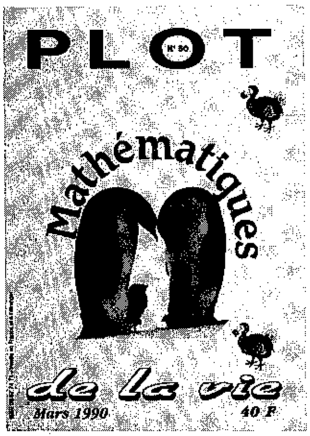


Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Luce Dossat, René Gauthier, Georges le Nezet, Ginette Mison, Serge Parpay, Raymond Torrent, Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F.
Abonnement étranger : 120 F.

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur
Limoges

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans-Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse Brest, Caen, Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Centre National des Lettres et du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

Maths dans la classe, maths dans la vie

EDITORIAL

Le PLOT, à l'origine, journal des membres Apmep des régionales de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, s'adresse aujourd'hui aux autres régionales de **l'Ouest** et du **Sud-Ouest**. Plus de 4 000 enseignants d'Afrique lisent aussi le PLOT, 2 à 4 mois après vous. Il y a aussi les îliens auxquels nous dédions un article à chercher : **les dodos et les manchoins**, article qui est le fruit d'une collaboration avec **l'Ouvert** de Strasbourg. Nous attendons les réponses de nos collègues Réunionais ou Mauriciens!!! Il y a enfin les lecteurs des autres pays auxquels nous dédions une forte contribution d'un collègue Italien: **Mario Barra.**

PLOT numéro 50

un numéro plein de nostalgie dédié à tous ceux qui ont contribué à faire ce journal depuis 15 ans.

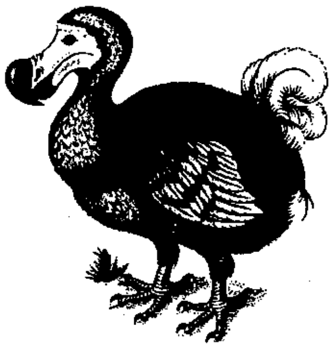
Un numéro 50, c'est aussi le moment des questions:

- Quelle forme donner aux ... cinquante prochains numéros?
- Comment accroître la collaboration avec les autres régionales ?
- Quel équilibre trouver entre le pédagogique, le mathématique, le culturel?

Toutes vos réponses seront les bienvenues!!!

LES DODOS FONT LA PAIRE

Université de Leeds



Depuis maintenant quelques années, l'université de Leeds en coopération avec la *"Yorkshire branch of the mathematical association"* a organisé des concours mathématiques pour les écoles. Presque tous les concours sont parrainés par la télévision du Yorkshire même si au début ils le furent par Waddingtons Ltd.
Les concours diffèrent selon l'âge des élèves. Celui concernant les 16-18 ans (c'est-à-dire les *"sixth-formers"* *) est baptisé *"projet"* et conduit à la présentation d'un rapport. Le travail se fait par équipe pendant plusieurs semaines pour être présenté à une date convenue à l'avance à l'université de Leeds. Les équipes y exposent alors leur travail et leur matériel éventuel, expliquent les problèmes qu'elles ont résolus et les progrès qu'elles ont réalisés. Le jury opère incognito parmi le public.

Les *"projets"* sont semi-ouverts, ils comportent souvent des questions dont on ne connaît la réponse que dans des cas particuliers. Ainsi le jury n'attend pas *"la solution"* au sens habituel. Les élèves trouvent cela plutôt déconcertant de prime abord. Cependant ils ont beaucoup de plaisir quand, comme c'est souvent le cas, ils découvrent que ce qui leur semblait une remarque presque triviale n'avait fait l'objet d'aucun travail de qui que ce soit auparavant. Parfois, ils découvrent, ce qui leur occasionne encore plus de satisfaction, une méthode ou un point de vue qui leur ouvre de nouveaux horizons mathématiques.

Cette année, trois thèmes étaient proposés à la sagacité des candidats :

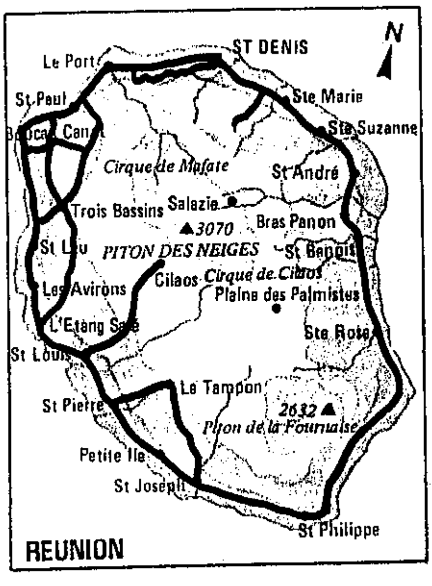
1) **Dodos et manchoins :** c'est un problème de proies et prédateurs. L'analyse du cas présenté introduit la notion de fractal.

2) **Les pentistes et le sol du temple :** c'est un problème de pavage du plan à l'aide de pentagones, pentagrammes et losanges.

3) **Un problème de codage :** où cinq messages doivent être décodés en utilisant diverses techniques, toutes basées sur le fait que les 32 symboles peuvent être considérés comme les éléments d'un corps fini. Les élèves doivent construire les tables d'addition et de multiplication dans ce corps.

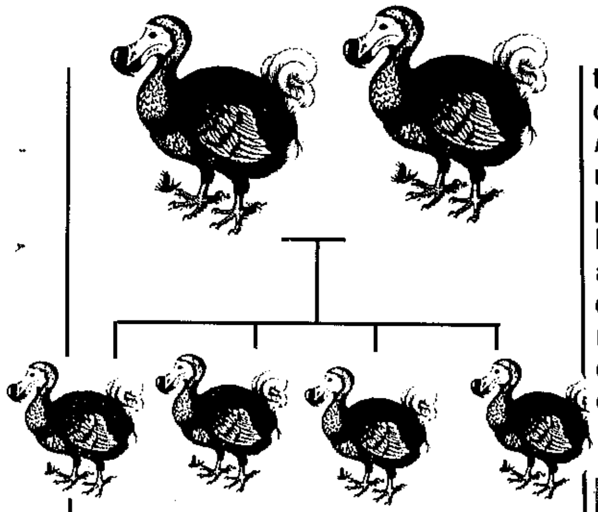
Seuls sur une île

Le dodo prospérait sur une île éloignée et son seul vrai problème était la quête de nourriture. Pendant la plus grande partie de l'année il y avait suffisamment à manger et le dodo se reproduisait lors de la courte saison des amours en pondant des œufs. Si on prend en compte les quelques accidents qui pouvaient arriver, aussi bien aux dodos qu'à leurs œufs, le nombre des dodos, après la saison de reproduction, avait été multiplié par k.



** Nous vous proposons ici de travailler sur le premier thème. Vous trouverez les deux autres dans L'Ouvert n° 57 1989 dont nous remercions ici le "rédacteur en chef", traducteur et adaptateur de cet article, Jean Lefort.*

*** Ce qui correspond sensiblement à notre première et terminale.*



La multiplication des dodos

Mais il y avait l'hiver à affronter. Plus rien ne poussait et les dodos devaient se nourrir de baies. C'était une période dure et beaucoup mourraient. L'île aurait produit assez de baies pour nourrir 1000 couples de dodos pendant l'hiver si malheureusement pendant la saison de croissance les dodos ne mangeaient pousses et fleurs des buissons à baies et ne réduisaient ainsi leurs provisions de nourriture d'hiver.

Comptons dorénavant les dodos par couples pour éviter toute discussion sur leurs habitudes matrimoniales! Dans ce qui suit *"dodo"* signifie *"couple de dodos"*. Supposons que x dodos survivent après l'hiver. Pendant la saison de croissance et de reproduction ces x dodos grignotent les buissons à baies et gâchent la nourriture qui aurait permis à x dodos de passer l'hiver.

Mais après la reproduction, c'est pire car les jeunes aussi, dès qu'ils sont assez grands se mettent à manger les fleurs des baies. Les jeunes sont certes plus nombreux que les adultes, mais comme ils ont moins de temps pour endommager les buissons, ce sont, tout compte fait, les réserves de $(x + kx/10)$ dodos qui sont irrémédiablement perdues au début de l'hiver.

Les dodos ne peuvent pas voler et ne sauraient gagner une autre île. Aussi au plus $[1000 - x - kx/10]$ dodos peuvent survivre à l'hiver.

Ainsi si le nombre de dodos après l'hiver, juste au début de la saison de reproduction est x, alors l'année suivante, à la même époque, ou bien il y a $[kx]$ dodos, s'il y avait assez à manger pour tous durant l'hiver, ou bien seulement $[1000 - x - kx/10]$ dodos si certains dodos meurent de faim, ou bien, finalement il y a extinction totale des dodos s'il n'y a pas de nourriture du tout pendant l'hiver, c'est-à-dire si $(x + kx/10) \geqslant 1000$. Comme il n'y a aucune raison que k soit entier nous prendrons la partie entière du nombre entre crochets.

La première question est de savoir s'il y aura extinction de la race des dodos. Cela dépend d'abord de k. Et si extinction il y a, nous voudrions savoir combien de temps cela prendra. Ce qui dépend du nombre de dodos qu'il y a l'année 0.

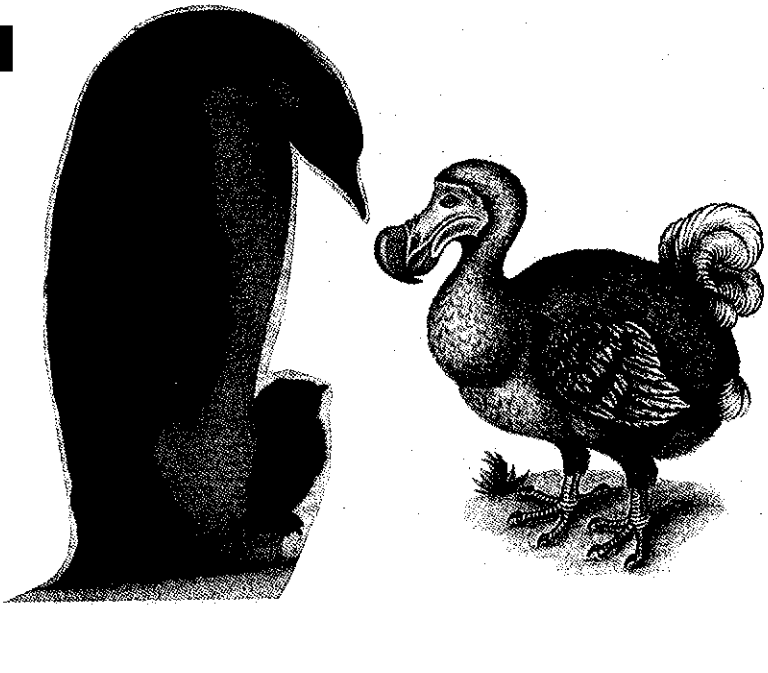
Quand arrivent les manchoins

La situation devint bien plus compliquée quand l'île fut découverte par les manchoins. Ce sont des mammifères marins qui n'interfèrent pas normalement avec les dodos, cependant les manchoins doivent se reproduire sur terre et les jeunes sont, pendant quelques temps, incapables d'aller en mer. Les œufs de dodos sont alors une excellente source de nourriture pour eux et ils apprirent vite à dévaster les nids.

Normalement les manchoins augmentent d'année en année (ici encore, pour éviter de discuter de leurs habitudes sexuelles *"manchoins"* signifiera *"couples de manchoins"*). Ils n'augmentent pas très rapidement car ils n'ont qu'un ou deux petits et certains se perdent en mer. S'il y a y manchoins au début de la saison de reproduction et que les jeunes ne sont pas détruits, ils seront $[3y/2]$ au début de la saison de reproduction suivante.

Cependant les jeunes manchoins doivent se nourrir. S'il n'y a pas assez d'œufs, ils meurent, chaque manchoin mangeant en moyenne 10 œufs avant de prendre la mer. Heureusement les dodos ne savent pas compter et un dodo n'est contrarié que

si les manchoins mangent tous les œufs du nid. Ceci n'arrive pas souvent sauf si la proportion de manchoins par rapport aux dodos est suffisamment élevée.
D'un autre côté, les dodos sont nettement plus gros que les jeunes manchoins et un dodo contrarié est très dangereux. Les attaques des manchoins par les dodos entraînent une diminution de la population des manchoins. La formule $[(x - 2y)/10]$ donne le nombre de manchoins survivants à ces attaques sauf si : soit $2y \geqslant x$ auquel cas tous les jeunes manchoins sont tués et alors les adultes ne reviennent plus sur l'île; soit $x \geqslant 17y$ auquel cas les dodos laissent les manchoins tranquilles.
Les œufs mangés par les manchoins modifient bien sûr le nombre de dodos survivants lors de la saison de reproduction suivante. Ce nombre est alors, selon les cas : $[kx - 10y]$ s'il y a assez de nourriture pour tous durant l'hiver; $[1000 - x - y - kx/10]$ si certains dodos meurent de faim; d'un autre côté si $10y \geqslant kx$, les manchoins mangent tous les dodos dont la race disparaît; et enfin, si $[x - y + kx/10] \geqslant 1000$, les dodos meurent tous de faim et leur race disparaît également de l'île.
Les manchoins peuvent donc contrôler le nombre de dodos de façon à ce qu'il n'excède jamais le nombre correspondant aux réserves hivernales. Mais d'autre part, s'il y a trop de manchoins cela peut poser des problèmes de survie aux dodos. La race des dodos s'éteindra-t-elle? La réponse dépend de k aussi bien que du nombre de dodos et de manchoins.



L'extinction des dodos

Vous considérez d'abord la situation avant la découverte de l'île par les manchoins. La façon la plus simple d'aborder le problème est de faire quelques calculs pour voir ce qui se passe pour différentes valeurs de k en partant de x_0 dodos l'année 0. Il n'est pas difficile de construire un diagramme montrant les valeurs de x_0 pour lesquelles il y a extinction des dodos au bout de deux ans, celles pour lesquelles il y a extinction en 4 ans...

Je suggère que vous examiniez le cas $k = 4$. Vous verrez que le cas $k = 3$ est tout à fait différent du cas $k = 4$. Vous chercherez et trouverez pourquoi. Vous chercherez aussi à voir ce qui arrive quand $k = 2$ ou 5.

Une approche plus efficace du problème consiste à tracer les droites $y = x$, $y = kx$ et $y = [1000 - x - kx/10]$ sur le même graphique et à voir comment on peut construire les valeurs x_0, x_1, ... successives. Vous serez peut-être alors capable de prédire graphiquement quand la race des dodos s'éteindra.
Ensuite vous pourrez considérer la situation après la découverte de l'île par les manchoins. Ce cas peut également se traiter par une méthode graphique ou bien par une méthode d'essais et d'erreurs. On étudiera d'abord le cas $k = 4$.
Voici quelques suggestions : supposons qu'il y ait, l'année 0, x_0 dodos et y_0 manchoins. Vous pourrez construire un graphique en coloriant d'une certaine façon ceux des points (x_0, y_0) pour lesquels les dodos disparaissent en moins de cinq ans, d'une autre façon s'ils survivent au moins cinq ans mais meurent tous avant dix ans, etc. Il n'est pas du tout évident que l'allure de la carte change beaucoup pour $k = 3$, il y aura moins d'œufs pour les manchoins et un plus grand risque qu'ils tuent tous les dodos, mais alors il y aura un moindre risque que les dodos meurent d'inanition pendant l'hiver. Y a-t-il des changements radicaux par rapport à cette situation si $k = 1$, 2, 3, 5 ou 6?

Mathématiques dans la vie

Mario Barra - Rome

Angles, segments, surfaces, un sujet interdisciplinaire qui touche la vie de tous les jours.
Ayant présenté cette séquence didactique de nombreuses fois, et ce principalement au cours des expositions de Mathématiques tenues, tant en Italie qu'à l'étranger avec le groupe d'Emma CASTELNUOVO, je vais tenter de reporter ici quelques considérations relatives aux différentes manières d'exposer le sujet, présentant celui-ci comme si l'on s'adressait à des élèves, de la façon qui me semble avoir donné les meilleurs résultats.
Le type de présentation utilisé est adapté à des élèves du niveau collège, mais les sujets peuvent également s'adresser à des étudiants d'âge plus avancé et, dans ce but, sont présentées, en complément, quelques notes supplémentaires.

TROIS VILLAGES, UNE SEULE ROUTE

Trois villages ou trois villes que nous voulons relier entre elles en construisant le plus petit nombre possible de kilomètres de routes.

Résolvons ce problème de minimum en supposant pour simplifier que tout le terrain est plat.
Ce problème fut traité et généralisé, au début du 19e siècle, par Jacob Steiner (1796-1863), géometre réputé de l'Université de Berlin.

Pourquoi ce problème est-il important?
Parce que le coût d'un kilomètre de route peut être extrêmement élevé, voire quelques millions de francs, et, en cherchant donc la jonction minimum entre les trois pays, la dépense pour la construction de la route sera, elle aussi, la plus faible possible.
Notre problème pourrait, par exemple, naître de cette exigence : nous voulons construire en un point P un hôpital pour les trois pays, de telle sorte que PA + PB + PC soit minimum.

Encadré n° 1

Le MATÉRIEL à utiliser
Un plan de plexiglas transparent* comportant trois trous disposés de telle sorte que l'angle maximum entre deux d'entre eux soit inférieur à 120°.
Quelques petites maisons et un clocher autour de chaque trou indiquent trois villes distinctes.
Trois poulies**, fixées sur des supports hauts d'une dizaine de centimètres, laissent glisser librement trois petites cordes, passant respectivement par les trois trous au-dessus de la table, les extrémités des cordes sont nouées ensemble, alors qu'au-dessous de la table est accroché à chacune des trois extrémités opposées un faible poids; les trois poids étant égaux.
Attention... L'urbanisme est une discipline qui s'occupe de l'aménagement rationnel des quartiers à l'intérieur même, et aussi en dehors, de la ville, et des problèmes de connexion; nous allons sous peu résoudre justement un problème d'urbanisme.

