 9 F (6 F).
9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p., 4,50 F (3 F).
10. *Carrés magiques*, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 5,50 F (4 F).
11. *Mots II*, 1975, 108 p., 9 F (6 F).
12. *Substitutions et groupe symétrique*, par J. Dautrevaux. Epuisé.
13. *Mathématique pour la formation d'adultes CUEEP*, par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 18 F (15 F).
14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.)*, 1976, 220 p., 19 F (15 F). 2ème édition.
15. *Mots III*, 1976, 136 p., 9 F (6 F).
16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p., 4,50 F (3 F).
17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p., 29 F (25 F).
19. *Elem-Math III : La division à l'école élémentaire*, 1977, 96 p., 9,50 F (6 F).
20. *Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques*, 1977, 280 p., 29 F (25 F).
21. *Géométrie au premier cycle, tome 1*, 1977, 208 p., 29 F (25 F).
22. *Géométrie au premier cycle, tome 2*, 1978, 328 p., 30 F (25 F).
23. *Pavés et Bulles*, par Françoise Pécaut, 1978, 288 p., 30 F (25 F).
24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-I.R.E.M.)*, 1978, 120 p., 24 F (20 F).
25. *Mots IV*, 1978, 152 p., 11 F (7 F).
26. *Elem-Math IV : Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire*, 1978, 64 p., 7 F (5 F).

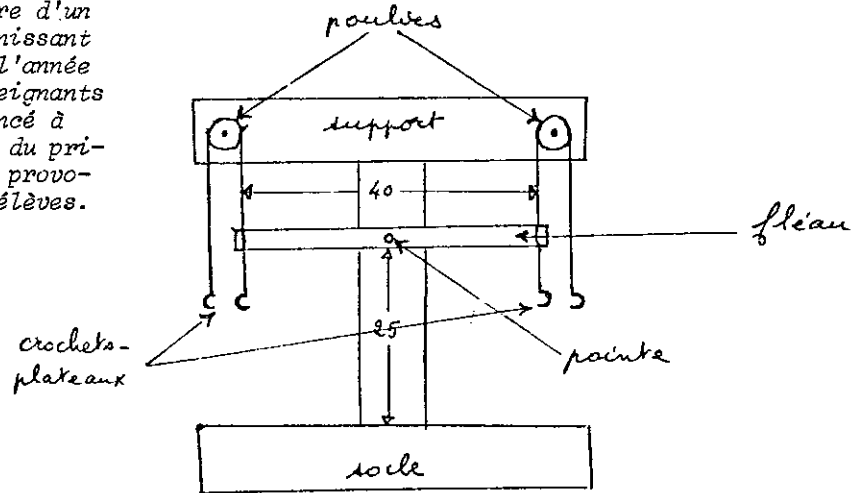
DU MATÉRIEL POUR LA CLASSE (2)

par Marc BLANCHARD (Rochefort-sur-mer - Charente Maritime)

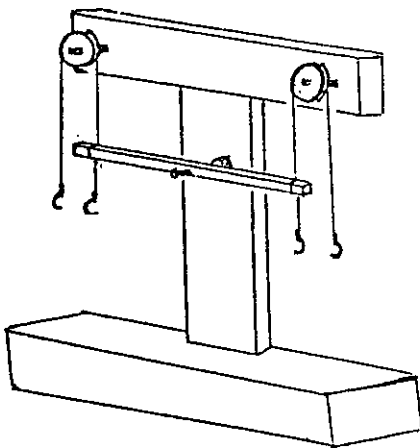
UNE BALANCE A INTRODUIRE LES ENTIERS RELATIFS OU A RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS

(d'après une idée de Serge PARPAY)

Voici la suite de la présentation de matériel conçu pour la classe qui avait été commencée dans le PLOT n° 7. Ces instruments ont été réalisés dans le cadre d'un groupe APM Primaire-Secondaire réunissant régulièrement à Rochefort, durant l'année 77-78, des instituteurs et des enseignants du Secondaire. Ce matériel a commencé à être utilisé dans les classes (fin du primaire et début du secondaire) et a provoqué un vif intérêt de la part des élèves.



VUE DE FACE



Les cotes sont en centimètres  
 Les poulies ont une gorge assez profonde. Entre le fléau et le support se place un demi-bouchon pour maintenir le fléau en place.

On dispose en outre de masses marquées pouvant se suspendre aux crochets (sachets remplis de sable, munis d'un anneau) : 3 sachets étiquetés 1, 3 autres étiquetés 2, 2 autres 3, 2 autres 4 et 2 autres 5. Leurs poids respectifs sont proportionnels au numéro de leurs étiquettes.

On peut distinguer les plateaux intérieurs ou extérieurs, du même côté ou non.

## ACTIVITÉS POSSIBLES

- 1) Constater que l'équilibre est obtenu en suspendant 2 sachets de même poids
  - a) du même côté, un au crochet intérieur et l'autre au crochet extérieur ;
  - b) un à chaque crochet intérieur ;
  - c) un à chaque crochet extérieur.
  
- 2) Si l'équilibre est réalisé, vérifier qu'il est maintenu en ajoutant ou enlevant le même poids sur les plateaux intérieurs (ou extérieurs, ou du même côté).  
Il s'en déduit une règle de simplification.

## EXEMPLE

Si du côté gauche on pend un sachet n° 3 au crochet intérieur et un sachet n° 1 sur le crochet extérieur, on code (3, 1) la situation à gauche.

Que faut-il faire à droite pour rétablir l'équilibre ?

Après tâtonnements, on trouve, par exemple : 4 à l'intérieur et 2 à l'extérieur, codé (4, 2), ou encore les situations (5, 3), ou (3, 1), voire (2, 0).

Dresser des tableaux pendant la manipulation sur plusieurs exemples, peut permettre de dégager la loi :

(a, b) à gauche équilibre (c, d) à droite lorsque

$$\underline{a + d = b + c}$$

On retrouve une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{N}^2$  qui permet d'obtenir  $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2 / \mathcal{R}$

On vérifie que chaque classe est caractérisée par un élément du type (0, m) ou (n, 0).

Chaque classe peut se coder :

- cl(0, m) codée  $m_e$  (e pour extérieur) ou pourquoi pas (-m) ?
- cl(n, 0) codée  $n_i$  (i pour intérieur) ou pourquoi pas (+n) ?