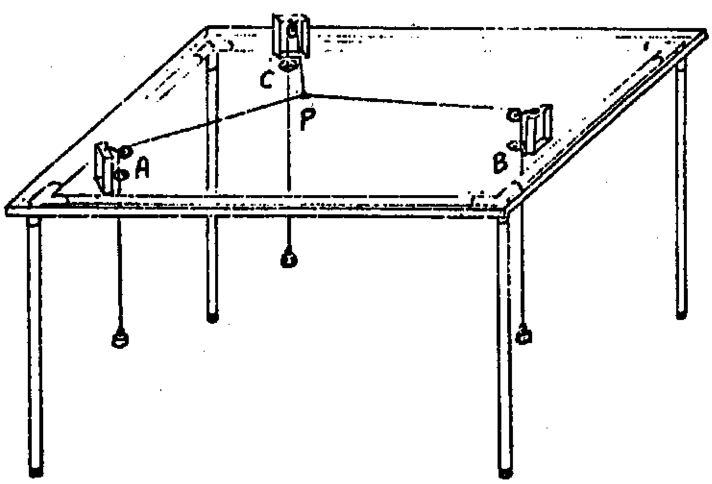


Figure 1

** Convient aussi bien un cadre rectangulaire de matériau quelconque soutenu par quatre pieds de même hauteur (cf. exposition Horizons Mathématiques 1982).*
*** L'expérience peut aussi marcher sans poulies, mais le frottement alors plus important, rend moins précise l'exécution. Dans ce cas, pour réduire l'effet indiqué, il est conseillé d'utiliser des fils de nylon à la place des cordelettes.*

Encadré n° 2

Le problème sera répété plusieurs fois et sur différents tons, espérant ainsi accrocher et s'assurer l'attention de ceux qui, au départ, auraient la " tête ailleurs " et seraient inattentifs, car excessivement intéressés par l'appareil.
Les deux problèmes : jonction minimum, et jonction minimum avec un point à déterminer, se révèlent équivalents pour trois villes mais pas pour un nombre supérieur à trois. Par exemple, pour le quadrilatère formé par quatre villes, le meilleur point pour construire une structure commune est l'intersection des diagonales, alors que pour la connexion de ces villes de longueur totale minimum, la solution est différente comme on le montrera ultérieurement.
Mathématiquement : soit un triangle ABC, trouver le point M pour lequel la somme des distances MA + MB + MC est minimum. L'existence d'un tel point dérive du théorème de Weierstrass sur le minimum d'une fonction continue définie sur un ensemble compact. Quand les angles d'un triangle sont tous inférieurs à 120°, M est le " point de Torricelli ", point à partir duquel on voit les côtés du triangle sous un angle de 120°. Si inversement un angle, par exemple au sommet A, est supérieur à 120°, on démontre facilement qu'il faut placer le point M en A. Selon Glaeser (voir bibliographie) " de nombreux manuels proposent le problème précédent en se limitant au cas où les trois angles du triangle sont aigus. Il s'agit, à notre avis, d'une grave erreur pédagogique. Cette attitude contribue à répandre la fausse image d'une mathématique dans laquelle les problèmes naturels ne conduisent jamais à des singularités. Ce serait déjà mieux si dans l'énoncé on indiquait la fonction critique de l'angle de 120°. Mais il est encore préférable de proposer le problème sans mettre les élèves en garde, d'aucune façon que ce soit. Et lorsque le cas d'un triangle ABC comportant un angle très obtus aura échappé à la majeure partie d'entre eux, la correction du problème se transformera en une recherche de contre-exemples."

Où devons-nous construire l'hôpital? (voir encadré 2)
Certains livres disent qu'il faut le construire au barycentre des trois pays.
Avec cet appareil (fig. 1), nous allons démontrer que le meilleur point pour construire l'hôpital n'est pas le barycentre, comme disent ces livres, mais un autre point.
Vous voyez qu'ici les routes sont représentées par trois cordelettes unies par un nœud; chaque cordelette passe par un trou et soutient, en dessous de la table, un poids égal pour chacune d'elles.
Si je déplace maintenant ce nœud et que je le laisse ensuite aller, il revient toujours au même point qui est la solution optimum c'est-à-dire le point où nous devons construire l'hôpital de telle sorte que les liaisons entre les trois villes aient une longueur totale minimum.
Observez maintenant un aspect particulier très intéressant : les trois routes forment entre elles des angles de 120° (je pose sous les cordelettes un disque ayant un secteur angulaire de 120° mis en évidence)
.
Pourquoi ce point est-il la solution optimum de notre problème?
Attention, cela semble être un jeu de mots, mais c'est une démonstration! et j'ai besoin de toute votre attention...
(Je lève horizontalement le disque comportant le secteur angulaire de 120°.)
Regardez ce disque soutenu par ma main... Si j'ouvre la main, qu'arrive-t-il?... le disque... (tous en chœur, accompagnant la chute du disque : " il tombe ").

Bravo!!! Oui, il tombe; c'est-à-dire qu'il tend à aller le plus bas possible.
De façon analogue, après avoir déplacé ce nœud (je déplace le nœud des cordelettes et les trois poids oscillent de haut en bas), les trois poids sous la table tendent à aller le plus bas possible, c'est-à-dire de manière telle que les trois cordelettes : celle-ci, celle-ci et celle-ci (j'indique leur partie située sous la table) aient une longueur totale maxima... Et quand donc les trois cordelettes sous la table ont-elles une longueur totale maximale? Quand les trois cordelettes sur la table... ont une longueur totale...?

Quelqu'un dit : " minimale ".

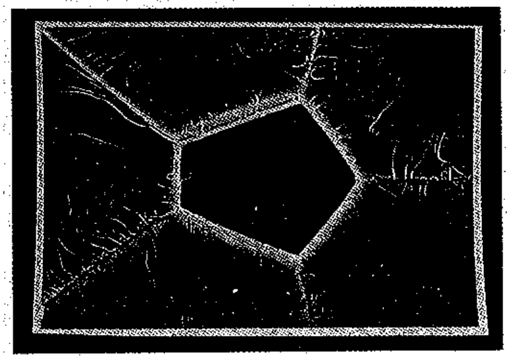
Bravo!!! Oui, minimale, c'est-à-dire en deux mots, plus il y a de corde en dessous... moins... il y en a au-dessus, et à l'état d'équilibre elle est minimale et donc, pour notre problème, nous avons démontré que la longueur totale des routes est la plus petite possible. (D'autres démonstrations sont données plus loin.)
Mais pourquoi les routes forment-elles des angles à 120°.?

Voyons-le ainsi : (l'expérience qui suit est " mimée " avec deux élèves. On cherche ainsi à représenter avec leurs propres corps toute situation qui, de toute façon, est aussi exposée oralement).
Il y a trois cordes (j'ai une main en l'air qui tient trois cordes) qui pendent sous ma main. Ici, en haut, je fais un nœud avec les trois cordes, et jouons maintenant à " tirer sur la corde avec trois personnes " : je te donne un bout libre d'une corde, serre-le bien fortement et ne le fais pas tomber, à toi un autre, tiens-le bien haut sinon on ne le voit pas, et le dernier à moi.

Regardez, tirons les cordes ainsi et supposons que nous ayons tous les trois la même force, comme les trois poids égaux sous la table. Maintenant, si, tout en tirant la corde, je me rapproche de toi (je me déplace en décrivant un arc de cercle) nos forces tendent à s'unir, et donc que se passe-t-il pour lui...? (Réponse : " ... ".) Oui, il se trouve entraîné dans notre direction. La même chose si, au contraire, je me rapproche de toi, c'est maintenant lui qui est entraîné vers nous, et enfin c'est moi qui serai entraîné si vous unissez vos forces en vous rapprochant l'un de l'autre.

Quand donc y a-t-il équilibre, c'est-à-dire qu'aucun n'est entraîné vers les deux autres? Réponse très fréquente : " quand nous sommes à la même distance les uns des autres " (encadré 3). Oui, d'accord, cela va bien quand les cordes ont la même longueur, mais par exemple ici dans notre appareil, ce n'est pas comme cela. (Je porte de nouveau l'attention sur l'expérience mimée et je me place en une position en laquelle il pourrait effectivement y avoir équilibre.) Je répète : nous sommes en train de tirer avec la même force, aucun de nous ne doit être entraîné... mais alors ici au nœud... Comment doivent se disposer les trois cordes? (très fréquemment, il y en a un qui répond : " avec les mêmes angles ").
Bravo!!! Oui, les angles doivent être égaux, c'est-à-dire de 120° et ceci est indépendant de la longueur des cordes car si, en partant de cette position d'équilibre et tout en tirant toujours avec la même force, je viens vers toi, et cette fois-ci selon la direction même de la corde... alors vous voyez (j'essaye de faciliter au maximum la compréhension en mimant) la corde est tendue comme auparavant, elle devient plus courte, mais l'équilibre se maintient toujours, et les angles restent de 120°.

Photo NB fig. 6 p 14 Emmer



Encadré n° 3

Si la phrase utilisée précédemment est changée en " si je me rapproche de toi, de telle sorte que l'angle entre les cordelettes soit le plus petit possible ", si donc on oriente tout de suite l'attention sur l'angle, une éventuelle réponse se révèle plus fréquemment correcte. Mais, tout d'abord on ne veut pas que cela soit excessivement suggéré, et de plus, on tend à faire surmonter explicitement par les élèves l'erreur très fréquente de l'influence sur la grandeur de l'angle, de la longueur des segments qui le déterminent.
Il peut être préférable de mimer cette expérience, plutôt que de l'exécuter; et ceci, non seulement, dans le but de gagner du temps ou d'utiliser un moyen didactique amusant, mais aussi pour concentrer principalement l'attention sur les aspects logiques du problème, plutôt que sur le jeu; enfin surtout parce qu'il est facile de se représenter des forces et des angles égaux, et donc d'en tenir compte dans l'action mimée, alors que dans la réalité on l'obtiendrait difficilement, et cela à cause de la sympathique mais souvent excessive participation des élèves. Quoi qu'il en soit, on peut aider la compréhension d'un raisonnement abstrait en le faisant émerger à travers des images et des sensations que les élèves ont déjà eues de façon plus ou moins analogue, ou qu'ils peuvent facilement se représenter.

Pour la même raison, nous pouvons démontrer que ce point n'est pas le barycentre (j'indique le nœud des cordelettes à 120°, de l'appareil), car si je déplace cette ville, toujours selon la direction de la corde, le barycentre se déplace, alors que notre point reste invariant, et l'on peut donc dire que notre point-solution et le barycentre sont deux choses différentes.

La solution savonneuse

Je me déplace devant une cuve contenant de l'eau savonneuse, en quantité suffisante pour y immerger complètement deux feuilles de plexiglas transparent retenues parallèlement, à une distance d'environ 2,5 cm, par trois vis aux trois sommets d'un triangle scalène, le plus grand côté de celui-ci n'étant pas beaucoup plus long que 15 cm. La même chose étant faite avec quatre vis aux sommets d'un carré.

Revoyons la solution du même problème avec cet autre appareil, où les trois villes sont représentées par ces trois vis. En l'immergeant dans l'eau savonneuse et en l'en extrayant, vous pouvez voir que les pellicules de savon tendent à former, en un point, nos angles de 120° (fig. 2).

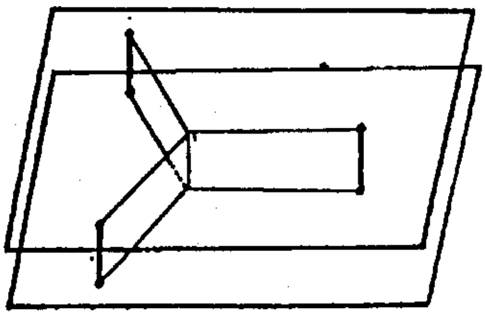
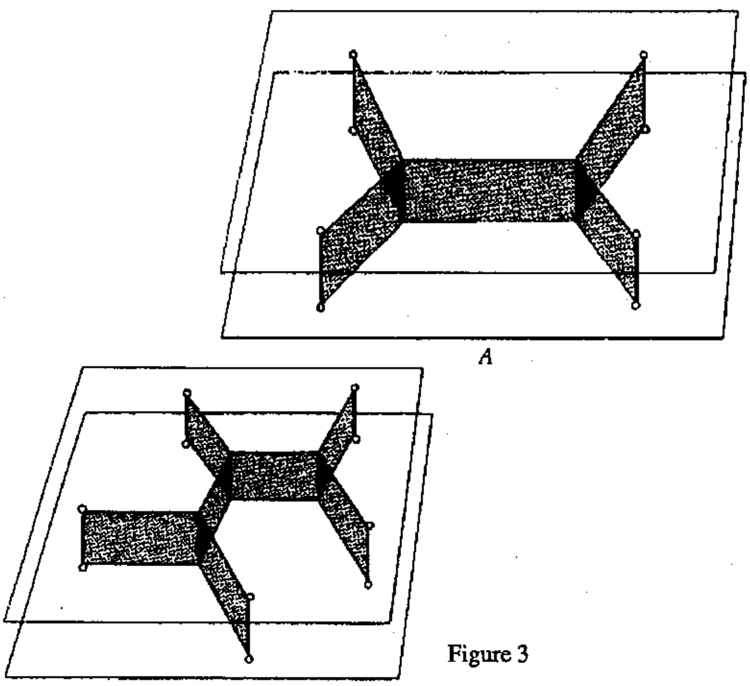


Figure 2

Et pour quatre villes? (Je repère au tableau quatre points aux sommets d'un carré.) Comment pensez-vous que doivent être construites les routes pour avoir une connexion minimale? La solution qui vient tout de suite à l'esprit est donnée par les diagonales du carré. Mais ce n'est pas cela; la connexion minimale nous est indiquée par cet autre appareil; vous voyez que les routes se rencontrent toujours en formant des angles de 120° (fig. 3)[1].



A

B

Figure 3

Il en est de même avec cinq villes, disons que la cinquième ville est mon doigt (je pose un doigt perpendiculairement plus ou moins au milieu d'un côté de l'appareil qui est ensuite extrait de l'eau, du côté du doigt). Les routes de longueur totale minimum qui les rejoignent forment toujours des angles de 120° (fig. 3), et si je déplace mon doigt, les routes se déplacent aussi, certaines devenant plus courtes, d'autres plus longues; mais les angles sont toujours encore égaux à 120°[2].

Pourquoi la meilleure solution peut-elle donc se trouver aussi avec les bulles de savon?

Sur quelle propriété physique pouvons-nous baser notre raisonnement pour le démontrer?

---

[1] Pour plus de trois villes, il peut y avoir plusieurs solutions minima, toutes de la même longueur. Dans le cas du carré, il y a deux solutions qui ne diffèrent l'une de l'autre que par une rotation de 90° à cause des symétries du carré.

[2] Dans ce cas aussi, il y a des exceptions. Par exemple, la règle des 120° n'est évidemment pas valable lorsque les villes se trouvent être alignées ou lorsque (comme dans la figure 4) deux villes (ou une ville et un nœud) se trouvent projetées d'une troisième ville intermédiaire sous un angle supérieur à 120°. Dans ces cas la connexion minimum comporte un nœud en cette dernière.

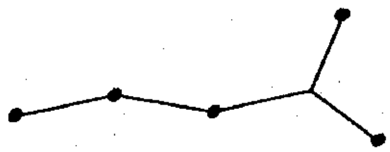


Figure n° 4

Jacob Steiner (1796-1863).

Attention, je fais une bulle de savon (j'éloigne la paille de la bouche et en empêche la fuite de l'air); si j'ôte le doigt de l'extrémité de la paille, qu'arrive-t-il à la bulle? (Réponse : " elle se dégonfle "). Oui, vous voyez, elle se dégonfle. Ceci peut démontrer que la pellicule de savon est une pellicule élastique.

Et maintenant, observons une propriété importante de l'élastique. Ceci est un élastique (en mimant), tiens ce bout et je prends l'autre; attention de ne pas lâcher l'élastique, sinon il me saute à la figure. Si j'en déplace le centre et que je le laisse ensuite aller, l'élastique vibre et à l'équilibre prend la position qui correspond à la tension minimale et donc à la longueur minimum.

De même pour les pellicules d'eau savonneuse, elles sont élastiques et tendent donc à prendre la position qui correspond à la plus faible superficie; et c'est pour cela que la bulle de savon est sphérique. Parce que la sphère est la forme géométrique contenant un volume donné avec la superficie minimum.

De façon analogue, en faisant une bulle entre ces deux plaques de plexiglas mouillées d'eau savonneuse, vous pouvez observer un cercle (fig. 5), et là aussi la pellicule élastique, avec sa tendance à assumer une position de tension minimum et donc de longueur minimum, nous démontre qu'entre toutes les surfaces planes d'aire donnée, le cercle a le périmètre de plus petite longueur (encadré4)

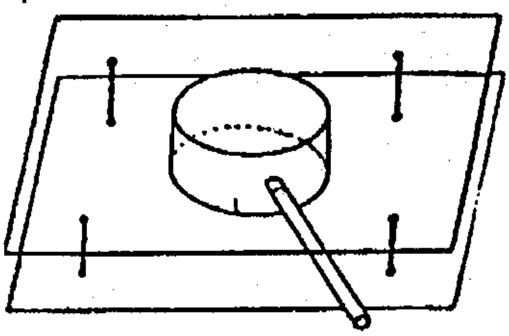
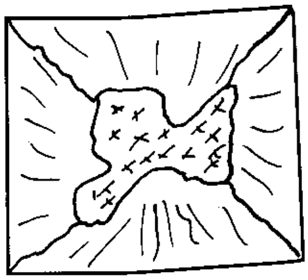


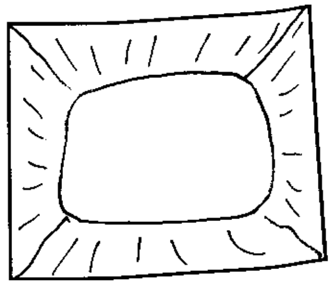
Figure 5

Encadré n° 4

> Toujours à ce sujet, on peut faire " voir " facilement que parmi toutes les figures planes de périmètre donné, le cercle est celui qui comprend l'aire maximum. Deux propriétés rapportées sur le cercle constituent l'énoncé du fameux théorème de l'isopérimétrie qui, déjà connu par Zenodoro (qui a vécu entre l'an 200 av. J.-C. et l'an 90 ap. J.-C.), a réclamé après sa découverte, près de 2 000 ans de tentatives de nombreux mathématiciens qui tentèrent de le démontrer avec plus ou moins de succès, jusqu'à ce que Karl Weierstrass résolve totalement le problème. Mais même si la démonstration de la propriété ne peut être donnée aux élèves, pourquoi ne pas faire en sorte qu'il puissent au moins la découvrir?

Le cercle : surface maximale à périmètre constant.





après une solution savonneuse

Enfin, la même chose arrive avec nos appareils de plexiglas (j'extrais de nouveau de l'eau savonneuse celui des quatre villes) : les pellicules de savon glissent sur elles-mêmes tant qu'elles n'ont pas atteint la position de longueur totale minimale.

TROIS VILLAGES, UNE ÉCOLE

Revenons maintenant à notre appareil de départ (fig. 1) et rendons le problème des trois villes plus complexe mais toujours réel, et pour le distinguer du précédent, supposons que, nous désirions construire non plus un hôpital, mais une école. La nouveauté est que, cette fois-ci, nous voulons tenir compte de la grandeur des trois villes et supposons, par exemple, que de ce pays puissent venir 300 étudiants, de celui-ci 400 et de celui-là 500 (près des villes se trouvent placés de petits cartons portant l'indication du nombre d'étudiants qui en proviennent).

Ces 300 étudiants, pour aller à l'école, doivent chacun parcourir un tronçon de route, ces 400 et ces 500 d'autres tronçons de route.

Où devons-nous construire l'école de telle sorte que, cette fois-ci, soit minimum la somme totale des parcours des étudiants? Attention, j'insiste sur la différence : nous

Le second couple donné, entre parenthèses, représente le " classement " de la solution suivant les problèmes de longueur totale minimum, et de parcours moyen minimum. On a ainsi la confirmation que la première solution est la meilleure pour la longueur totale (2,73), alors que la seconde est celle qui minimise le trajet moyen par habitant; et c'est en fait cette dernière qui est adoptée pour relier quatre points à l'intérieur d'une ville où le problème du coût du matériel de construction est mineur car les liaisons sont plus courtes que pour rejoindre quatre villes.

On peut aussi voir que la troisième solution, la " plus naturelle " représente le meilleur compromis entre les deux problèmes, car elle arrive seconde au classement dans les deux cas et n'est que de peu supérieure aux solutions minimum.

Cette solution est, d'autre part, la meilleure pour relier les quatre villes avec une structure commune (par exemple un aéroport), qui sera située à l'intersection des routes.

Enfin, la cinquième solution, bien qu'étant plus " équitable " que la quatrième, totalise les mêmes valeurs que celle-ci, et ceci car lorsque le parcours d'un habitant augmente, celui d'un autre diminue d'autant.

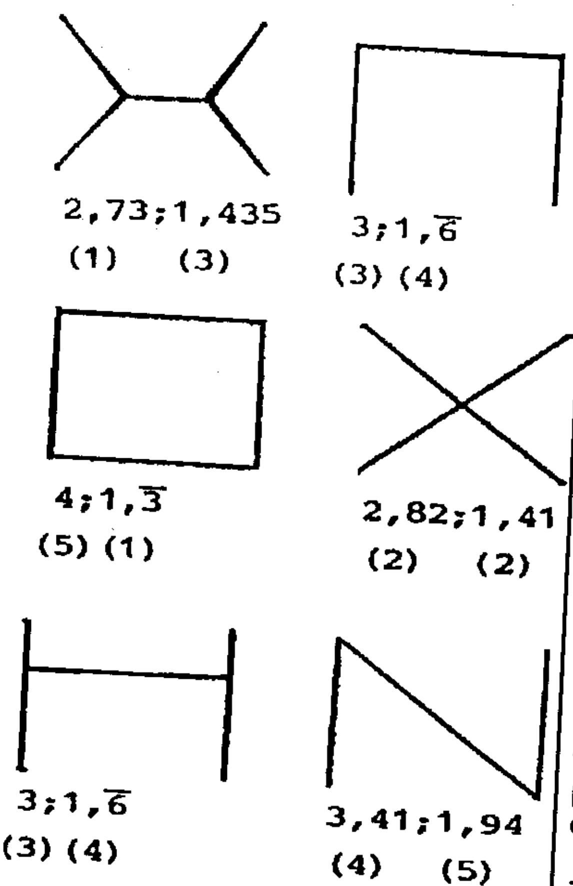


Figure 27

UNE " RECETTE POUR LES BULLES DE SAVON " ET QUELQUES EXPERIENCES AMUSANTES SUR LA TENSION SUPERFICIELLE.

Une recette pour obtenir un bon liquide pour les bulles de savon, rapportée avec de légères variations par plusieurs auteurs, est la suivante :

Mélanger 10 g ou à peine plus de Savon de Castille, ou mieux encore d'huile de sodium pur et sec, dans 500 g d'eau distillée, ajoutant par la suite 500 g de glycérine pure (environ 0,4 litre).

Le Boys (voir bibliographie) conseille de mélanger aussi trois gouttes d'ammoniaque pure concentrée : cela marche avec environ 15-20 g, mais je n'en connais pas la raison. Certains auteurs conseillent d'ajouter " une pincée de sucre pour donner plus de consistance au liquide ", mais il me semble que cela ne présente aucun avantage.

Un moyen pour conserver longtemps les bulles de savon est celui d'utiliser des tubes de carton [conviennent parfaitement les cylindres de carton de certaines bobines de fil (toujours plus rares)], ouverts sur 1-2 cm en 3-4 endroits pour soutenir mieux la bulle.

On entortille étroitement sur le chalumeau du fil de laine de telle sorte qu'une fois trempée dans le liquide elle puisse le céder lentement à la bulle, évitant ainsi que celle-ci ne se rompe par évaporation. Si enfin, de temps en temps, on mouille de liquide le tube avec un petit pinceau, on peut faire durer les bulles aussi longtemps qu'on le désire.

De cette façon, on peut faire beaucoup d'expérimentations et effectuer soigneusement des photographies suggestives au travers des bulles dans lesquelles, éventuellement, peut être soufflé de la fumée.

Parmi les expériences les plus simples pour mettre en évidence l'existence de la tension superficielle qui régit la forme des pellicules d'eau savonneuse, il vaut la peine de rappeler les suivantes :

1) Une goutte d'eau, avant de tomber, est retenue par une " membrane " élastique externe.

2) Les poils d'un pinceau avant et après avoir été introduits dans un verre d'eau sont désunis, alors qu'ils adhèrent l'un à l'autre lorsqu'ils sont retirés du liquide.

3) Deux verres pleins d'eau unis bord à bord, l'un retourné sur l'autre, ne laissent pas échapper le liquide même si est introduit entre eux une lame de couteau.

4) La membrane d'eau savonneuse tendue sur un anneau attire vers elle un fil fixé (et laissé mou) en deux points diamétralement opposés de celui-ci, lorsque la bulle est rompue dans l'une des deux parties situées de part et d'autre du fil (fig. 28).

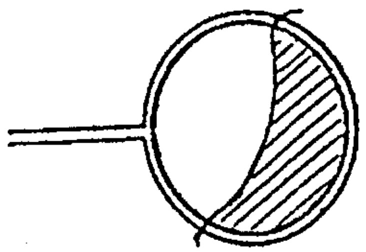


Figure 28

Pour mettre en évidence la différente tension superficielle des liquides, les expériences suivantes ont beaucoup de succès :

5) Au fond d'un récipient plat, on verse une fine couche d'eau colorée. En faisant tomber en son centre quelques gouttes d'alcool, on peut observer que l'eau se dirige rapidement vers le bord du récipient. Ce phénomène est dû à la tension superficielle de l'alcool qui est plus faible que celle de l'eau : la membrane d'eau, tendue, qui est " rompue " et se trouve substituée au centre par une membrane plus faible, attire à elle toute l'eau.

6) Le même phénomène peut être observé en répandant du poivre en poudre à la surface de l'eau dans un récipient, et ce, encore mieux, s'il est clair. Si un petit pinceau mouillé d'eau est introduit à la surface du liquide, il ne se passe rien; mais si l'on répète l'essai en trempant d'abord le pinceau dans du savon liquide qui a une tension superficielle plus faible que celle de l'eau, la membrane se dirige rapidement vers les bords, entraînant avec elle la poudre de poivre.

7) On peut, de l'observation de ce phénomène, tirer un conseil pratique : si l'on met de l'essence sur une tache de graisse, on obtient de l'essence grasse qui, ayant une tension superficielle supérieure à celle de l'essence pure qui sera ajoutée par la suite, entraîne la graisse vers l'extérieur de la tache, en laissant un halo.
Inversement, si l'on fait un cercle d'essence pure autour de la tache, celle-ci est rejointe progressivement par l'essence qui devient plus grasse, et se concentre au milieu de la tache, permettant ainsi d'être facilement absorbée d'un coup de chiffon.
Toujours pour la même raison, les parties de liquide gras qui surnagent sur le bouillon sont de forme circulaire.

8) Toujours pour mettre en évidence l'existence de la tension superficielle, l'expérience plus connue est celle de l'aiguille qui surnage à la surface de l'eau dans un verre. Puisque l'on parle d'attraction entre molécules, on peut rappeler aux élèves que celles-ci sont les plus petites particules possibles de toute substance et que, par exemple, pour l'eau, elles sont tellement petites que le chas de l'aiguille pourrait en contenir environ cent millions. Avec la même expérience, il est possible de faire voir que, quand le liquide ne remplit pas totalement le verre, l'aiguille se dirige vers le centre et au contraire vers les bords si le verre est complètement plein.
On peut expliquer ainsi que, par exemple, dans les tubes de faible diamètre, la forme prise à la surface libre du liquide, dite " ménisque ", a la concavité tournée vers le haut si le liquide " baigne " les parois, et vers le bas s'il ne les baigne pas.
Dans les deux cas, la tension superficielle entraîne le liquide dans un remous et le repousse, et le ménisque se retrouve à un niveau supérieur ou inférieur de celui du liquide externe.

9) En particulier l'eau mouille le verre et avec des tubes de faible section, si l'on en prend un de diamètre double d'un autre, la quantité de liquide soulevée sera elle aussi double; de plus comme l'aire de la surface du premier est quatre fois supérieure à celle du second, la hauteur du liquide à l'intérieur du tube le plus grand doit être la moitié de celle du plus petit tube. En règle générale, comme la quantité d'eau soulevée est une fonction linéaire du diamètre (diamètre/poids = constante), le poids de liquide soulevé étant directement propor-

tionnel au diamètre, la hauteur sera donc une fonction hyperbolique (diamètre x hauteur = constante), la hauteur rejointe par le liquide étant inversement proportionnelle au diamètre du tube (fig. 29).

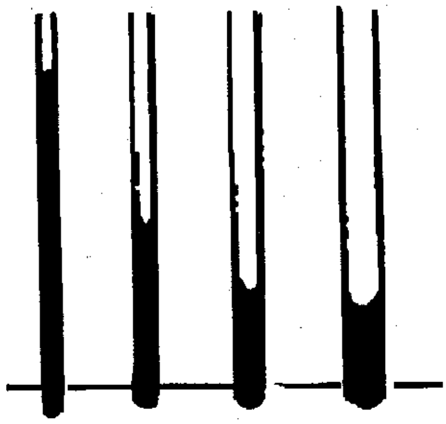


Figure 29

Par exemple :

diamètre	aire	hauteur	volume = aire x hauteur
1	A	H	V = A x H
2	4A	H/2	2V = 4A x H/2
3	9A	H/3	3V = 9A x H/3

10) Par un raisonnement analogue, on peut expliquer la formation de l'hyperbole équilatère lorsque sont immergés dans de l'eau colorée deux cadres de verre identiques, maintenus ensemble par un élastique : complètement unis d'un côté vertical et légèrement écartés d'une faible épaisseur du côté opposé (fig. 30).

11) Tout ceci explique le phénomène de la capillarité qui peut facilement être mis en évidence avec les mèches des lampes à huile, avec le papier buvard, avec les éponges, etc., et qui est dû, dans ces cas-là, aux interstices existant entre les fibres.

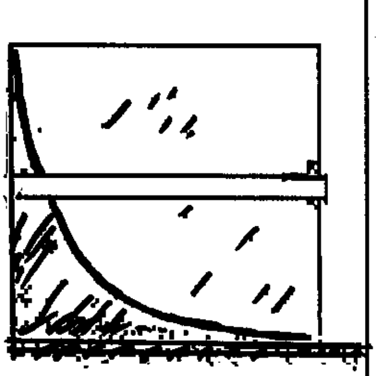


Figure 30

12) Revenant aux ménisques, et toujours pour la même raison, si l'on peint à l'aquarelle sur des surfaces de papier calque, la couleur se rassemble en petites gouttes; mais en ajoutant du détergent liquide qui a une tension superficielle inférieure à celle de l'eau, il devient possible d'étaler la couleur et de mouiller ainsi des surfaces que l'eau seule ne mouille pas.
C'est la raison pour laquelle on utilise en agriculture des substances chimiques dites " mouillants ", à ajouter aux antiparasites, afin de réduire la tension superficielle, en augmentant ainsi le contact avec les surfaces à traiter.

13) Enfin pour finir, l'exemple de l'hydrometra qui est un insecte au corps fin, à peine plus long qu'un centimètre et comportant des pattes excessivement longues; il vit à la surface des eaux calmes et riches de végétation, glissant sur celles-ci et se maintenant à la surface grâce aux poils imperméables dont sont équipées ses pattes et exploitant la tension superficielle. Attention donc à ne pas ajouter du savon à l'eau, vous feriez une mauvaise farce au pauvre hydrometra!

Pour en savoir plus

J.A.F. PLATEAU — Statique Expérimentale et Théorique des Liquides soumis aux Seules Forces Moléculaires.
Gand, 1873, 2 volumes.
J.R. NEWMAN — The World of Mathematics.
Simon and Schuster, New York, 1956, vol. 11,
C.V. BOYS — Le Bolle di Sapone e le Forze che le Modellano.
Zanichelli, Bologne, 1963.
J.T. DAVIES, E.K. RIDEAL — Interfacial Phenomena.
Academic Press, Londres, 1963.
A. SHELUDKO — Colloid Chemistry.
Elsevier, Londres, 1966.
T.H. HILL — Lectures on Matter and Equilibrium.
W.A. Benjamin, New York, 1966, pp. 187-195.
B. DE FINETTI — Il Saper Vedere in Matematica.
Loescher, Turin, 1967, pp. 35-37.
D. TABOR — Gases, Liquids and Solids.
Penguin Books, Middlesex, Royaume-Uni, 1969, pp. 212-222.
D'ARCY THOMPSON — Crescita e Forma (existe en français).
Boringhieri, Turin, 1969, pp. 62-190.
R. COURANT, H. ROBBINS — Che Cos'è la Matematica?
Boringhieri, Turin, 1972, pp. 512-538, 566-582.
N.D. KAZARINOFF — Disuguaglianze geometriche.
Zanichelli, Bologne, 1972, pp. 36-37, 133-135.
M. GARDNER — Enigmi e Giochi Matematici.
Sansoni, Florence, 1973, vol. III, pp. 69-77.
H.M. CUNDY, A.P. ROLLET — Modèles Mathématiques.
Cedic-Nathan, 1974.
Ya. KHURGHIN — Did You Say Mathematics.
Mir, Moscou, 1974.
F.J. ALMGREN Jr, J.E. YAYLOR — La geometria delle bolle di sapone.
Le Scienze, 99, Novembre 1976, pp. 48-60.
V.A. USPENSKY — Certain Applications of Mechanics to Mathematics.
Mir, Moscou, 1976, pp. 56-58.
E. CASTELNUOVO, M. BARRA — Mathématiques dans la Réalité.
Cedic-Nathan, 1980.
R. ALLEAU — Guida ai Giochi.
Longanesi, Milan, 1976, pp. 34-35.
D. HILBERT, S.C. VOSSEN — Geometria Intuitiva.
Boringhieri, Turin, 1978, pp. 226-274, 347-351.
E. UBELL, A. STRONG — Il Mondo delle Forze.
Zanichelli, Bologne, 1978.
K. GOLDSTEIN, J. HARVEY — Esperimenti con le Cose di Tuti i Giorni.
Zanichelli, Bologne.
K. VON FRISH — L'Architettura degli Animali.
Mondadori, Milan.
M. LINDAUER — Il Linguaggio delle Api Sociali.
Zanichelli, Bologne.
D. BERTOLINI — Geometria della Natura.
Piccoli, Milano.
A. ISAACS — Natura Scienza Tecnica.
Feltrinelli, Milan, 1978, vol. IV, sujet 14.
F. CHERRIER — Esperienze di Fisica divertente.
Giunti-Marzocco, Florence, 1979.
D.N. BURGHES — Mathematical Modelling : A Positive Direction for the Teaching of Applications in Mathematics at School.
Education Studies in Mathematics, 11, 1980, pp. 113-131.
M. GARDNER — Circo Matematico.
Sansoni, Florence, 1981, pp. 37-40.
J. WALKER — Scienza in Casa.
Le Scienze, 163, Mars 1982, pp. 46-50.
F. GLASER — La Matematica Moderna per chi deve insegnarla.
Feltrinelli, Milan, 1982, pp. 106.
A. DOLCI — Un Semplice Problema di Probabilità Geometrica.
L'Educazione Matematica, III-2-1982, pp. 183-186.