Par ajout de sachets, l'addition intervient sur les couples puis dans  $\mathbb{N}^2 / \mathcal{R}$ . Ses propriétés sont "concrètement" vérifiées. On peut noter que pour obtenir l'opposé de (a, b), il faut considérer (b, a) (intervertir les sachets du même côté), puis les classes correspondantes de  $\mathbb{Z}$ .

La relation d'ordre  $>$  intervient lorsqu'on n'a pas nécessairement l'équilibre.



côté de la balance, on aurait pu traiter exactement de la même façon l'introduction de Z en codant  $(a, b)_i$  la situation : le sachet n° a est sur le crochet intérieur gauche et le n° b est sur le crochet intérieur droit, puis  $(c, d)_e$  de façon analogue pour les crochets extérieurs.

Il y a là dissymétrie des situations qu'il faut vaincre en faisant constater qu'extérieur ou intérieur jouent le même rôle, c'est sans doute moins évident que droite ou gauche, d'où le choix fait.

L'intérêt d'un tel matériel réside d'abord en son... existence, les élèves manipulent et sont amenés à se poser des problèmes qu'assez vite, on ne peut résoudre physiquement, il faut donc abstraire. En outre la simplicité du matériel permet d'envisager (au bout de 2 ou 3 ans) d'avoir un grand nombre de balances semblables dans une même classe en même temps. Les élèves peuvent donc les manipuler par tous petits groupes, sinon individuellement, après les avoir construites.

## THEME DE CALCUL EN PREMIER CYCLE : A PROPOS DE LA SUITE DE FIBONACCI

par Jeannine CARTRON (NIORT - Deux Sèvres)

Référence : Brochure "trois thèmes de travail en classe de 5<sup>e</sup>", par Mmes Boudarel, Cartron et Feyssaguet (des Irem de Paris-Nord et Poitiers).

Bibliographie : Les cahiers du Clain (Irem de Poitiers).




Minicalculatrices : T.I. 30 (Texas Instruments)

Ce document a été proposé dans une classe de 5<sup>e</sup>, une classe de 4<sup>e</sup> et deux classes de 3<sup>e</sup> (dont une faible) du Collège Jean Zay de Niort. Quel que soit le niveau considéré, le déroulement du thème a demandé une semaine dont une séance en classe dédoublée. Le travail s'est effectué par groupes de deux et une intense activité a régné dans les classes pendant toute sa durée. Les interventions de l'enseignant ont été réduites au minimum, et chaque fois à la demande des élèves. Il n'a été fait aucun exposé avant, ni pendant, ni après.

La première partie du thème n'a évidemment offert aucune difficulté, la formule de calcul de  $u_n$  a été découverte à tous les niveaux. Par contre, la vérification de la formule générale pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$  a posé plus de problèmes. En 4<sup>e</sup> et en 3<sup>e</sup>, après bien des tâtonnements, les élèves sont arrivés à trouver seuls et à expliquer le pourquoi de l'ordre dans lequel on devait manipuler la machine. En 5<sup>e</sup>, l'enseignant a dû intervenir pour expliquer l'échange du signe et le calcul de  $(1 - \sqrt{5})^n$ .



- C) On dispose de pavés rectangulaires de largeur 0,50 m et de longueur 1 m pour paver un chemin rectangulaire de 1 m de large. De combien de façons peut-on réaliser le pavage lorsque la longueur du chemin est :

| 0,50 m  | 1 m  | 1,5 m | 2 m | 2,5 m | etc... |
|---|--|-------|-----|-------|--------|
|  | <br> |       |     |       |        |
| 1   | 2  |       |     |       |        |

Compléter le tableau.

- D) Pour payer un achat on ne dispose que de pièces de 1 F et de 2 F. De combien de manières peut-on s'acquitter d'une dette en versant successivement soit des pièces de 1 F, soit des pièces de 2 F ?

| Somme due | Diverses façons de payer         | Nombre de manières |
|-----------|----------------------------------|--------------------|
| 1 F       | 1 F                              | 1                  |
| 2 F       | (1 F + 1 F) ou 2 F               | 2                  |
| 3 F       | (1F+1F+1F) ou (1F+2F) ou (2F+1F) | 3                  |
| 4 F       |                                  |                    |
| 5 F       |                                  |                    |
| etc       |                                  |                    |

Compléter le tableau.

- E) Pour monter les marches d'un escalier, je monte une marche après l'autre ou deux marches d'un coup.

De combien de façons différentes puis-je atteindre une marche déterminée ?

Tu as maintenant compris que si  $u_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre, alors :

$$u_1 = 1 ; u_2 = 1 ; u_3 = 2 ; u_4 = 3 \text{ etc...}$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

### SERVONS-NOUS DE LA MINI-CALCULATRICE

- A) Prise de contact avec la machine, tâtonnements pour des calculs simples :  
addition - soustraction - multiplication - division -  $\sqrt{\quad}$  et  $y^x$ .
- B) Calculs en chaîne pour s'habituer à manipuler la machine.

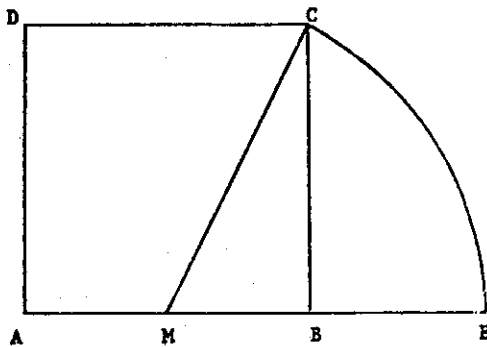
- a) faciles et qui pourraient facilement être comptés mentalement.  
ex : Calculer  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  pour  $n=1$  puis  $n = 2, 3 \dots 20$ .
- b) plus difficiles : la règle de calcul étant celle de la suite de Fibonacci :  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , si  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2$ ; fais le calcul jusqu'à  $u_{30}$ .
- c) On peut démontrer (voir Bibliographie cahiers du Clain) que :

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \times \sqrt{5}}$$

Vérifie cette formule pour  $n = 1 ; n = 2 ; n = 3$ .

**LE NOMBRE D'OR**

- A) Dessine avec soin un carré dont le côté a mesure 10 cm. Désigne par A, B, C, D, ses sommets. Prolonge le côté AB, pique ton compas au milieu M du segment [AB] et trace le cercle de rayon [MC]. Il coupe le prolongement de [AB] au point E. Termine le rectangle (D,A,E,F). Mesure la longueur de ce rectangle.



Calcule  $\frac{AE}{AB}$ . Ce nombre s'appelle le nombre d'or mais par cette méthode ce n'est qu'une valeur approchée.

[En 3è on peut faire calculer  $d(M,E)$ ].

On demande que  $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1, 618\ 033\ 988\ 749\ 894 \dots$

- B) Effectue avec la machine le calcul suivant : à partir de la suite de Fibonacci, calcule :  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  pour  $n = 1 ; 2 ; \dots 19$ . Que constates-tu ?

C) Calcule :

$$1 + \frac{1}{1} ; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} ; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} ; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

Compare avec  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Pour faire le calcul sers-toi de la remarque suivante :

$$u_1 = 1 + \frac{1}{1} ; \quad u_2 = 1 + \frac{1}{u_1} ; \quad u_3 = 1 + \frac{1}{u_2} ; \quad \dots ; \quad u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$$

**N.B. : Constatations amusantes :** Dans la nature, on retrouve les termes de la suite de Fibonacci.

- une pomme d'épicéa a 5 spirales d'écaïlle tournant dans un sens et 8 tournant dans l'autre sens.
- l'ananas a 8 spirales dans un sens et 13 dans l'autre.
- le coeur de la marguerite : 21 et 34.
- le coeur de la fleur de tournesol : 34 et 55.

## LES SUITES DE BEATTY

par Serge PARPAY et Pierre CHEVRIER (Niort - Deux Sèvres)

Référence : "Pour la science" n° 1 nov. 1977 - article de Martin GARDNER  
Sam BEATTY est un mathématicien canadien. Les suites de BEATTY datent de 1926.

La première partie de cette fiche ne présente que des calculs sans grande difficulté, curieux, et permettant l'utilisation d'un calculateur de poche. Les parties B et C contiennent des définitions et la démonstration des résultats.

## PARTIE A

1) Définition

Soit  $k$  un nombre réel. Il existe un nombre entier unique  $n$  tel que  $n \leq k < n+1$

On écrit  $n = [k]$   $[k]$  est appelé partie entière de  $k$ .

exemples :

$$[\sqrt{2}] = 1 \quad ; \quad [-3] = -3 \quad ; \quad [-6,1] = -7 \quad ; \quad [-\sqrt{5}] = -3$$

2) Le nombre  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est appelé nombre d'or.

Donnez une valeur approchée de  $\phi$

Calculez  $\phi^2$

Donnez une valeur approchée de  $\phi^2$

$$\text{Montrez que } \phi^2 = \phi + 1 = \frac{\phi}{\phi^2 - 1} \quad (1)$$

On trouvera des exercices intéressants sur le nombre d'or dans les "cahiers du groupe du Clain" édités par l'I.R.E.M. de Poitiers.

$$\text{Déterminez } [1\phi] , [2\phi] , [3\phi] , \dots , [12\phi] \quad (2)$$

$$[1\phi^2] , [2\phi^2] , [3\phi^2] , \dots , [8\phi^2] \quad (3)$$

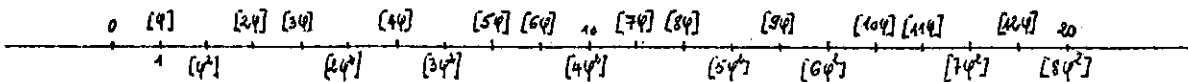
On calcule d'abord des valeurs approchées des nombres  $1\phi$  ,

$2\phi, \dots, 12\phi$ . A  $10^{-3}$  près, on trouve respectivement 1,618 - 3,236 - 4,854 - 6,472 - 8,090 - 9,708 - 11,326 - 12,944 - 14,562 - 16,180 - 17,798 - 19,316 -

On calcule de même des valeurs approchées des nombres  $1\phi^2, 2\phi^2, \dots, 8\phi^2$ . A  $10^{-3}$  près, on trouve respectivement : 2,618 - 5,236 - 7,854 - 10,472 - 13,090 - 15,708 - 18,326 - 20,944. On peut naturellement utiliser la relation (1)  $\phi^2 = \phi + 1$

d'où  $n\phi^2 = n\phi + n$   
 par exemple  $5\phi^2 = 5\phi + 5$

Compte tenu des résultats obtenus, les parties entières se répartissent comme suit :



Ainsi les nombres des lignes (2) et (3) sont, sans répétition, les nombres entiers de 1 à 20.

Et on pourrait continuer. C'est très curieux !

3) Prenez le nombre  $k = \pi^2$  et le nombre  $k' = \frac{k}{k-1} = \frac{\pi^2}{\pi^2-1}$

Faites les calculs analogues aux calculs précédents.

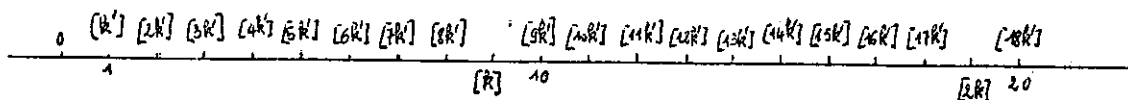
On trouve pour les multiples successifs de  $k$  les valeurs approchées :

9,869 - 19,739 - 29,609 -

et pour les multiples successifs de  $k'$  les valeurs approchées :

1,113 - 2,225 - 3,338 - 4,451 - 5,564 - 6,676 - 7,789 - 8,912 - 10,014 - 11,127 - 12,240 - 13,353 - 14,467 - 15,578 - 16,691 - 17,803 - 18,916 - 20,029 - 21,142.

d'où la répartition des parties entières des nombres précédents :



Ainsi les nombres précédents sont, sans répétition, les nombres entiers de 1 à 20.

Et on pourrait continuer. C'est très curieux.