Voir aussi PLOT n° 45, 36 et 37.

MOLECULES D'ARCHIMEDE

Marc BLANCHARD - La Rochelle

Cet article est un prolongement du numéro 6 de Tangente. ***Dans toute l'étude, les polygones sont réguliers, convexes et leurs côtés ont tous une même longueur fixée*.***

Combien sont-ils autour de chaque sommet ?

Il est possible de disposer des polygones convexes réguliers de sorte qu'ils
— aient tous un sommet commun,
— aient deux à deux un côté commun,
— ne se chevauchent pas.
Voici quelques dispositions :

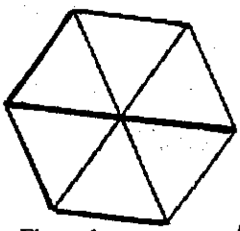


Figure 1

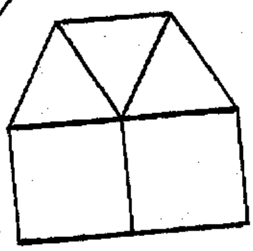


Figure 2

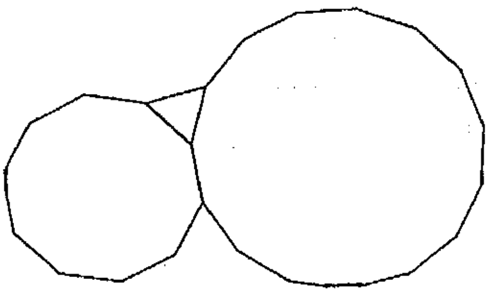


Figure 3

De telles configurations sont appelées **" molécules d'Archimède "**.
Le problème est de les trouver toutes.

A la recherche de molécules

Soient k polygones ayant respectivement $n_1, n_2, ..., n_k$ côtés formant une molécule d'Archimède. Sans nuire à la généralité, on supposera : $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$

Nous savons qu'un angle d'un polygone convexe régulier de n_i ($n_i \geqslant 3$) côtés a pour mesure

$$\pi - \frac{2\pi}{n_1} \text{ radians}$$

On a $$2\pi = \sum_{i=1}^{k}\left(\pi - \frac{2\pi}{n_i}\right)$$

On en déduit $$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1} \quad (1)$$

Remarquons que : $$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} > 0$$

donc $k > 2$
et que pour tout i, $n_i \geq 3$

donc $$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} \leq \frac{k}{3}$$

Cela équivaut à $k/2 - 1 \leq k/3$

donc à $k \leq 6$

Une molécule d'Archimède est donc formée de 3 à 6 polygones.
Il suffit d'étudier les quatre possibilités : k = 3, 4, 5 ou 6.

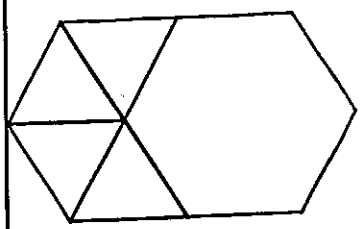


Figure 4

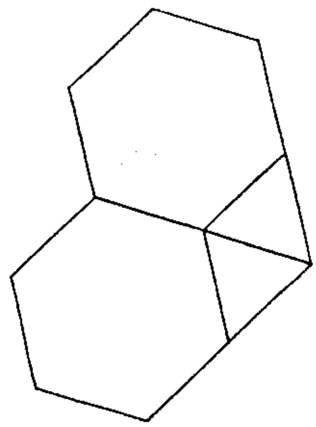


Figure 5

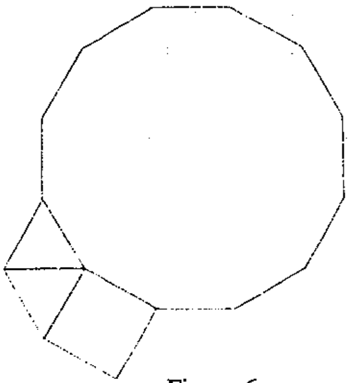


Figure 6

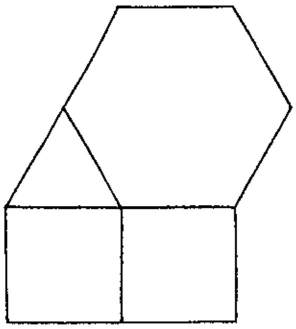


Figure 7

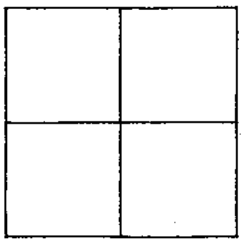


Figure 8

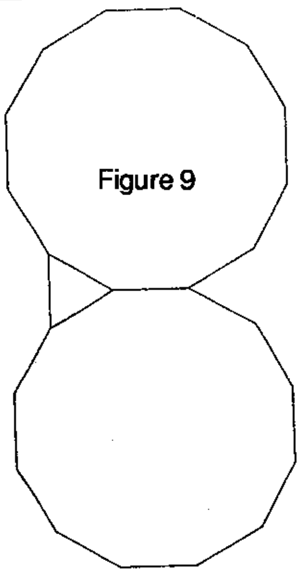


Figure 9

Six autour de la table !!!

L'égalité (1) s'écrit :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

Sachant que $n_i \geq 3$, on a : $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{n_i} \leq 2$

L'égalité n'est réalisée que pour $n_1 = n_2 = \dots n_6 = 3$.
On en déduit l'unique solution codée :
3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 !!! 6 triangles équilatéraux représentés figure 1.

Cinq à table !!!

L'égalité s'écrit :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

Sachant que : $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_5$, on a:

$\frac{5}{n_1} \geq \frac{3}{2}$ donc $n_1 \leq \frac{10}{3}$

La seule possibilité est que $n_1 = 3$

On démontre de même que, nécessairement, $n_2 = n_3 = 3$
puis que $n_4 = 3$ ou 4. Enfin, si $n_4 = 3$ alors $n_5 = 6$ et si $n_4 = 4$ alors $n_5 = 4$

D'où les solutions :
— 3 — 3 — 3 — 3 — 6 — (fig.4) et
— 3 — 3 — 3 — 4 — 4 — (fig.2)
disposés dans un ordre quelconque.

Quatre à table !!!

L'égalité (1) s'écrit:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} = 1$$

Sachant que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$

on a $\frac{4}{n_1} \geq 1$ donc: $n_1 \leq 4$

Seuls cas à étudier : $n_1 = 3$ ou 4

$\boxed{\text{si } n_1 = 3}$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$

de façon analogue à ce qui précède,

on a $\frac{3}{n_2} \geq \frac{2}{3}$ donc $n_2 \leq \frac{9}{2}$

Soit : $n_2 = 3$ ou 4

si $n_1 = 3$ et $n_2 = 3$

soit à résoudre : $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$

Sachant que $n_3 \leq n_4$, on a :

$3 < n_3 \leq 6 \leq n_4$.

Seules possibilités :

$n_3 = n_4 = 6$ et $n_3 = 4$, $n_4 = 12$.

D'où les solutions :
3 — 3 — 6 — 6 (fig.5) et
3 — 3 — 4 — 12 (fig.6).

si $n_1 = 3$ et $n_2 = 4$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{5}{12}$

Sachant que

$n_3 \leq n_4$ on a : $\frac{5}{12} \leq \frac{2}{n_3}$,

c'est-à-dire $n_3 \leq \frac{2}{5}$.

Seule possibilité : $n_3 = 4$ et $n_4 = 6$
D'où la solution : 3 — 4 — 4 — 6 (fig.7)

$\boxed{\text{si } n_1 = 4}$

Immédiatement, la seule possibilité est :

$n_2 = n_3 = n_4 = 4$

D'où la solution 4 — 4 — 4 — 4 (fig. 8)

Trois à table !!!

L'égalité (1) s'écrit :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

sachant que

$n_1 \leq n_2 \leq n_3$, on a $\frac{3}{n_1} \geq \frac{1}{2}$, donc $n_1 \leq 6$

Seuls cas à étudier : $n_1 = 3, 4, 5$ ou 6.

$\boxed{\text{si } n_1 = 3}$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$

Comme

$n_2 \leq n_3$, on a : $3 < n_2 \leq 12 \leq n_3$

Il est possible de résoudre l'équation diophantienne ou d'étudier toutes les possibilités pour trouver les solutions
3 — 12 — 12 (fig.9), 3 — 9 — 18 (fig.10),
3 — 8 — 24 (fig.11), 3 — 7 — 42 (fig.12)
et 3 — 10 — 15 (fig.3).

$\boxed{\text{si } n_1 = 4.}$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4}$

Comme

$n_1 \leq n_2 \leq n_3$, on a : $4 < n_2 \leq 8 \leq n_3$

Seules possibilités: $n_2 = n_3 = 8$,
$n_2 = 6$ et $n_3 = 12$, $n_2 = 15$ et $n_3 = 20$.
D'où les solutions: 4 — 8 — 8 (fig.13)
4 — 6 — 12 (fig 14)
et 4 — 5 — 20 (fig. 15).

$\boxed{\text{si } n_1 = 5.}$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{3}{10}$

Comme

$n_1 \leq n_2 \leq n_3$, on a : $5 < n_2 \leq \frac{20}{3} \leq n_3$

Seules possibilités: $n_2 = 5$ et $n_3 = 10$.
D'où la solution : 5 — 5 — 10 (fig.16)

$\boxed{\text{si } n_1 = 6.}$

Soit à résoudre : $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{3}$

Sachant que $n_2 \leq n_3$

Immédiatement, la seule possibilité est : $n_2 = n_3 = 6$, d'où la dernière solution, trois hexagones réguliers : 6 — 6 — 6 (fig. 17).

Au total, nous avons 17 cas, aux permutations près des polygones dans les cas 3-3-3-4-4, 3-3-6-6, 3-3-4-12 et 3-4-4-6.

17 MOLECULES

17 comme le nombre de types de pavages du plan invariants par symétries!!! Il serait extraordinaire que chaque molécule d'Archimède corresponde à un type de pavage. Hélas! Ce n'est pas le cas.

Pour vous en convaincre, examinez les 12 types de pavage archimédien que l'on peut faire avec des polygones réguliers de même longueur et recherchez les molécules qui leur correspondent.

Observez par exemple le cas 3-9-18, cité par Georges Borion. Quel autre polygone régulier pourrions-nous ajouter au côté libre pour compléter la figure ?

ET DANS L'ESPACE?

Sur la même idée, comment peut-on organiser les polygones réguliers de même longueur autour d'un sommet pour obtenir des polyèdres réguliers, semi-réguliers et autres ?

La réponse se trouve dans le Dossier **Polyèdres** du **PLOT** (1987) et vous pouvez d'ailleurs les construire, ainsi que les molécules d'Archimède, avec le **Matériel Polyèdres** du PLOT (Cf. bon de commande p. 47)

Un petit erratum pour ce dossier Polyèdres.

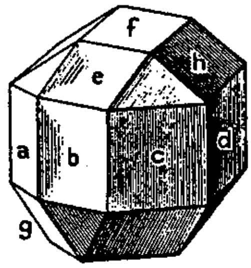
Dans l'espace, la molécule 3 - 4 - 4 - 4, donne le polyèdre semi-régulier appelé rhombi-cuboctaèdre.

Elle donne aussi un polyèdre moins symétrique que de nombreux auteurs appellent "Solide d'Achkinouse" du nom d'un des mathématiciens qui le découvrit vers 1950.

Roger le Masne, lecteur assidu de PLOT, nous signale que la revue française "La Nature" datée d'Août 1945 décrit ce polyèdre cité comme découverte d'un ancien élève de Centrale, M. Bert.

Ce "polyèdre de Bert" a comme particularité de remettre en cause la définition des polyèdres semi-réguliers dûe à Catalan: la régularité des polygones autour de chaque sommet ne suffit pas il faut aussi tenir compte de l'orientation. Il faut que toutes les molécules soient isométriques et superposables!!!

Roger le Masne est aussi l'auteur du **Livre des Polyèdres** que vous pouvez vous procurer en lui écrivant 63, rue J. Bertrand - 78220 VIROFLAY (400 pages, format A5) Prix 185F., envoi compris.



Les figures ont été obtenues sur table traçante programmée par Jean Coineau.

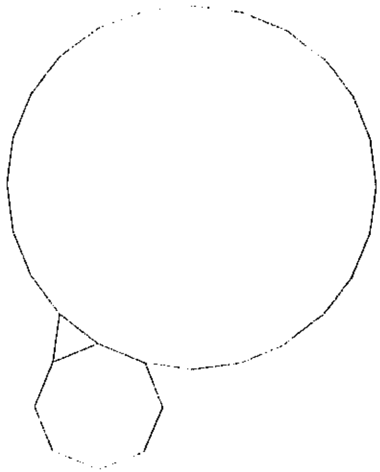


Figure 11

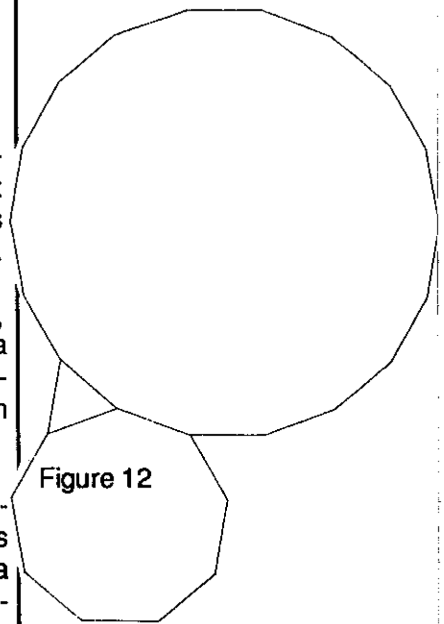


Figure 12

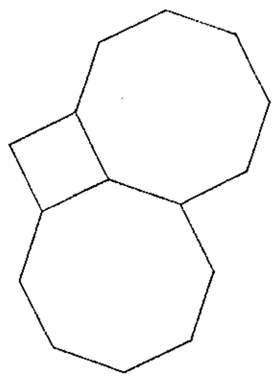


Figure 13

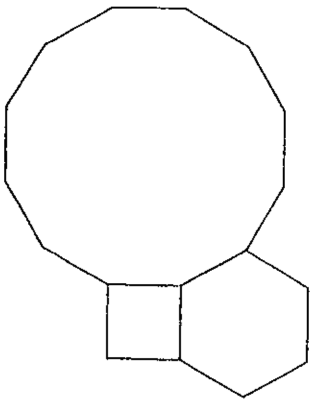


Figure 14

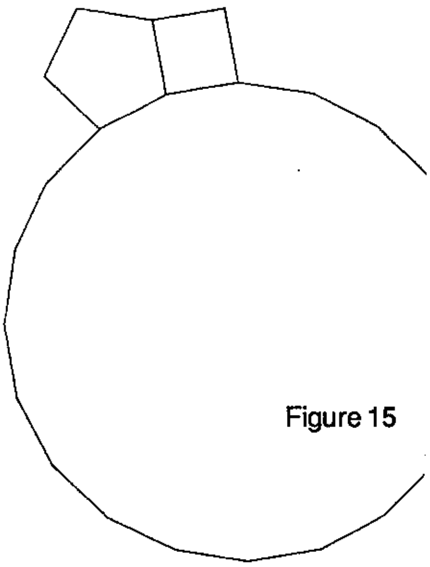


Figure 15

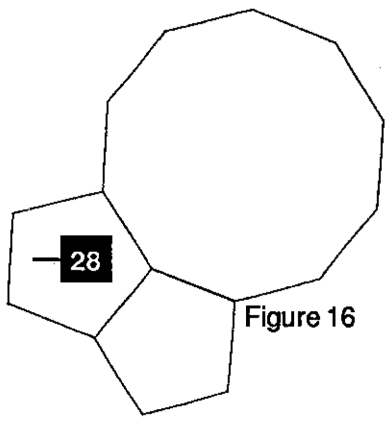


Figure 16

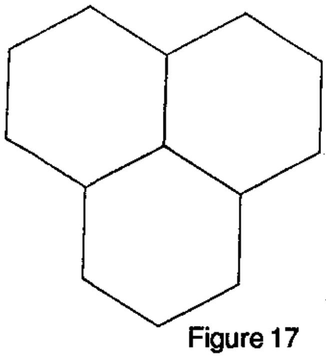


Figure 17

La liste des polyèdres semi-réguliers.

Les treize (quinze moins deux) polyèdres semi-réguliers de CATALAN, dont nous avons à parler maintenant, sont assez difficiles à définir et, - nous nous en excusons auprès du lecteur -, nous n'entrerons pas ici dans les détails classiques. On les trouvera, en particulier, dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* de 1865 où CATALAN a donné tous ses calculs. Nous donnerons donc, sans de longs commentaires, la liste des treize polyèdres semi-réguliers et nous insisterons un peu plus loin sur le n° 8 de cette liste, car c'est de celui-là que M. Bert a déduit un nouveau polyèdre semi-régulier :

le n° 1 (octaèdre) a 8 faces (4 triangles équilatéraux et 4 hexagones réguliers), 18 arêtes et 12 sommets;

le n° 2 (décatétraèdre) a 14 faces (8 triangles équilatéraux et 6 carrés), 24 arêtes et douze sommets;

le n° 3 (triacontadoèdre) a 32 faces (20 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers), 60 arêtes et 30 sommets;

le n° 4 (décatétraèdre) a 14 faces (6 carrés et 8 hexagones réguliers), 36 arêtes et 24 sommets;

le n° 5 (décatétraèdre) a 14 faces (8 triangles équilatéraux et 6 octogones réguliers), 36 arêtes et 24 sommets;

le n° 6 (triacontadoèdre) a 32 faces (12 pentagones réguliers et 20 hexagones réguliers), 90 arêtes et 60 sommets;

le n° 7 (triacontadoèdre) a 32 faces (20 triangles équilatéraux et 12 décagones réguliers), 90 arêtes et 60 sommets;

le n° 8 (icohexaèdre) a 26 faces (8 triangles équilatéraux et 18 carrés), 48 arêtes et 24 sommets _ C'est de lui que nous aurons à reparler plus longuement;

le n° 9 (hexécontadoèdre) a 62 faces (20 triangles équilatéraux, 30 carrés er 12 pentagones réguliers), 120 arêtes et 60 sommets;

le n° 10 (icohexaèdre) a 26 faces (12 carrés, 8 hexagones réguliers et 6 octogones réguliers), 72 arêtes et 48 sommets;

le n° 11 (hexécontadoèdre) a 62 faces (30 carrés, 20 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers), 180 arêtes et 120 sommets;

le n° 12 (triacontadoèdre) a 38 faces (32 triangles équilatéraux et 6 carrés), 60 arêtes et 24 sommets;

le n° 13 (ennécontadoèdre) a 92 faces (80 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers), 150 arêtes et 60 sommets.