4) La propriété que vous venez d'observer est valable pour tout nombre irrationnel  $k$  supérieur à 1, auquel on associe le nombre  $k' = \frac{k}{k-1}$  (voir partie C).

en 2)  $k = \phi$  ,  $k' = \phi^2$  et  $1 < \phi < 2 < \phi^2$   
 en 3)  $k = \pi^2$  ,  $k' = \frac{\pi^2}{\pi^2-1}$  et  $1 < \frac{\pi^2}{\pi^2-1} < 2 < \pi^2$

Vérifiez que la propriété n'est pas vraie avec un nombre rationnel, par exemple  $k = \frac{3}{2}$  ou  $k = \frac{7}{5}$ .

7- Théorème 3

$n \in \mathbb{N}^*$ , l'intervalle  $]n, n + 1[$  contient au plus un K nombre.

Dem) Sinon il contiendrait au moins deux k- nombres successifs, soient  $pk$  et  $(p + 1)k$  ; mais alors :

$$(p + 1)K - pk < (n + 1) - n,$$

et on aurait  $k < 1$  en contradiction avec l'hypothèse  $k > 1$ .

(autre démonstration : si on avait  $pk$  et  $lk$  dans  $]n, n + 1[$  avec  $p \neq l$ , alors  $|pk - lk| \geq k > 1$  d'où contradiction).

|  |
|--|
| $\frac{n}{pk} \quad \frac{(p+1)k}{n+1}$ impossible |
|--|

8) Théorème 4

$n \in \mathbb{N}^*$ , l'intervalle  $]n, n + 1[$  contient au plus un nombre K- nombre

Dem) identique à la précédente avec  $k' > 2$ .

9) Théorème 5

$n \in \mathbb{N}^*$ , l'intervalle  $]n, n + 1[$  ne peut contenir à la fois un K- nombre et un K'- nombre.

Dem) En effet, supposons qu'un K-nombre, par exemple  $pk$ , et qu'un K'-nombre par exemple  $p'k'$ , appartiennent à  $]n, n + 1[$ , alors on aurait  $|pk' - pk| < 1$ , soit  $|p' \frac{k}{k-1} - pK| < 1$ , d'où  $|p' + p - pk| < \frac{k-1}{k}$ ,

De plus  $\frac{k-1}{k} = \frac{1}{k'} < \frac{1}{2}$ , donc à fortiori  $|p' + p - pk| < 1$

$\frac{p + p' - 1}{p + p' - 1} < \frac{p + p' - 1}{pk} < \frac{p + p' + 1}{p + p' + 1}$ . Cette condition s'exprime aussi sous la forme  $p + p' - 1 < pk < p + p' + 1$ .

Deux cas sont à envisager :

1er cas

$p + p' - 1 < pk < p + p'$ ,  
 alors comme aussi  $n < pk < n + 1$ ,  
 on en conclut que  $p + p' - 1 = n$  ;  
 donc finalement on a :  
 $(p + p' - 1 < pk < p + p'$   
 $(p + p' - 1 < p' \frac{k}{k-1} < p + p'$ .  
 Puisque  $pk < p + p'$ ,  $p(k-1) < p'$   
 et  
 puisque  $p' \frac{k}{k-1} < p + p'$ ,  $p' < p(k-1)$

2ème cas

$p + p' < pk < p + p' + 1$ ,  
 alors, comme aussi  $n < pk < n + 1$ ,  
 on en conclut que  $p + p' = n$  ;  
 donc finalement on a :  
 $(p + p' < pk < p + p' + 1$   
 $(p + p' < p' \frac{k}{k-1} < p + p' + 1$ .  
 Puisque  $p + p' < pk$ ,  $p' < p(k-1)$   
 et  
 puisque  $p + p' < \frac{k}{k-1}$ ,  $p(k-1) < p'$ .

Dans les deux cas, il y a contradiction  $pk$  et  $p'k'$  ne peuvent exister ensemble.

Conséquence : Soit  $\mathbb{K}$  l'ensemble des parties entières des K-nombres  
 $\mathbb{K}'$  l'ensemble des parties entières des K'-nombres.

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{K}' \subset \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{K} \cup \mathbb{K}' \subset \mathbb{N}^* :$$

mais de plus, d'après le th. 5,  $\mathbb{K} \cap \mathbb{K}' = \emptyset$  : en effet aucun entier supérieur à 1 ne peut être à la fois partie entière d'un K-nombre et d'un K'-nombre. Ces ensembles  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}'$  sont nécessairement disjoints.

10) Théorème 6

Tout nombre entier  $n \geq 1$  est partie entière d'un K-nombre ou d'un K'-nombre.

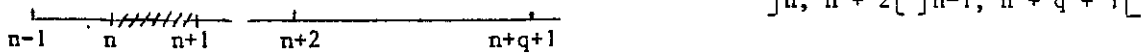
Dem) Pour  $n = 1$   $[k] = 1$

On peut donc supposer  $n > 2$

Considérons l'intervalle  $]n, n + 1[$ ,  $n \geq 2$ .

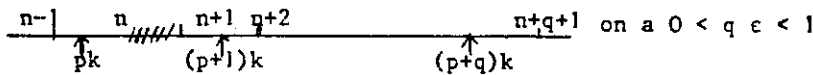
- 1) S'il y a un K-nombre dans l'intervalle, soit  $pk$  alors  $n = \lfloor pk \rfloor$
- 2) S'il n'y a pas de K-nombre, montrons qu'il y a un K'-nombre.

Considérons les intervalles  $]n-1, n+1[$



Comme  $n \geq 2$ ,  $n-1 \geq 1$  et le th. 1 s'applique : il y a au moins un K-nombre dans l'intervalle  $]n-1, n+1[$ , donc dans  $]n-1, n[$  puisqu'on a supposé qu'il n'y avait pas de K-nombre dans  $]n, n+1[$  mais il ne peut y avoir deux K-nombres dans un intervalle du type  $]n, n+1[$  Il y a donc un et un seul K-nombre dans  $]n-1, n[$ . Soit  $pk$  ce nombre. En considérant  $]n, n+2[$  on démontrerait de même qu'il y a un K-nombre et un seul dans  $]n+1, n+2[$  :

C'est naturellement le nombre  $(p+1)k$ . Soit le nombre  $q$  défini en (4,



Considérons alors les  $q$  nombres suivants :

$(p+1)k, (p+2)k, \dots, (p+q)k$ .

On a  $qk = q(1 + \epsilon) = q + q\epsilon$  donc  $qk < q + 1$

De plus, puisque  $n-1 < pk < n$ ,  $pk < n$ ,

ce qui entraîne  $pk + qk < n + q + 1$ , soit  $(p + q)k < n + q + 1$ .

Donc l'intervalle  $]n+1, n+q+1[$  contient au moins  $q$  K-nombres.

Or cet intervalle est la réunion des  $q$  intervalles :

$$]n+1, n+2[, ]n+2, n+3[, \dots, ]n+q, n+q+1[$$

les  $q$  intervalles ;

$]n+1, n+2[, ]n+2, n+3[, \dots, ]n+q, n+q+1[$  contiennent au plus  $q$  K-nombres. Compte-tenu de la conclusion précédente, ils contiennent exactement  $q$  K-nombres, et chaque intervalle contient exactement un K-nombre.

On a en définitive  $[pk] = n-1$   $[(p+1)k] = n+1$   $[(p+2)k] = n+2, \dots$

$$[(p+q)k] = n + q$$

Revenons à l'intervalle  $]n-1, n+q+1[$  : d'après le théorème 2, cet intervalle contient au moins un K'-nombre. Soit  $p'k'$  ce nombre. Il est obligatoirement dans le seul intervalle non "occupé" par les K-nombres savoir l'intervalle  $]n, n+1[$ , ce qu'il fallait démontrer.

Dans ces conditions  $n = \lfloor p'k' \rfloor$

Conséquence : tout nombre de  $\mathbb{N}^*$  est partie entière d'un K-nombre, ou d'un K'-nombre.  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{K} \cup \mathbb{K}'$

$$11) \text{ D'après les deux paragraphes précédents } \begin{cases} K \cup K' = N^* \\ K \cap K' = \emptyset \end{cases}$$

C'est le théorème énoncé en B 3)

12) Remarque 1 : entre deux  $K'$ -nombres successifs, il y a toujours soit  $q$ , soit  $(q+1)K$ -nombres.

Remarque 2 : naturellement les démonstrations précédentes peuvent être faites dans un cas particulier. Avec  $\phi$ , les démonstrations sont simples puisque  $q=1$  (en particulier pour le théorème 6). On peut donc dans un premier temps faire une étude limitée en prenant  $k = \phi$ .

### NOMBRES CROISÉS (qui peuvent être faits en 6ème)

par Michel LABROUSSE (Limoges - Haute Vienne)

#### Horizontalement

I. Résultat de l'opération à trous

$$\begin{array}{r} \quad . 8 9 \\ \times \quad . 9 \\ \hline 3 \dots 3 \\ \dots \end{array}$$

II. Si tu replaces les parenthèses où il faut, tu trouveras le nombre cherché :  $253 + 284 \times 544 - 489$

III.  $15 \times 4 + 1$  ; largeur d'un rectangle de longueur 176 m et de périmètre 526 m.

V. Aire en  $\text{cm}^2$  d'un rectangle de longueur 18,1 dm et de largeur 2,5 m.

|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|
| I   |   |   |   |   |   |
| II  |   |   |   |   |   |
| III |   |   |   |   |   |
| IV  |   |   |   |   |   |
| V   |   |   |   |   |   |

#### Verticalement

1.  $136 \times 48 + 421 \times 48 + 47 \times (142 - 38)$

2.  $256^{\overline{}} + 1452 + 973^{\overline{}} + 628$

3. Replace correctement les parenthèses pour trouver ce nombre :  $4 \times 27 - 15 + 40 - 10 \times 2$

4. Fais la somme de tous les naturels de 1 à 27

5. Résultat de l'opération à trous :

$$\begin{array}{r} \quad 2 \quad 5 \\ \times \quad 5 \quad . \\ \hline \quad . \quad 7 \quad 0 \\ . \quad 2 \quad 2 \quad . \\ \hline \quad . \quad . \quad 7 \quad . \end{array}$$

(Voir solution page 34)

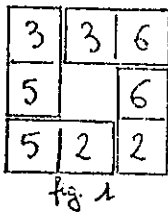
## DANS UN CLUB MATHÉMATIQUE : LES DOMINOS

par Jean FROMENTIN (Niort - Deux Sèvres)

Tout le monde connaît le jeu de dominos dont la règle consiste à répartir les dominos entre les différents joueurs, puis à former une chaîne en déposant à l'une ou à l'autre extrémité, et chacun à son tour, un domino, de telle sorte que les carrés adjacents de deux dominos consécutifs portent le même nombre de points ; dans l'impossibilité de jouer, on pioche un domino ; si on peut, on le joue, sinon on passe son tour, et le gagnant est celui qui, le premier, a déposé tous ses dominos.

Les dominos sont par ailleurs la source d'un grand nombre de problèmes ; et l'objet de cet article n'est pas de reprendre les problèmes exposés dans le livre de PERELMANN : *"La mathématique vivante, récits et casse tête mathématiques"* aux éditions CEDIC, dans la collection "Formation des maîtres", (les lecteurs intéressés pourront s'y reporter), mais d'en proposer de nouveaux, à ma connaissance, relativement simples, et accessibles, en partie, à des élèves de premier cycle.

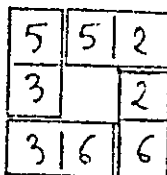
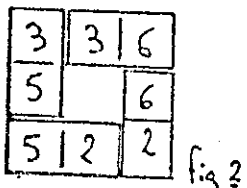
### PROBLEME 1 : LES 7 CARRES



Quatre dominos peuvent être disposés suivant un cadre carré (fig.1) de telle sorte que les carrés adjacents de deux dominos consécutifs portent le même nombre de points ;

Disposer ainsi les 28 dominos suivant 7 cadres carrés !

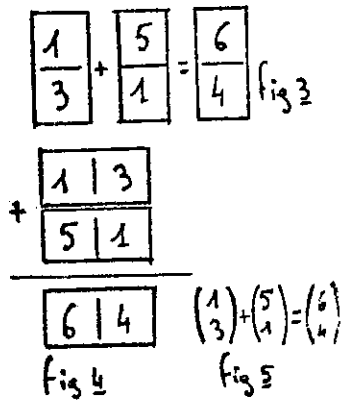
### PROBLEME 2 :



Si deux cadres carrés utilisant le même ensemble de dominos (fig.2) sont considérés comme identiques, combien existe-t-il de solutions au problème (I) ?