Tous ces polyèdres pourraient, sans étude particulièrement délicate, être reconstitués à partir simplement des indications qui précèdent. Seuls les deux derniers, dans lesquels chaque carré ou pentagone régulier est entouré d'une couronne de forme assez compliquée faite de nombreux triangles équilatéraux, présentent d'assez grandes difficultés.

Le nouveau polyèdre semi-régulier.

Parlons un peu du n° 8, qui a 26 faces. On en déduit un nouveau polyèdre qui à cause de celà pourrait être appelé le *néo-icohexaèdre semi-régulier*. Les quatre dessins de la figue 2 montrent comment on l'obtient.

Le dessin n° 1 représente l'icohexaèdre semi-régulier de CATALAN. Si l'on ne s'attache qu'aux faces carrées, on y voit trois couronnes dont les plans de symétrie sont rectangulaires deux à deux. L'une comprend huit carrés dont quatre : *a, b, c, d,* sont visibles. Une deuxième comprend huit carrés dont quatre : *g, a, e, f,* sont visibles. Enfin, de la dernière couronne on voit encore quatre carrés : *l, c, h, f.* Outre ces dix-huit carrés, il y a huit triangles équilatéraux, dont quatre sont visibles.

Le dessin n° 2 représente le même polyèdre supposé creux et décapité, ses neuf faces supérieures ayant été déboîtées. On retrouve ici les carrés *e, f, h,* visibles. Cette calotte polyédrale a comme base un octogone régulier, donc un polygone plan.

Si l'on fait tourner cet octogone autour de son centre de 45 °, on obtient pour la calotte le dessin n° 3 où l'on voit encore toutes les faces carrées qui ont été désignées par des lettres. Il ne reste plus, comme il est montré sur le dessin n° 4, qu'à recoiffer la partie inférieure du polyèdre au moyen de cette nouvelle calotte pour obtenir le polyèdre semi-régulier de M. Bert.

Il suffit d'un peu d'attention pour voir qu'il ne possède plus qu'une couronne de carrés dont *a, b, c, d,* font partie, et qu'il a perdu la symétrie plane que permettait de définir cette couronne. Les deux autres couronnes de carrés n'existent plus, mais les symétries correspondantes subsistent encore.

Par ailleurs - et ceci est l'essentiel, - le polyèdre semi-régulier de M. Bert possède les mêmes faces, autrement disposées, que le polyèdre précédent et ses angles polyèdres restent tous identiques à ce qu'ils étaient auparavant et par la suite sont toujours superposables les uns aux autres : c'est donc bien un polyèdre semi-régulier.

On voit que si CATALAN a donné exactement toutes les listes de faces possibles, il n'a pas songé que leurs modes d'assemblages pouvaient être différents; de là vient sans doute son omission.

Nous ajouterons que M. Bert a examiné tous les polyèdres semi-réguliers et a recherché s'il y avait eu d'autres omissions : il n'en a pas trouvé. Il semble donc bien que, cette fois-ci, la liste soit close.

A. SAINTE-LAGUE,
Docteur ès Sciences.

SAVOIR PROUVER

Mario Barra - Rome.

Dans cette recherche, nous avons cherché à donner aux enseignants quelques outils permettant aux enfants de 11-15 ans d'apprendre à "savoir comment prouver", une habileté qui fait partie de la vie de tous les jours.

Pour cela nous vous proposons ici une approche historique et épistémologique présentant différents arguments de preuve sur une même notion.
Dans cette expérimentation didactique, nous avons remarqué les faits suivants :

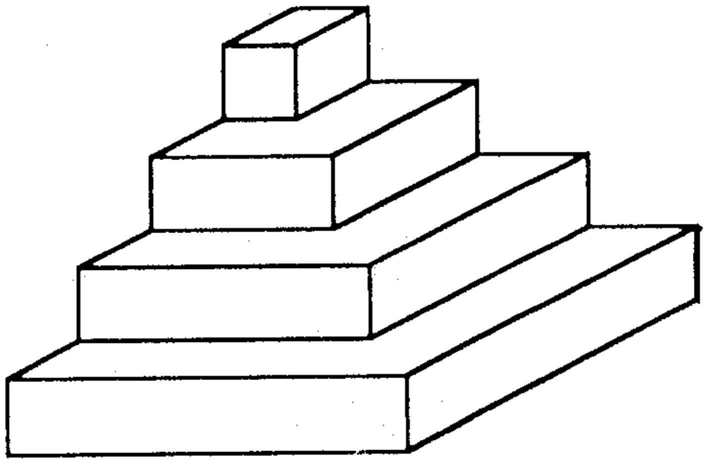
— beaucoup de propriétés des entiers naturels sont particulièrement simples à manipuler, pour apprendre à expérimenter, conjecturer, vérifier et prouver;

— une propriété exprimée en langage géométrique, en liaison étroite avec du matériel de manipulation, est comprise et reconstruite plus facilement; cette voie est aussi pratique pour introduire les symboles algébriques et leurs preuves géométriques;

— plus particulièrement, le matériel didactique et l'utilisation de dessins aident les élèves à verbaliser, en gagnant de plus une vision globale des propriétés et des étapes logiques de leur preuve. L'enseignant, lui-même, semble plus à l'aise avec cette pratique.

Apprendre à prouver

Dans ce travail, nous avons dû tenir compte du fait suivant : les élèves entre 11 et 15 ans, et parfois plus, montrent une faible habileté à débattre et à convaincre avec des arguments "logiques" (alors que beaucoup adorent polémiquer). Ils manquent d'habileté logique et d'expression, d'habileté pour exprimer les principaux points d'une argumentation, pour faire et expliquer les relations logiques qui conduisent à une conclusion.



Combien de petits cubes pour construire une pyramide ?

Le savoir-faire "savoir prouver" signifie ici et en particulier dans les voies scientifiques, savoir ce qu'est une preuve, la reconnaître, se l'approprier, la réutiliser et, si possible, la trouver soi-même.
La possibilité de développer ce "savoir prouver" est un problème très important dans notre enseignement. Actuellement, en Italie, plus de 75 % des enseignants de mathématiques de collège n'ont pas eu de formation en mathématique, ni même en physique. Aussi beaucoup d'entre eux n'ont jamais été confrontés dans leurs études, à une preuve au sens mathématique.
Dans ce qui suit le verbe "prouver" sera aussi utilisé pour signifier "débattre".

L'analyse historique

Comment ont été calculées les sommes suivantes :

(F1) : $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$,
(F2) : $12 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$,
(F3) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$, ...

Une analyse globale de ces très nombreuses preuves, à différentes époques, ne semble pas avoir été faite jusqu'à présent. Nous allons en présenter quelques-unes.

Occupons-nous en particulier de la somme des carrés.

Nous savons que :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$ est égale à
n(n+1) (2n + 1)/6 (F2).

Dans la tablette babylonienne A0 6484,2 (Musée du Louvre, cf. [11] p.124 ou [11*] p.15) nous trouvons le calcul de cette somme des carrés de 1 à 10 :
(1.1/3 + 10.2/3).55 qui correspond à la formule (F2) écrite sous la forme :
[(1 + 2n)/3**]** **[**n(n + 1)/2**]** pour n = 10.
Une preuve possible de ce résultat a été reconstruite par de nombreux auteurs, en particulier 0. Neugebauer ([9], p.172), J.E. Hofmann ([8], p.36), S.J. Lurge ([8], p.17), L. Giacardi et T. Viola ([4], p.185), L. Giacardi et S.C. Roero ([5], p.132 et 231).

Archimède ([1], p.253) en donne une preuve rigoureuse pour n = 8 et nous trouvons à nouveau la somme des entiers chez les Pythagoriciens ([7], p.192) et celle des cubes chez les Néo-Pythagoriciens (Nicomachus Gerasenus), chez les Arabes (Al Haitam et Mohamed ibn al Hossein) et chez les Chinois (Yang Hui).

Les preuves strictement analytiques peuvent être données de nombreuses manières, par exemple, en partant du **triangle de Pascal,** en utilisant une égalité particulière, comme le fait élégamment **Léonard de Pise** dans "Liber Quadratorum", ou par récurrence, à travers le développement de $(1 + n)^p$ et des sommes déjà calculées par des petites valeurs de n, en partant du calcul différentiel de **Leibniz** (Historia et Origo calculi differentialis), et finalement en partant d'une idée mathématique.

Hypothèses et premières conclusions

On peut les formuler ainsi :

a) Historiquement, les premières preuves ont été considérées d'une rigueur parfaite et d'une validité générale, même si elles étaient limitées à des cas particuliers, puisque les arguments utilisés étaient généraux.

b) A une période plus récente, les langages choisis et les intuitions sur lesquelles le plus grand nombre de preuves sont basées, sont de nature géométrique (cela peut être dû au fait qu'un tiers du volume du cerveau est connecté avec les sens de la vision).

L'approche non géométrique, comme celle, arithmétique, des Sumériens et des Pythagoriciens, pouvait être basée sur une pensée mystique ou magique ou même sur le désir d'éviter de divulguer leurs connaissances. L'influence de cette approche se retrouvera bien plus tard.

Même dans la preuve d'Archimède, bien que géométrique, les meilleures intuitions ne semblent pas pleinement utilisées parce qu'il tente de réduire les différentes configurations géométriques à des segments et des rectangles de longueurs entières, comme s'il voulait transformer les figures en nombres.

Les Pythagoriciens eux-mêmes, dans leur "Arithmo-géométrie" des nombres figurés (cf. article de Serge Ducloux in PLOT 49) utilisent des points mais les assemblent en figures géométriques et font des opérations algébriques dans "l'algèbre géométrique" tout en raisonnant sur les figures. D'un autre côté, il est par exemple impossible, en utilisant uniquement des points, de diviser en 2 parties égales un nombre impair de ces points, ou une configuration rectangulaire de ces points, par une ligne diagonale. Cette dernière opération est pourtant très utile, voir, par exemple, la démonstration du théorème de Pythagore par Euclide.

Le rôle de la géométrie, utile pour prouver des propriétés algébriques ou numériques, comme on peut le voir dans les preuves des Babyloniens, n'a pas été seulement celui d'auxiliaire.

c) En dimension 3, qui est le cas le plus étudié par les premiers mathématiciens, le langage non géométrique est moins simple et n'a pas toutes les possibilités de démonstration évidente qu'a le géométrique.

d) Laissant de côté le langage utilisé, il semble être plus important de trouver des preuves simples et de les rendre compréhensibles de la façon la plus claire possible.

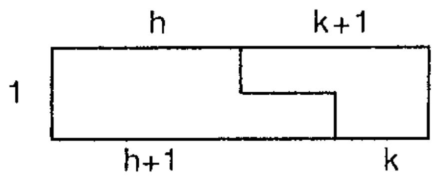
e) Le symbolisme algébrique a trouvé son chemin lentement et graduellement (nous pouvons considérer, cependant, que la connaissance de l'alphabet n'est pas encore largement utilisé en mathématique; on utilise encore des mots à la place des lettres). C'est aussi pourquoi la lecture et la compréhension des preuves n'est pas aussi claire et aussi facile à suivre.

f) Aussi loin que l'étude des figures géométriques est concernée, il y a dans l'histoire du langage un passage clair du géométrique à l'analytique algébrique qui dérive lui-même du passage aux n dimensions.
Dans l'école d'aujourd'hui, pourtant, même dans les cas où n est inférieur à 3, des outils puissants sont utilisés, malgré leur évidence limitée.
Comme le dit Bruno de Finetti "on écrase les mouches avec un marteau-pilon(!)" (a press is used to push in a drawing in).

Exemples simples pour la classe

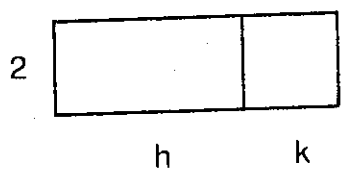
— Pair + pair = pair

$$2h + 2k = 2(h + k)$$



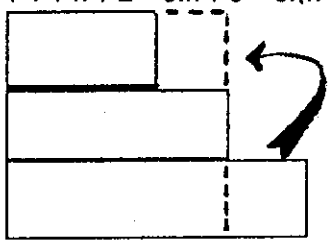
— Impair + impair = pair

$$2h + 1 + 2k + 1 = 2.(h + k + 1)$$



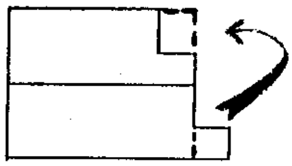
— La somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3 :

$$n + n + 1 + n + 2 = 3.n + 3 = 3.(n + 1)$$



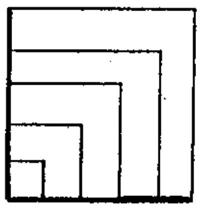
— La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4 :

$$2n + 1 + 2n + 3 = 4.n + 4 = 4.(n + 1)$$



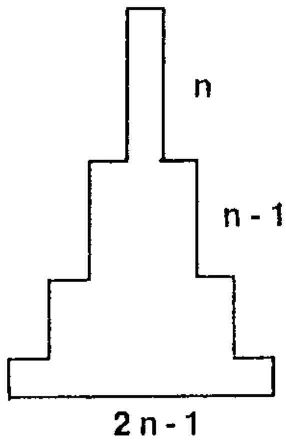
— La somme des n premiers nombres impairs consécutifs est un carré :

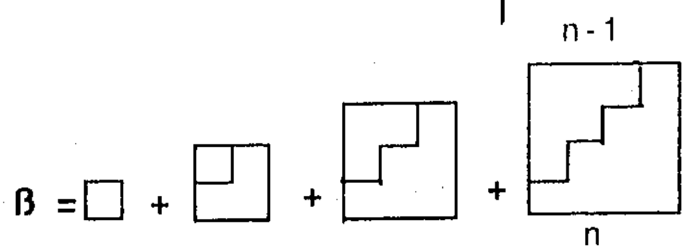
$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n + 1 = n^2$$

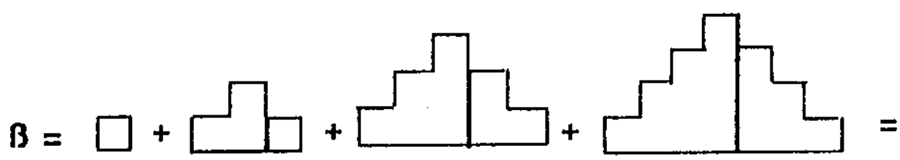


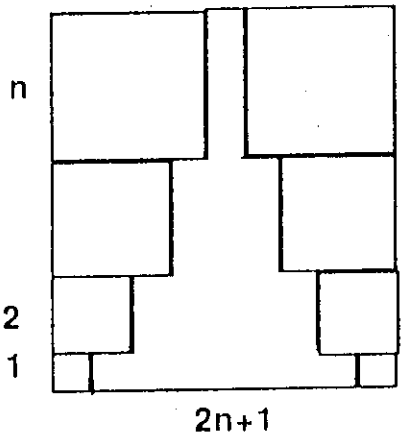
Du matériel pour la classe

Les preuves qui suivent utilisent parfois des idées trouvées dans les exemples historiques déjà cités.
Calcul de $1 + 2^2 + 3^2 + ... n^2$
sachant que $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$,...









La hauteur est égale à :
$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n + 1)/2$
L'aire est égale à :

$3.\beta = (2n + 1).n(n + 1)/2$

d'où : $\beta = (2n + 1).n(n + 1)/6$

Pour n = 10, cette formule est la même que celle trouvée dans la tablette babylonienne. Elle pourrait même être définie comme une “formule babylonienne” pour la méthode de preuve.

Si, à la place des carrés, on considère leurs centres, la formule peut alors être appelée formule “paléo-pythagoricienne”. Dans la preuve d'Archimède, on trouve la même partition des nombres carrés en nombres triangulaires (cf. Serge Ducloux in PLOT 49) : la somme des carrés est répétée 3 fois. Cependant cette preuve est trop longue (cf. notre remarque en b).

Puzzles en 3D

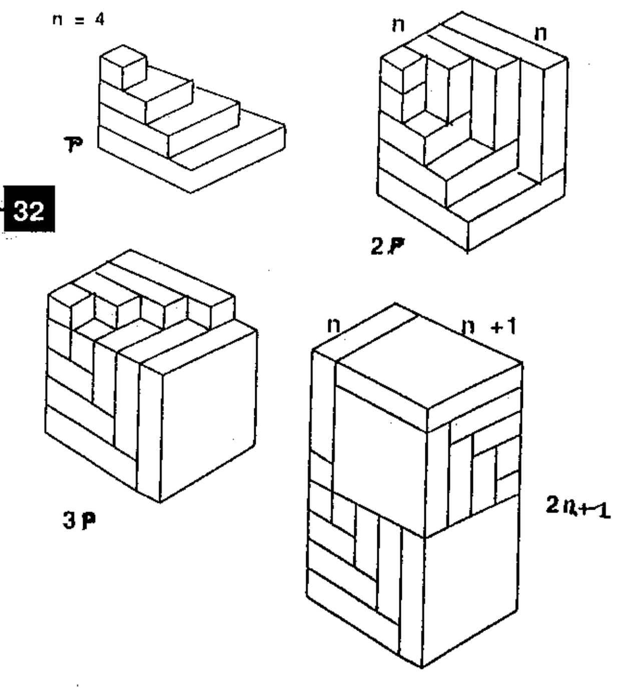
Avec des cubes unités, construisez 6 “pyramides” identiques à la forme P.
Assemblez-les pour former un parallélépipède rectangle.