(ce problème ne fait pas appel à des connaissances mathématiques très poussées ; c'est tout de même un bon exercice de dénombrement pour le second cycle).

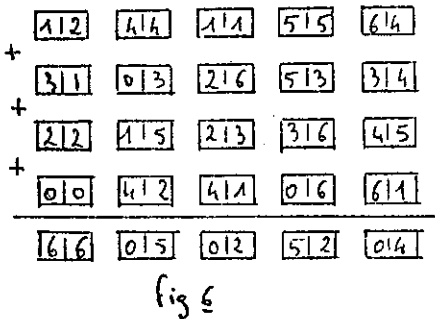
PROBLEME 3 : LES NEUF ADDITIONS



On peut disposer 3 dominos verticalement de telle sorte que, ligne par ligne, la somme des points des deux premiers dominos soit égale au nombre de points du troisième domino. (fig.3). L'un des 28 dominos est inutilisable pour de telles additions ? Lequel ? Pourquoi ?

Utiliser les 27 dominos restants pour former ainsi 9 additions. Remarque : La disposition verticale de la figure 3 semble plus intéressante que la disposition horizontale de la figure 4, car elle habitue les élèves du 1er cycle à manipuler et à additionner (sans qu'ils s'en rendent compte) des matrices colonnes. D'ailleurs, dans la transcription de leurs solutions, on peut leur proposer la notation de la figure 5.

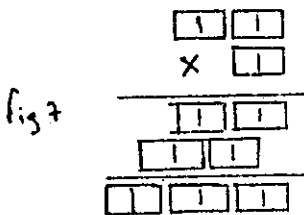
PROBLEME IV : LES OPERATIONS



On peut utiliser les dominos pour poser des opérations. La figure 6 donne un exemple d'additions utilisant 5 rangées de 5 dominos. Disposer les 28 dominos en 7 rangées de 4 dominos de telle sorte que le nombre formé par les dominos de la 7ème rangée soit la somme des nombres formés par les dominos des 6 rangées supérieures.

Remarque : dans le cadre d'un club, on peut lancer le concours suivant : poser une multiplication utilisant le plus de dominos possible (d'après le schéma, par exemple, de la figure 7)

PROBLEME V : "DOMINOS ET NUMERATION"



Etant donné une base de numération : deux, trois, ..., six, sept, trier les dominos utilisables dans la base choisie.

Pour chaque base de numération ? Est-il possible de disposer tous les dominos utilisables pour qu'ils forment une addition dans la base choisie ?

Remarque : il est facile de voir que le problème est impossible pour la base deux. Il est par contre possible pour la base trois, et les suivantes...?

PROBLEME VI : "A CHACUN SA PLACE" ou "BOITE DE RANGEMENT"

(idée de jeu empruntée à la revue : "Le petit Archimede", revue de l'association pour le développement de la culture scientifique (ADCS) (n°17-18) adresse : CES Sagebien 80000 AMIENS).

|                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 6 3 1 1 3 6 2 2 | 5 3 3 2 0 4 4 6 | 1 4 4 2 2 6 6 3 | 3 5 1 2 3 3 2 4 |
| 4 2 1 5 2 1 5 2 | 3 2 1 5 5 4 5 6 | 6 5 3 1 2 1 5 6 | 3 0 2 3 3 6 0 4 |
| 3 5 5 5 6 5 4 3 | 3 6 5 2 1 5 2 0 | 3 0 6 1 2 1 5 2 | 4 1 5 1 5 6 0 0 |
| 6 1 2 6 6 4 4 0 | 4 0 3 6 4 5 6 6 | 0 5 4 4 0 5 1 0 | 0 5 6 6 5 4 4 6 |
| 3 2 6 4 3 4 0 0 | 0 0 4 1 1 4 6 6 | 1 3 4 3 0 0 5 0 | 5 4 0 6 5 1 1 2 |
| 5 2 0 3 3 0 1 4 | 1 0 2 1 3 3 5 0 | 6 3 2 5 1 6 2 4 | 1 3 0 2 2 1 4 1 |
| 1 6 0 0 5 0 1 4 | 4 2 2 1 2 3 1 0 | 6 4 2 5 0 3 3 4 | 0 2 6 3 2 4 5 6 |
| ⊙               | ⊙               | ⊙               | ⊙               |



## COLLOQUE SUR LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS

POITIERS 17 Mai 1978

Le Colloque régional de Poitiers a tenté de répondre à un certain nombre de questions que pose la mise en oeuvre d'actions de formation continue au bénéfice des enseignants. Toutes les questions rendues explicites dans la grille ci-jointe n'ont pas trouvé de réponse en une seule après-midi de travail. Toutefois un certain nombre de points ont révélé des convergences de vues entre les participants.

### 1°) Objectifs et contenu de la formation continue.

. Une distinction a été faite entre la formation continue proprement dite (exigée par l'évolution des méthodes et des contenus) de la reconversion exigée par des changements du système éducatif et leurs répercussions sur le service des enseignants (ex. : un PEGC de lettres qui devient latiniste, ou un historien qui doit se faire économiste). La reconversion doit être partie intégrante des réformes faites. C'est la formation continue proprement dite qui fait l'objet de nos réflexions.

. Droit et devoir pour les enseignants, obligation pour l'Etat, la formation continue des maîtres doit être une construction permanente (et non un recyclage ponctuel) dans laquelle les besoins des intéressés (élèves et enseignants) doivent être déterminants.

. La formation continue des enseignants doit non seulement porter sur leur discipline et sa didactique, mais peut aussi avoir un caractère culturel général (exemple : un physicien apprenant une langue étrangère, un linguiste les mathématiques modernes, etc.), ou social (connaissance du milieu régional et social où s'insère la pratique de l'enseignant) et entrer dans le cadre d'actions de formation non réservées exclusivement aux enseignants.

### 2°) Liaison formation initiale formation continue.

Des liens étroits doivent assurer cette continuité qui est dans le nom même de "formation continue" voir § 3-Structures.



. Les associations de spécialistes ont un rôle à jouer pour susciter et formuler (ou aider à formuler) les besoins : les motivations ne sont actuellement très fortes que dans le cas de nouveaux enseignements (par exemple la physique en 6° - 5° et en 2°), sous le coup de l'urgence.