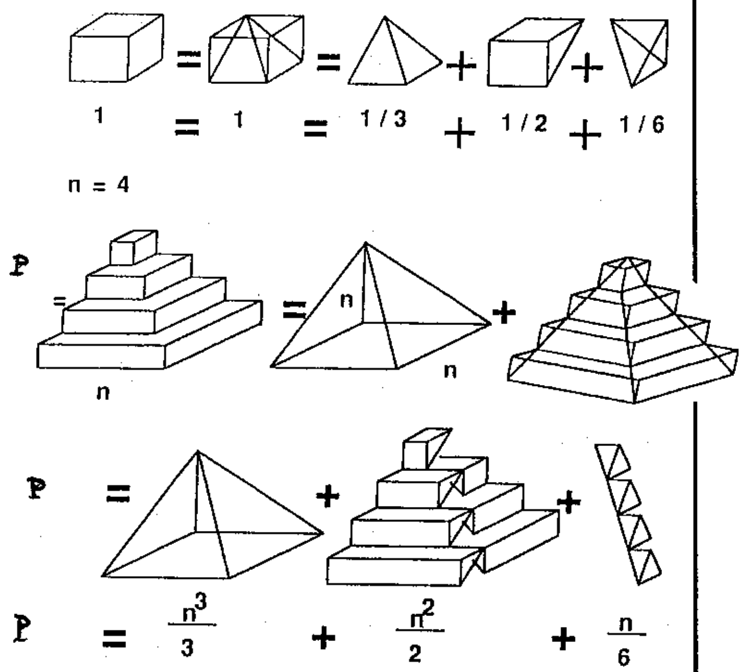
P 2P 3P 3P + 3P

Pour en savoir plus :

[1] Archimèdis Opera omnia cum Commentariis Eutocii. Ed Heiberg, Lipsiae in Aedibus B.C. Teubneri (1910-1915).
[2] Courant R., Robbins H. : What is Mathematics? Oxford University Press. New York (1941).
[3] Giacardi L., Viola T. : Atti Accad. delle scienze di Torino (calcul du volume de la pyramide tronquée) (1977).
[4] Giacardi L., Viola T. : Atti Accad. delle scienze di Torino (Origine possible d'un théorème grec) (1978).
[5] Giacardi L., Roero S.C. : la matematica delle civiltà arcaiche. ed. Stampatori. Turin (1979).
[6] Léonard de Pise : Scritti di Leonardo Pisano, Matematico del secolo decimoterzo. Ed B. Boncompagni, Roma, tip. delle Scienze (1857-1862).
[7] Loria G. : Storia delle mathematiche. STEN, Turin (1929).
[8] Lurge S.J. : Archimède. Vienne (1948).
[9] Neugebauer O. : Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Vol. 1. Vorgriechische mathematik, Berlin. J. Springer (1934).
[10] Nichomachus Gerasenus : Nichomachi geraseni Pythagorai introductionis arithmetici Libri. Ed. Hoche, Leipzig, Teubner (1866).
[11] Van der Waerden B.L. : Erwachende Wissenschaft. Bale-Stuttgart. Birkhauser Verl. (1956).
[11*] Van der Waerden B.L. : Science Awakening. Leiden. New York, Noordhoff Int. Pub. (1956).

Cette preuve est très semblable à celle de S.J. Lurge qui utilise uniquement 3 “pyramides” et obtient ce qui est montré ci-après. Cependant, ce n'est pas exploitable avec un puzzle de cubes.





EVALUATION 90

Joëlle et André JAN-GAGNEUX - BOURGES

Cet article fait suite à celui du PLOT 46 (spécial collège) intitulé : Evaluation, quoi de neuf? p. 11 à 16, mars 1989.

Evaluation : binaire, trinaire

La notation sommative est du domaine du binaire. Un concept est maîtrisé ou non. Que voudrait dire un permis de conduire obtenu avec 13 sur 20. ?

Vous imaginez : construire une pièce de mécanique de 10 mm avec une tolérance de 0,2. Si la pièce mesure 10,01 elle ne vaut pas 18, elle est bonne. Si la pièce mesure 9,5 elle est à jeter, elle ne vaut pas 4 sur 20.

La notation formative n'est pas reportée sur le bulletin des notes, elle aide, elle renseigne. Elle est trinaire: je ne sais pas, je suis en cours d'acquisition, je sais. C'est l'entraînement du sportif. On peut donner des contrôles différents à l'élève en difficulté et à l'élève réussissant. On peut donner des aides différenciées à ce moment-là, ces aides disparaissant le jour du contrôle. Par contre, il n'y a pas d'évaluation sommative pour classe faible ou pour classe forte. Les capacités exigibles sont les mêmes pour tous. Mais l'entraînement, la forme de l'apprentissage, les outils utilisés ne seront pas les mêmes.

Le formatif accompagne l'apprentissage. Il fait partie intégrante de la pédagogie. Le sommatif est du domaine de la certification, de l'évaluation. Albert Jacquart dit que les deux formes d'évaluation ne devraient pas être réalisées par les mêmes personnes. Cela n'étant malheureusement pas le cas, nous devons bien distinguer les deux rôles. Lors des tests sommatifs, les élèves sont prévenus, on a laissé faire le temps, on a spiralé en mettant les objectifs dans des situations diverses et multiples. Il est nécessaire de bien garder à l'esprit la distinction entre la pédagogie par objectifs et l'évaluation par objectifs. Nous défendons ici l'évaluation par objectifs et non la pédagogie par objectifs, puisque nous venons de montrer que les deux domaines où elles s'exercent ne sont pas de même nature.

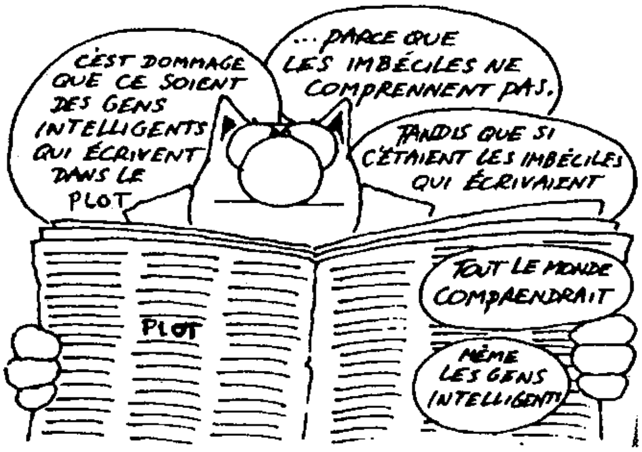
La pédagogie par objectifs

La pédagogie par objectifs est une pédagogie parmi d'autres, elle a été formalisée par Skinner et a aidé aux débuts de l'EAO*
Depuis 1976, ceux qui l'ont essayée ont limité son objet à un apprentissage où les items se succèdent.

C'est la pédagogie par objectifs qui reçoit les critiques de pointillisme et de risque de bachotage. Par contre, tout le monde s'accorde à dire qu'il n'y a d'évaluation que par rapport à des objectifs préalablement explicités. L'explicitation est essentielle : il faut écrire le produit attendu puisque évaluer c'est comparer ce produit attendu avec la production de l'élève. Notre expé-

* E.A.O.: Enseignement Assisté par Ordinateur

rience de correcteurs permet d'affirmer que nous changeons souvent notre jugement pendant la correction d'un paquet de copies, même si cela se fait imperceptiblement.



Pour devenir intelligent, écrivez dans le PLOT

La théorie des objectifs définie par Tyler et Mager et la taxonomie de Bloom sont les deux derniers outils théoriques sur lesquels nous nous appuyons. L'originalité de notre travail consiste en une synthèse de ces deux théories. Nous allons donc vous les présenter en introduisant en même temps nos adaptations issues de notre pratique en classe.

Ecrire des objectifs pour les élèves

La rédaction des objectifs doit satisfaire aux quatre conditions suivantes :
— la phrase qui explicite l'objectif doit avoir un sens le moins équivoque possible,
— elle doit comporter un verbe d'action qui décrit ce que l'on attend de l'élève en termes observables,
— elle doit définir les conditions matérielles et les contraintes de la passation,
— elle doit fixer les critères de l'évaluation, c'est-à-dire les conditions d'attribution de l'objectif.

La liste des objectifs est remise aux élèves. Un numéro précède chaque objectif pour rendre plus facile la fabrication d'une grille. L'introduction des objectifs nécessite un compromis entre le souci d'affiner au mieux leur définition et l'obligation d'en limiter le nombre pour que la liste soit gérable.

Ainsi ce que nous distribuons aux enfants est une liste d'objectifs opérationnels qui ne comporte pas les conditions matérielles, les contraintes et les critères d'évaluation. Ceux-ci sont définis pendant le contrôle sur la feuille du questionnaire. La liste est écrite à partir des compléments aux programmes publiés dans le B.O.E.N.* et est ainsi notre premier outil.

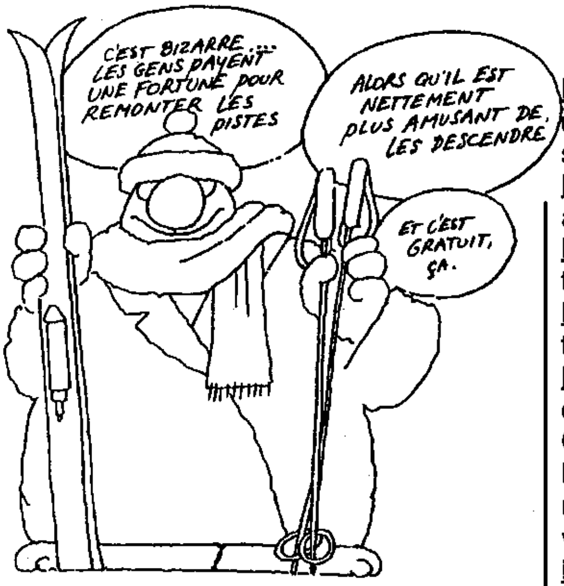
La grille des résultats

La grille de recueil des résultats élaborée à partir de cette démarche comporte en abscisse le numéro des objectifs et en ordonnée le nom des élèves de la classe. C'est notre deuxième outil. Le professeur sait ainsi exactement ce que sait et ce que ne sait pas chacun de ses élèves. De la même façon l'enfant sait où il en est. Puisque le programme d'une classe peut s'écrire à l'aide d'une centaine d'objectifs, le professeur dispose donc d'une centaine de renseignements.

L'utilisation de ces deux outils d'évaluation assure l'adhésion des enfants à leur évaluation. Ils gèrent leur propre grille et deviennent acteurs du suivi de leurs progrès et membres à part entière du contrat qu'ils acceptent.

Des réponses aux questions suivantes sont ainsi apportées lors de l'utilisation de la grille :

* B.O.E.N : Bulletin Officiel de l'Education Nationale



Objectif atteint

— aujourd'hui l'élève n'a pas atteint l'objectif mais dans quelques temps il sera à même de le réussir, comment gérer cela?
— quand il aura réussi cet objectif, que deviendra la précédente note?

A ces questions nous avons montré que la notation traditionnelle ne permettait pas de répondre, mais nous avons aussi montré que nous avions d'impérieuses raisons d'y répondre : la demande de la société, la demande de notre hiérarchie, la demande de qualité de la part des parents d'élèves. Le contrat pour l'enseignant est que maintenant chaque enfant réussisse toutes les compétences exigibles.

Pour répondre à ces questions nous abandonnons l'idée d'effectuer la moyenne des notes pour adopter une notation par paliers évolutive. Nous nous engageons à proposer trois fois la passation de chaque objectif. Il est indispensable de limiter le nombre des tests pour ne pas voir certains enfants repousser à plus tard leur travail. Ils peuvent se rattraper mais ils doivent prendre en main cette chance.

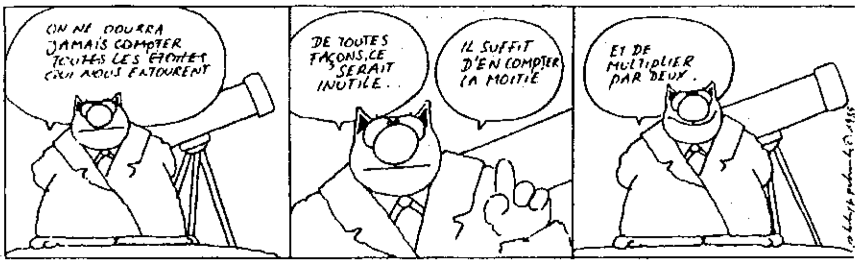
Des objectifs hiérarchisés

Si nous proposons aux élèves plusieurs passations du même objectif, il nous faut un cadre théorique pour comparer les différentes opérationnalisations que nous allons proposer aux élèves. Nous avons choisi la hiérarchisation des processus intellectuels de Bloom appelée taxonomie, dont nous proposons ici un résumé.
Niveau 1 : la connaissance d'un fait exprimé dans le langage appris.
Niveau 2 : la transposition de ce fait dans un autre langage (appelée compréhension par Bloom).
Niveau 3 : l'application de la connaissance à une situation connue de l'élève.
Niveau 4 : l'analyse, recherche de relations et de principes entre plusieurs faits.
Niveau 5 : la synthèse, la production d'un travail structuré.
Niveau 6 : l'évaluation critique d'une production sur le domaine de l'apprentissage.
Ces six premiers niveaux s'appliquent sur le domaine de l'apprentissage, sur un domaine différent nous avons les trois niveaux suivants :
Niveau 7 : la généralisation de l'objectif à un domaine proche.
Niveau 8 : le transfert à un domaine éloigné.
Niveau 9 : l'invention dans un domaine inconnu.

Taxonomie pour collèges

A partir de notre expérience, de nos lectures et après expérimentation en classe, nous avons réaménagé cette hiérarchisation en regroupant les niveaux bloomiens. Ceci est l'originalité de notre travail. Préalablement aux raisons de fond qui justifient nos choix, nous devons dire qu'il n'est pas possible de gérer neuf cents renseignements par élève. Nous appelons ainsi :
Niveau 1 : les niveaux 1 et 2 de Bloom
Niveau 2 : le niveau 3 de Bloom
Niveau 3 : le niveau 4 de Bloom
Niveau 4 : les niveaux 5, 6, 7, 8 et 9 de Bloom

Le choix des regroupements que nous avons effectués est adapté aux classes de collège et peut sans problème s'utiliser à l'école primaire. Pour le groupement des niveaux 1 et 2 de Bloom, dans une évaluation sommative, l'appropriation d'un concept est le minimum exigible et une interrogation de récitation du cours présente peu d'intérêt. Pour le niveau 3 de Bloom, par contre, qui est l'application, notion essentielle, nous l'avons isolé. Il en est de même pour le niveau 4 de Bloom, l'analyse est la capacité à acquérir au collège. Il est rare que le niveau d'exigence de l'institution consiste à appliquer un concept dans un autre domaine que celui pour lequel il a été mis en place dans l'apprentissage, ce qui permet rarement d'évaluer aux niveaux 7, 8 et 9 de Bloom. Bien sûr, l'invention existe à tout âge et nous n'avons pas l'intention de la brider : elle s'exprime librement lors de l'apprentissage mais les compétences exigibles ne sont pas de ces niveaux-là. Quant aux niveaux 5 et 6 ils vont souvent ensemble car il est légitime d'attendre d'un élève qui produit une synthèse qu'il ait eu un regard critique sur sa production.



Taxonomie pour lycées

Il nous paraît légitime d'adopter un groupement différent dans les classes de lycée :

Niveau 1 : les niveaux 1, 2 et 3 de Bloom
Niveau 2 : le niveau 4 de Bloom
Niveau 3 : les niveaux 5 et 6 de Bloom
Niveau 4 : les niveaux 7, 8 et 9 de Bloom

L'institution devrait définir ces niveaux. Ils seraient tout aussi utiles dans l'enseignement supérieur. Il faut assurer une continuité pour que les enseignants cessent de vouloir traiter et exiger tous les aspects d'un concept dès la première année où il apparaît dans un programme. C'est du domaine de l'institution car cela devrait aider à la mise en place d'un vrai contrôle continu (comparable d'une classe à une autre) pour le brevet des collèges ou d'autres examens.

La fonction pédagogique

La grille précédente ne permet pas à l'élève et à ses parents de lire l'ensemble de ces renseignements. Nous avons donc mis au point une nouvelle grille faite de la juxtaposition de petites cases : une case par objectif. Chaque case est séparée en trois colonnes pour recueillir les résultats des trois passations. Chaque colonne a quatre étages pour matérialiser les quatre niveaux de notre taxonomie. Une croix a chaque étage visualise le niveau atteint.

Cela permet une souplesse supplémentaire, nous pouvons à chaque passation offrir plusieurs exercices de niveaux différents. L'élève pouvant répondre à tous les exercices ou choisir l'exercice correspondant au niveau auquel il pense pouvoir répondre. Lors des rattrapages d'objectifs il va choisir les exercices codés à un niveau supérieur à celui qu'il a déjà atteint.

L'enfant n'est pas mis en échec inutilement, il possède un point d'appui à partir duquel il va pouvoir progresser.

La fonction pédagogique est ainsi remplie avec les quatre cents renseignements que possèdent le professeur et l'enfant.