. La formation initiale est principalement monodisciplinaire, mais, en formation continue, les expériences inter-disciplinaires peuvent contribuer à un décloisonnement (en sachant éviter le risque d'une polyvalence qui ne serait que l'addition de deux sous-qualifications) et permettent aussi de partir

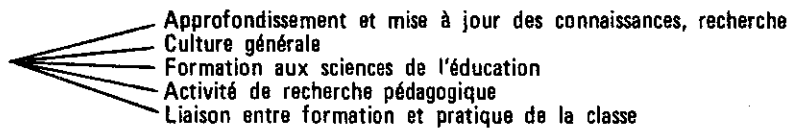
## I - Pourquoi la Formation Continue ?

- \* Est-ce un droit, un devoir, un besoin ? 
  - ses contraintes (sociales, hiérarchiques...)
  - lien avec la promotion
  - doit-elle être partie intégrante du service ?
- \* Relation entre la Formation Initiale et la Formation Continue.

## II - Quels organismes assurent la Formation ?

- \* Type 
  - Institut Universitaire
  - Centre autonome
  - Lieu de travail
- \* Doivent-ils être au niveau local, régional, national ?
- \* Représentation des différents niveaux d'enseignement dans la formation
- \* Doivent-ils être interdisciplinaires ou spécifiques ?
- \* Fonctionnement : reproduction de structures hiérarchisées ou prise en charge par tous les enseignants
- \* Relation avec les autres organismes 
  - Université
  - Inspection
  - Associations de spécialistes
  - Autorités locales

## III - Quelle Formation ?

- \* Qui définit le contenu ?
- \* Types d'activités 
  - Approfondissement et mise à jour des connaissances, recherche
  - Culture générale
  - Formation aux sciences de l'éducation
  - Activité de recherche pédagogique
  - Liaison entre formation et pratique de la classe
- \* La liaison entre le centre de formation et les maîtres doit-elle être permanente ou temporaire ?
- \* Rôle des formés dans la formation
- \* Évaluation
- \* La formation doit-elle nécessairement déboucher sur une promotion ?
- \* Relation entre les différents centres, publications, échanges, rencontres.

## IV - Quels Formateurs ?

- \* Comment les choisir ?
- \* Comment se forment-ils ?
- \* Doit-il y avoir une catégorie spécifique de Formateurs ?
- \* Rapports entre Formateurs et autorités hiérarchiques
- \* Cohésion d'équipes de Formateurs de catégories et de statuts différents.

des réalités de la classe qui imposent à tous des changements d'attitudes : dans un cadre interdisciplinaire s'instaure en effet nécessairement une co-animation de la réflexion.

. Le contenu de la formation continue doit être distinct de celui de la formation initiale.

### 3°) Structures de la formation des maîtres.

. Un même cadre institutionnel doit associer la formation initiale et la formation continue. C'est là une des conditions de la continuité de la formation globale des maîtres.

. Cette institution sera de préférence un organisme universitaire, maître d'oeuvre d'une formation associant des animateurs de provenance diverse.

. L'identité de l'institution n'implique pas identité de contenu entre formation initiale et formation continue. Le plan de formation pourrait être

élaboré par une structure tripartite : administration de l'Education, formateurs, usagers.

. Compte tenu des contraintes liées aux types d'activités et au matériel utilisé, une décentralisation doit se faire dans les académies à vaste étendue, de manière à mieux atteindre les enseignants concernés (l'Université de Poitiers a tenté de telles expériences en électronique, avec succès à Angoulême et à La Rochelle, sans succès, pour des raisons de locaux, à Niort).

. Accès à la formation continue : plusieurs formules d'accès sont possibles et sans doute compatibles (au choix des enseignants) :

- formation continue à plein temps selon une formule sabbatique qui permet de prendre du champ par rapport à une pratique pédagogique et à une discipline.

- formation continue à temps partiel qui permet une fructueuse liaison entre formation et pratique de la classe et qui devrait inciter à l'organisation d'un travail d'équipe dans l'établissement d'enseignement (ne serait-ce que pour des raisons d'ordre matériel).

### VIE DES RÉGIONALES

#### ORLÉANS - TOURS : ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 26 NOVEMBRE 1978 A CHATEAUROUX

Cette réunion, à laquelle participaient 20 collègues des 6 départements de l'Académie d'Orléans-Tours, devait permettre de faire le point sur les activités de la Régionale (activités - finances - PLOT) et de définir les orientations et les activités de la Régionale pour l'année 1978-1979.

Le rapport d'activité a été bref à cause ... du peu d'activité dû à un manque général de dynamisme. Un point positif cependant : l'existence du PLOT qui, de l'avis de tous, doit être maintenue. L'évocation de cette publication a permis tout naturellement d'aborder :

- l'aspect financier : le bilan est positif.

|  | Crédit | Débit    | Solde    |
|--|--------|----------|----------|
| PLOT 5-6-7                             | 9362   | 10770,20 | -1408,20 |
| Brochures vendues                      | 1394   | 3025     | -1531    |
| Stocks brochures                       | 600    |          |          |
| 211 cotisations<br>Ristourne nationale | 4404   |          | 4404     |
| Divers                                 | 258    | 590,55   | -332,55  |
|  | 15418  | 14385,75 | 1032,25  |

Remarques :

Le PLOT n° 5 a été payé par Limoges, avec le bénéfice des Journées Nationales 1977. Le stock des brochures, estimé à 600 F, ne suffit pas à expliquer le déficit important de ce secteur.

- l'aspect rédactionnel : il est difficile d'avoir des articles pour le PLOT. Celui-ci est un bulletin local, où tous les collègues peuvent s'exprimer et qui peut permettre, par exemple, une mise en évidence de la pratique des enseignants. Affaire à suivre...

Enfin, après avoir déploré le peu de participation de l'A.P.M. à la journée de défense des IREM en Février 1978 à Orléans, l'Assemblée a retenu la proposition d'une journée APM - IREM dans le courant 1979.