Le professeur peut évaluer son travail à l'aide de la grille : un objectif mal réussi par l'ensemble de la classe devant être traité à nouveau collectivement.

Lorsque nous proposons un item, une question, un exercice, un problème, il est référencé par un ou plusieurs numéros d'objectifs affectés de leur niveau respectif. Insistons ici pour bien montrer que cette évaluation est adaptée à toutes les situations et pas seulement aux items fins comme le croient souvent ceux qui confondent l'évaluation par objectifs et la dérive possible de la pédagogie par objectifs. Dans le cas d'un problème, comme ceux qui sont proposés dans les examens classiques, il est tout à fait possible d'affecter les questions d'un niveau. Mais il y a pour cela plusieurs méthodes. Si les questions sont totalement indépendantes, à chaque question correspond un objectif et son niveau (qui dépend lui-même de l'apprentissage qui a été fait). Si les questions sont enchaînées et si nous affectons chaque question d'un objectif, nous ne pourrons valider ces objectifs qu'avec les élèves qui auront réussi les questions précédentes. Il ne faut donc pas proposer cette seule forme d'évaluation qui crée un échec bien inutile sur le plan psychologique. Ainsi lorsqu'il est nécessaire pour résoudre une question de faire appel à plusieurs connaissances, donc à plusieurs objectifs, il est essentiel de considérer ces objectifs comme des micro-objectifs d'un objectif plus général. Cet objectif ne peut être la somme des objectifs décomposés, car interviennent alors les relations entre les objectifs et l'obligation de gérer cet ensemble complexe. On voit souvent des élèves qui paraissent avoir résolu la partie la plus difficile d'une question, faire une erreur que l'on qualifie à tort d'étourderie alors qu'ils ont décroché parce que la gestion globale du problème est trop complexe pour eux.

La fonction sociale

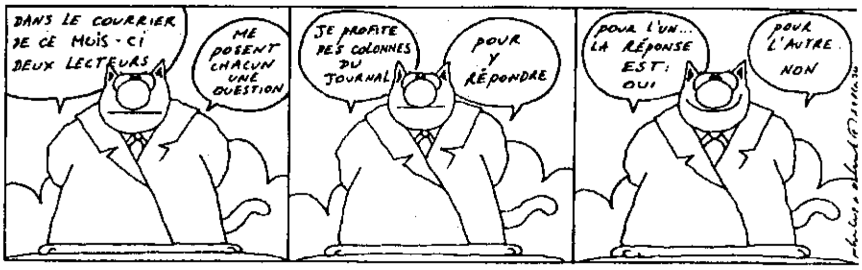
Pour remplir la fonction sociale, c'est-à-dire, pour que l'ensemble soit lisible par les parents, il reste à distinguer l'objectif testé de celui qui ne l'est pas encore. En effet, la liste est annuelle et les objectifs sont testés dans l'ordre de l'apprentissage; celui-ci n'est pas, bien sûr, l'ordre de la liste. Ainsi lorsque l'élève a reçu son contrôle, il marque par un trait horizontal (dans la colonne concernée) le fait que l'objectif a été testé.

Dire à l'élève d'inscrire une croix sous un trait horizontal est donc la certification que l'objectif a été atteint, cela est l'évaluation qui remplace les points attribués à la réussite d'un exercice. Chaque élève gère lui-même sa grille et nous en possédons un double.

Nous avons décidé de ne pas effacer une croix même si l'élève montrait dans un autre contrôle qu'il ne savait plus maîtriser la connaissance concernée. Rappelons que l'évaluation traditionnelle ne gère absolument pas ce cas. Et pourtant le problème est d'importance. Nous avons donc cherché à prendre un certain nombre de précautions : ne jamais tester la mémoire immédiate, ne jamais proposer de contrôles sans une période d'oubli et une réappropriation des connaissances. Quelle utilité y a-t-il à proposer un test sommatif si l'on se doute que seule la proximité de l'apprentissage permet de répondre aux questions. Ainsi nous laissons s'écouler un délai de trois semaines minimum entre le dernier apprentissage de la notion et l'évaluation sommative. Rien n'empêche, au contraire, d'accompagner l'apprentissage d'une évaluation formative. Il le faut, évidemment, mais cela n'est pas notre propos ici.

Pour apprendre, il faut déstabiliser le modèle que l'enfant a dans la tête. Si un contrôle a lieu pendant cette déstabilisation il est évident que certains enfants feront des erreurs là où ils n'en avaient pas fait précédemment. Pour garder un exemple déjà utilisé, si pendant un apprentissage sur l'addition des fractions on teste la multiplication des fractions nous risquons effectivement d'avoir des erreurs circonstancielles. Nous essayons d'éviter cette situation.

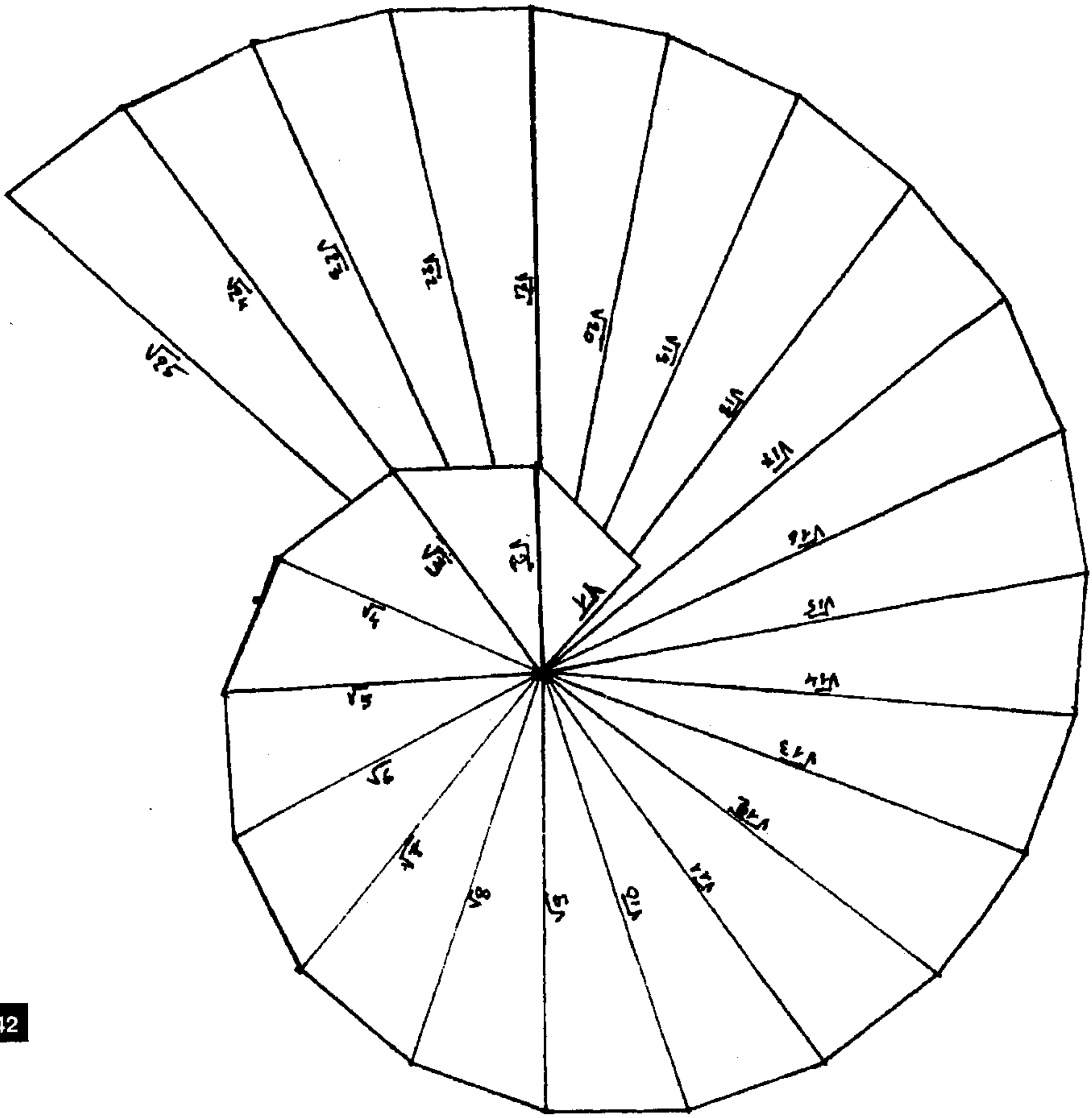
20 sur 20



La fonction pédagogique de l'évaluation est donc assurée par nos grilles. En dehors des spécialistes que nous sommes, et des principaux intéressés que sont les élèves et leurs parents, nous devons médiatiser nos renseignements. La note est alors une bonne globalisation de l'ensemble des résultats dont nous disposons. Encore faut-il établir un mode de calcul. Nous pensons que cette responsabilité devrait être assumée par l'institution. C'est elle qui autorise la différenciation de l'évaluation. A partir d'un profil attendu par l'enseignant de la part de ses élèves, il est possible d'attribuer une note qui mesure l'écart qui existe entre ce profil et la production de l'élève. Il est alors logique d'attribuer la note 20 au profil idéal défini. En affectant chaque objectif d'un coefficient égal à son niveau on tient compte ainsi à la fois de l'obligation d'atteindre tous les objectifs et de la graduation des difficultés surmontées par l'élève que l'on veut noter.

Précisons ce que nous entendons par la notion de profil. Actuellement, en collège, nous disposons de compétences exigibles qui nous permettent d'écrire la liste des objectifs mais nous avons très peu d'indications concernant les niveaux. Dans les lycées professionnels, et sans doute bientôt en classe de seconde, existent des référentiels qui définissent plus précisément les niveaux. Nous ne pouvons qu'extrapoler à partir des verbes d'action, lorsqu'ils existent, employés par l'institution

L'ESCARGOT DE PYTHAGORE



Pour $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$,... $\sqrt{25}$ il faut bien sûr, prolonger jusqu'au "centre"

Inconvénient : si l'on veut tracer un segment de longueur n avec n assez grand, c'est l'imprécision et le temps qu'il faut pour y parvenir.
Un escargot..... c'est lent.

PYTHAGORE, Super Star

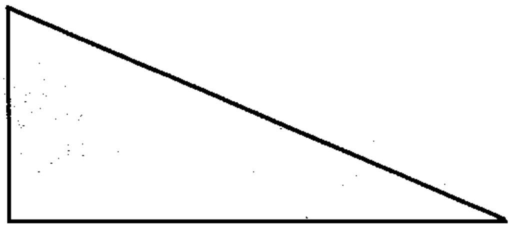
Suite et fin... provisoire

Serge Ducloux - Chécy

Toujours en appui de l'exposition "Pythagore"
(dans la série 12 panneaux,
12 manipulations pour la classe)
nous poursuivons ici
l'illustration pédagogique de ce thème
entreprise dans le PLOT 49.

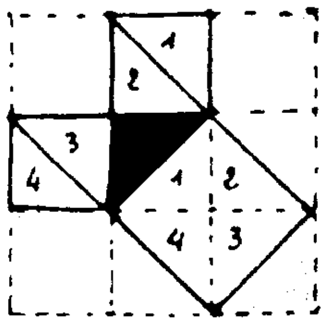
Le THEOREME de PYTHAGORE de SAMOS

$a^2 + b^2 = c^2$

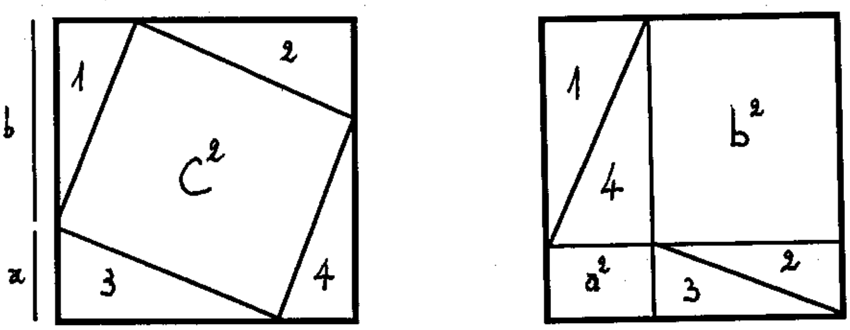


Le carré d' l'hypoténuse est égal si je n' m'abu-u-se à la somme des carrés des deux au-autres côtés.

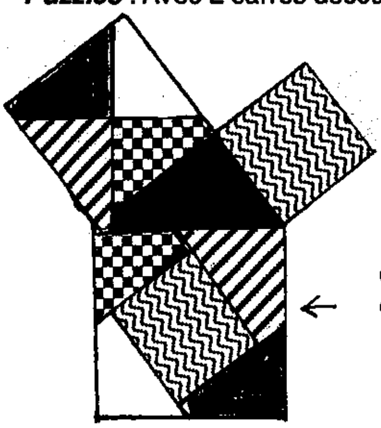
Preuves visuelles
cas particulier



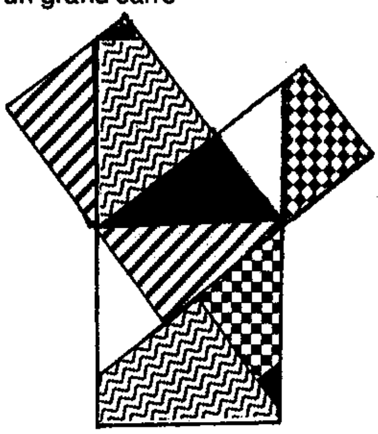
cas général



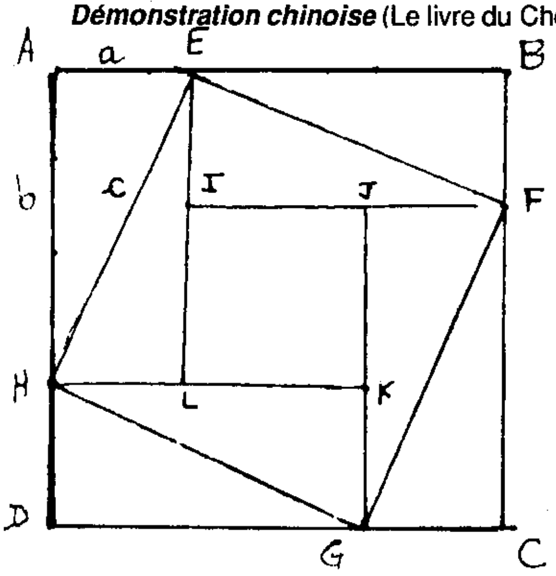
Puzzles : Avec 2 carrés découpés on reforme un grand carré



découpage
de Périgal



Démonstration chinoise (Le livre du Chou Pei Suan Kung 40 av. J.-C.)

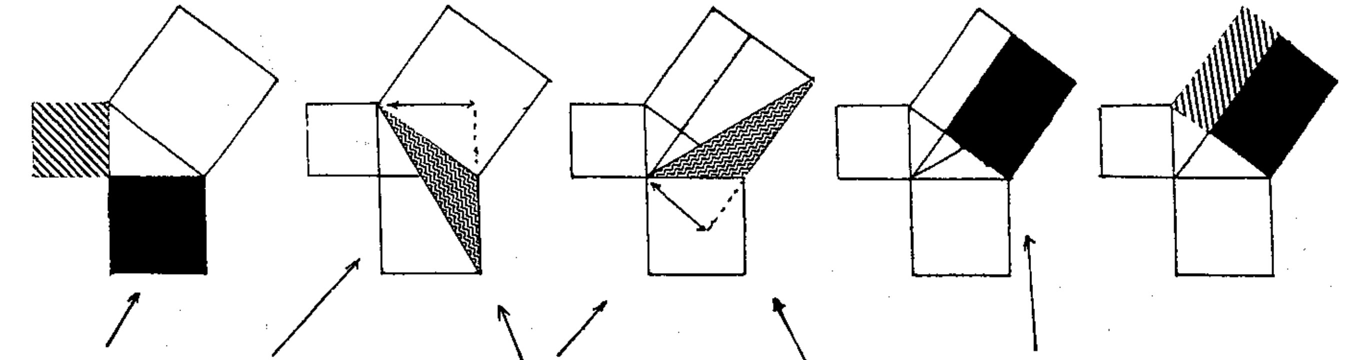


Aire ABCD = Aire EFGH + 4. Aire AEH
d'où Aire ABCD = $EH^2 + 2.AE.AH$
(Aire AEH = AE.AH/2)

or Aire ABCD = $(AE + EB)^2 = (AE + AH)^2$
D'où Aire ABCD = $AE^2 + AH^2 + 2AE.AH$.
Donc $EH^2 = AE^2 + AH^2$

Démonstration d'Euclide (300 av. J.-C.)

figure appelée : "Le Pont aux Anes" en France
et "figure de la mariée" dans les pays arabes.