Après ce tour d'horizon des activités, il a été proposé que notre Régionale prenne l'initiative de la conception et de la réalisation d'une exposition-forum sur les mathématiques et leur enseignement. Cette exposition serait l'occasion de montrer et de dire qu'il y a une vie de l'enseignement des mathématiques, de montrer des réalisations, de proposer des activités, d'inciter à débattre de problèmes d'intérêt commun aux enseignants, aux élèves et à certains utilisateurs des maths. Elle permettrait de montrer que les mathématiques interviennent massivement dans la vie contemporaine, que les enseignants de maths ont enrichi leurs pratiques pédagogiques (comment ? pourquoi ?), que l'enseignement des mathématiques est lié à la vie de tous les jours. Il n'est pas question d'apporter une réponse à des questions (les maths, à quoi ça sert ?...) mais de présenter des éléments issus de la pratique quotidienne des enseignants et des utilisateurs pour provoquer une réflexion. Cette exposition serait prise en charge, à partir d'un noyau commun, par des équipes locales constituées de collègues, d'élèves, de parents d'élèves, de personnes extérieures utilisatrices ou non des mathématiques.

L'assemblée a accepté cette proposition et a retenu le principe d'un texte définissant les finalités et les moyens de cette exposition-forum, dont la synthèse, après discussion dans les départementales, sera faite début février par le bureau.

Cette exposition-forum pourrait avoir lieu au début de l'année 79-80. Un appel est fait à tous, membres ou non de la Régionale, pour rechercher et nous fournir des idées, des exemples et des réalisations. Pour les membres de l'APM, il reste à souhaiter qu'en dehors de cette exposition s'organisent localement d'autres activités et d'autres échanges sur l'enseignement.

Avant de se séparer, l'Assemblée a procédé à l'élection du Comité et du bureau. En voici la nouvelle composition :

COMITE de la REGIONALE - Cher : Angré Gagneux. Jean-Paul Hemmer. Andrée Palat

Eure et Loir : Geneviève Arnoux. Pierre Maupetit

Indre : Rémy Ioualalène. Robert Domain. Nicole Masson

Indre et Loire : Yves Bouteiller. Monique Godicheau

Loir et Cher : André Autebert. Jean-Louis Bon

Pierre Christofleau

Loiret : Marie-Laure Darche. Guy Pellé. André Rouchier

BUREAU de la REGIONALE : Président : Pierre Christofleau

Secrétaires : Marie-Laure Darche, Guy Pellé, André Rouchier.

Trésorier : Jean-Louis Bon

Trésorier-adjoint : André Autebert.

LIMOGES : ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 29 NOVEMBRE 1978

L'A.P.M.E.P. :

# Pour l'intelligence des mathématiques

(L'Echo du  
Centre  
30 - 11 - 78)

Limoges. — L'A.P.M.E.P., vous ne connaissez sans doute pas ; et pourtant cette association de professeurs de mathématiques a, par sa réflexion et son action, une influence intéressante sur l'enseignement des mathématiques. Elle regroupe tous les professeurs de mathématiques qui désirent réfléchir sur leur pratique pédagogique et sur le contenu même de leur enseignement.

Année après année, par le sérieux de son travail, elle a gagné une audience incontestée. Pour situer l'importance de la recherche effectuée dans le domaine de la formation continue, il n'est pas inutile de savoir que c'est en grande partie l'A.P.M.E.P. qui a été à l'origine de la création des I.R.E.M. (Instituts de Recherche sur l'enseignement des mathématiques).

Hier après-midi, l'association régionale tenait son assemblée

générale annuelle, occasion de faire le point sur l'activité passée et à venir. Lors du bilan, il a été naturellement question de ces I.R.E.M., remis en cause actuellement par le gouvernement. L'A.P.M.E.P. a organisé durant le mois d'octobre des journées départementales de défense des I.R.E.M., journées généralement bien suivies.

Outre cette action, l'A.P.M.E.P. a organisé tout au long de l'année une série de conférences sur des travaux ou études menés actuellement en mathématiques. L'A.P.M.E.P. régionale publie aussi un bulletin très apprécié. Les articles, généralement très travaillés, portent indifféremment sur des sujets plus directement pédagogiques.

Pour l'année en cours, l'A.P.M.E.P. prévoit, bien sûr, de continuer son cycle de conférences. en l'orientant, toutefois, pour le trimestre qui vient sur-

l'étude des programmes de mathématiques 79-80 de la classe de quatrième. Les professeurs de l'A.P.M.E.P., à ce sujet, sans juger de la qualité de ces programmes, regrettent qu'ils aient été imposés.

De nombreuses autres questions ont été abordées lors de cette assemblée générale. Afin d'améliorer encore leur travail, les professeurs de l'A.P.M.E.P. se sont proposés hier d'organiser plus souvent des réunions par département et de ne pas s'en tenir à Limoges.

Un nouveau bureau a été élu : président d'honneur : M. Rogerie (95 ans) ; président : M. Labrousse ; vice-présidents : Haute-Vienne, M. Fredon, Corrèze, M. Bouteiller, M. Monnange, Creuse, M. Bourcy, Mme Meignal ; secrétaire : Mlle Ceaux ; trésorier : M. Duveau.

THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME  
THEME

THEME

## APPEL AUX LECTEURS

Le "PLOT" veut privilégier l'expression du vécu enseignant, et être le reflet des activités et des innovations qui se vivent, qui se réalisent dans les classes.

Actuellement, l'idée de "thème" suscite de nombreux travaux isolés.

Qu'est-ce qu'un thème ? Un thème pour quoi faire ?

Nous recherchons des articles sur ce sujet : chacun d'entre eux pourrait comporter un exposé du sujet, une description des réactions des élèves et de la manière dont le thème a été perçu, des travaux interdisciplinaires auquel il a donné lieu, des perspectives qui apparaissent ...

L'originalité du thème en lui-même n'est pas décisive pour rendre un article intéressant.

Ce que nous cherchons c'est de montrer, à partir d'un sujet même très connu, ce qu'on en a fait, comment on l'a vécu, ce qu'on en a tiré.

Adressez rapidement vos articles au comité d'animation.

### NOMBRES CROISES

(Solution de la page 26)

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| I   | 3 | 8 | 6 | 3 | 1 |
| II  | 1 | 5 | 8 | 7 | 3 |
| III | 6 | 1 | 4 | 8 | 7 |
| IV  | 2 | 7 | 1 | 7 | 2 |
| V   | 4 | 5 | 2 | 5 | 0 |