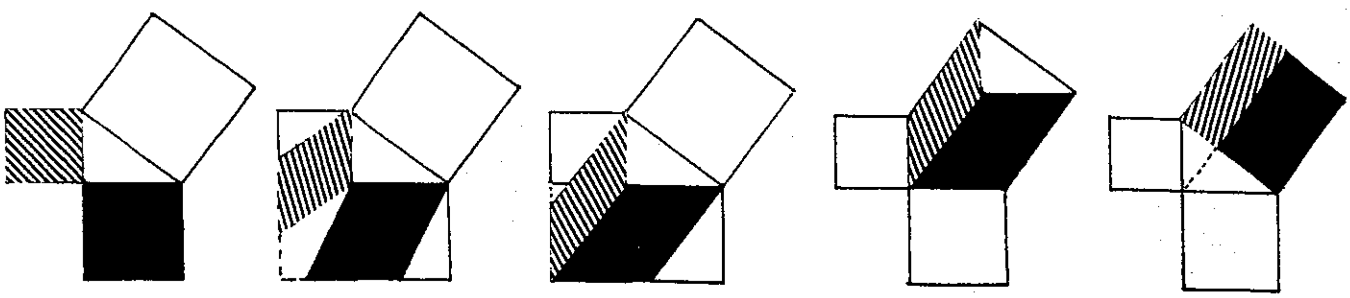
aire noire = 2 x aire hachurée

aires hachurée égales

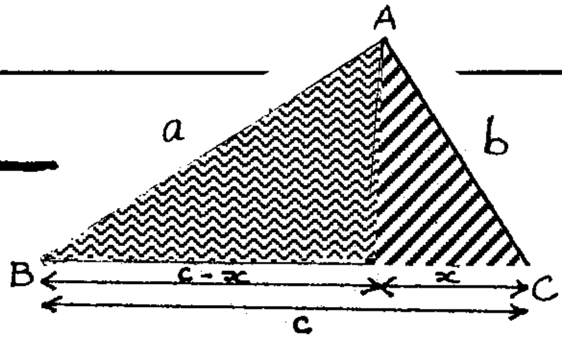
2 x aire hachurée = aire noire

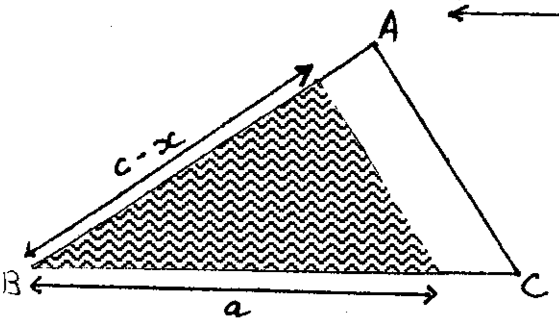
même conclusion pour aire hachurée

<u>démonstration de Baravalle (1945)</u>

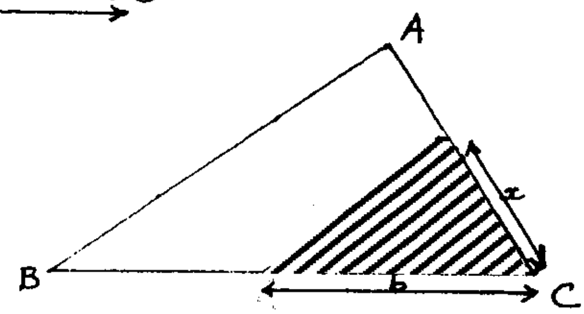


Autre démonstration





bonjour monsieur
THALES



$\frac{c - x}{a} = \frac{BA}{BC}$ or $BA = a$ et $BC = c$

d'où $\frac{c - x}{a} = \frac{a}{c}$

et $a^2 = c\,(c - x)$

$\frac{x}{b} = \frac{AC}{BC}$ or $AC = b$ et $BC = c$

d'où $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$

et $b^2 = cx$

Conclusion : $a^2 + b^2 = c^2$

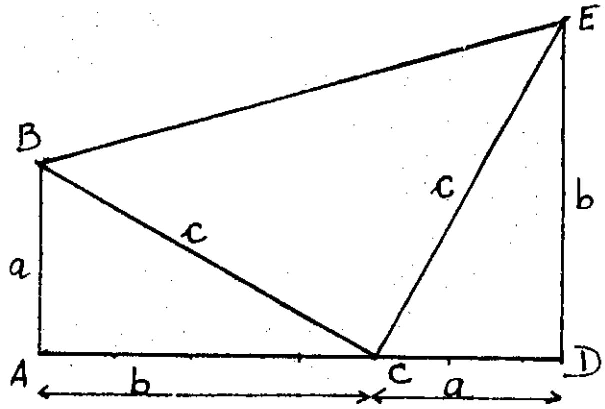
Démonstration de James A. Garfield (1876) élu président des Etats-Unis en 1880

* Aire ABED = Aire ABC + Aire BCE + Aire CDE

d'où Aire ABED $= \frac{1}{2}\,ab + \frac{1}{2}\,c^2 + \frac{1}{2}\,ab = \frac{c^2 + 2\,ab}{2}$

* or ABED est un trapèze rectangle de bases AB et DE et de hauteur AD

d'où Aire ABED $= \frac{(AB + DE)\,.\,AD}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$



* *conséquence*

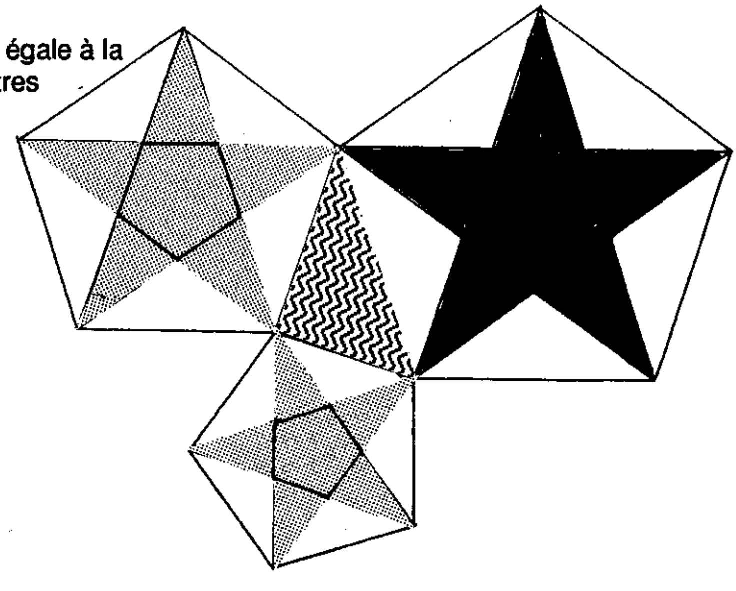
$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$

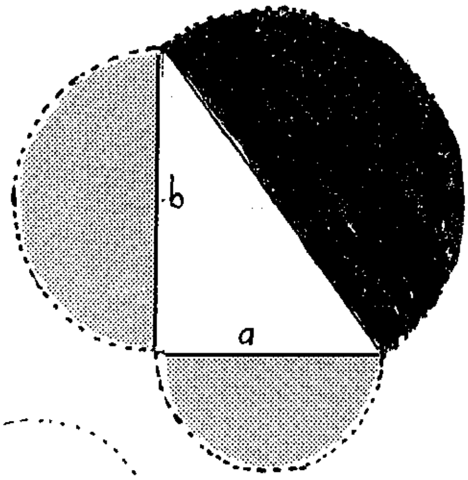
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$a^2 + b^2 = c^2$

Conséquence

* Aire du grand pentagone est égale à la somme des aires des deux autres



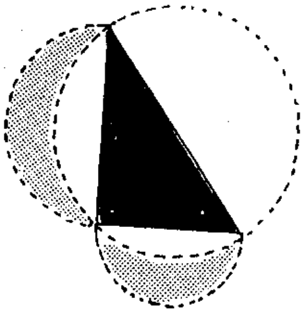


* Valable pour toute autre figure régulière triangle équilatéral... et aussi pour les demi-disques dont les diamètres sont les côtés du triangle :

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}c^2$$

or $a^2 + b^2 = c^2$

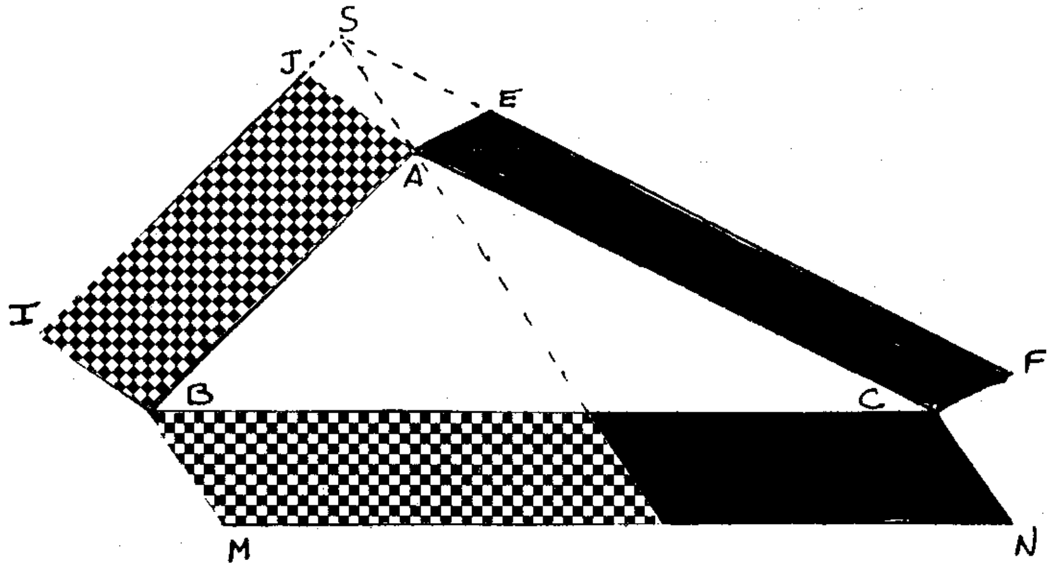


Les lunules d'Hippocrate de Chios (5e siècle av. J.-C.)

Aire des deux lunules = Aire du triangle

Le THEOREME de PAPPUS D'ALEXANDRIE (300 ap. J.-C.)

Généralisation du théorème de Pythagore



Enoncé : ABC est un triangle *quelconque*. On construit à l'extérieur, sur les côtés [AB] et [AC] deux parallélogrammes ABIJ et ACFE. Les droites (IJ) et (EF) se coupant en S.
On trace à l'extérieur, sur le côté [BC] le parallélogramme BCNM tel que BM = SA.
Æ Æ
Aire BCNM = Aire ABIJ + Aire ACFE

Démonstration : voir démonstration du théorème de Pythagore par Baravalle.

PENSEZ A VOUS RÉABONNER

Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1990

Nom et prénom
ou établissement ______________________

Adresse complète ______________________

Code postal et ville ______________________

Pour les 4 numéros de :
1983 ☐ 1988 ☐
1984 ☐ 1989 ☐
1985 ☐ 1990 ☐
1986 ☐ 1991 ☐
1987 ☐ 1992 ☐

École élémentaire ☐ Collège ☐ Lycée ☐ Supérieur ☐ Autre ☐

payé par chèque ☐
désire facture ☐
nouvel abonné ☐

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Supplément avion	. Total à payer
Pour un an	100 F	80 F	+ 40 F	
Par année supplémentaire	+ 80 F	+ 60 F	+ 40 F	

Co-abonnement : Si vous vous abonnez en même temps à **PLOT et à :**

	Tangente	Jeune Archimède	Tangente & J.A.	Supp^t. Avion	TOTAL
Pour un an	200 F	120 F	240 F	+ 80 F	
Par année supplémentaire	160 F	100 F	200 F		

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 90 -

Nom : ______________________

Adresse : ______________________

____

Facture ☐

* Plot n° 39 ☐ ou Géométrie dédéiste (Rouen) ☐

RÉDUCTIONS 10 % pour les abonnés au Plot pour plus de 600 F d'achat

Prix unitaire		Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40 F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique			
40 F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*			
40 F	Papiers accrochés			
40 F	Pliages et mathématiques			
40 F	Pavages et symétries			
80 F	Dossiers «Spécial I)» (300 p Adcs)			
40 F	Les Dossiers «Ludi-Math» (Poitiers)	n° 3	n° 4	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
	Affiches pour la classe : Format minimum 40 + 60 cm.		n°s	
10 F	1. Horizons Mathématique. 2. L'esprit informatique.			
10 F	3. Surfaces minimales. 4. Polyèdres dans l'espace.			
10 F	5. Pavage hyperbolique. 6. Pavage hyperbolique 2).			
20 F	7. Triangles 1 (20 F). 8. Triangles 2 (20 F).			
30 F	Pour envoi des affiches roulées dans un tube (en option)			
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur. n°s 1 à 14 (n° 4 ou 5 : 20 F)			
80 F	Pochettes de diapositives n°s 2 à 6 (n° 1 : 100 F) n°s			
80 F	Géode de Raoul Raba en kit (cf. Plot n° 39)			
	sous-total			
	-10 % pour les abonnés au PLOT -10 % pour plus de 600 F d'achat			
	Frais d'envoi forfaitaire			15 F
	TOTAL à Payer			

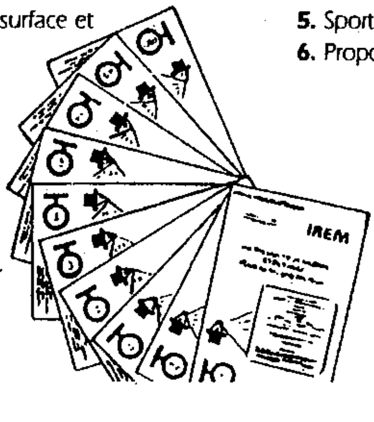
Règlement à envoyer à l'AMPEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

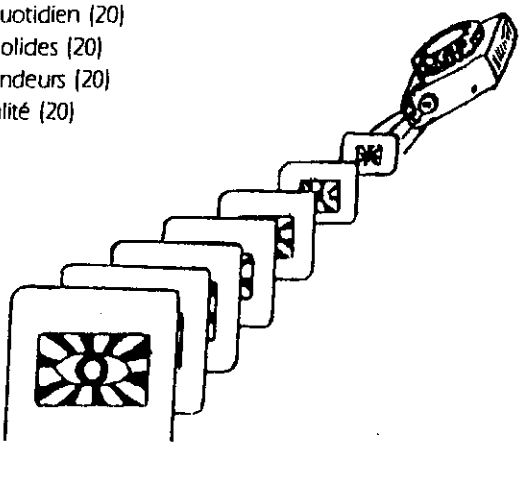
Liste des pochettes rétroprojecteurs

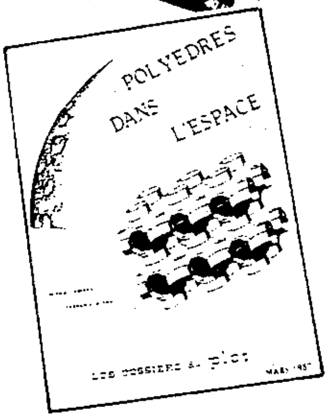
1. Instruments de mesure
2. Quadrillages
3. Calculs d'aires (et de volumes) de figures simples
4. Cercle trigonométrique
5. Partie entière, partie décimale. Unités de surface et de volume. Système international
6. Crible d'Erastosthène rétroprojectable
7. Illusions d'optique au rétroprojecteur
8. Triangle de Pascal au rétroprojecteur
9. Carte du ciel rétroprojectable
10. Treillis de diviseurs rétroprojectables
11. Propriété de Thalès au rétroprojecteur
12. Repérages dans le plan au rétroprojecteur
13. Théorème de Pythagore
14. Graphismes

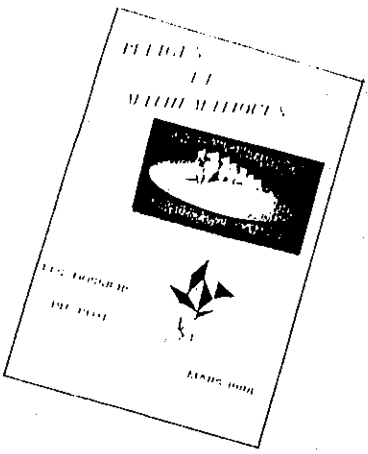
Liste des pochettes de diapositives

1. Logotypes (30 diapos)
2. Pourcentages (20)
3. Calculs au quotidien (20)
4. Autour des solides (20)
5. Sports et grandeurs (20)
6. Proportionnalité (20)









COMPLETEZ VOTRE COLLECTION DE PLOT

Pour les 800 nouveaux lecteurs du PLOT voici la liste des anciens numéros depuis 5 ans.
Le numéro : 25 F, les quatre numéros de l'année : 60 F. A vous de choisir !!
Pour commander, renvoyez cette feuille en entourant les numéros ou les années choisis et remplissez le bon de commande page 47.

1984

- N° 26 Les **transformateurs.** Deleporte-Bouteiller
  L'analyse vue de Dijon. GRAAFE
- N° 27 **Rétros** pour tous. Monsellier-Mirault
  La vie des Arbels. G. Chauvat
- N° 28 Chronique Australienne. rapport CIEM
  Réflexions d'un **technologue.** JC Patrat
- N° 29 L'ensemble fractal de Cantor. JP Delahaye
  Pliages et **polyèdres.** Nury-Duthilleul

1985

- N° 30 **Pliages** et accrochages. R. Raba
  Métamorphoses géométriques. J. Sauvy
- N° 31 Le prix de revient au kilomètre. P. Daudin
  La parallèle à une droite. JP Guichard
- N° 32 La France déformée. JB Touchard
  L'enseignement de la **géométrie.** E. Thépot
- N° 33 **Des rectangles** en tous genres. Groupe GEM
  Méthodes numériques en physique. JC Trigassou

1986

- N° 34 Langues et mathématiques. Inrap, Niamey
  Mu-Math pour la classe. JF Canet
- N° 35 Modèles erronés en **Collège.** M. Aubree
  Une idée de Pascal. R. Stowasser
- N° 36 Où est le centre de **la France**? J. Lubczanski
  Pilotage de micro-robots. M. Vivet
- N° 37 Dossier spécial **Aléatoire.** Chauvat-Darche

1987

- N° 38 **Cartographie.** P. Monsellier
  Mesures et dimensions. JP Kahane
- N° 39 Dossier spécial **«voir dans l'espace»** Darche, Blanc, Pallascio, Vignes,...
- N° 40 Spécial expo: **Faire des maths autrement** Mison, Guichard, Gauthier, Pagano, Patras
- N° 41 Dossier spécial: **Itérer pour approximer** Clinard, Darche, Olivier, Crépin, Parot, Cheick

1988

- N° 42 Dossier spécial **Symétrie** Lefort, Pérol, Stewart, Léger et BD
- N° 43 Spécial Congrès Apmep de **Loctudy** (1987) Serfati, Frattini, Berté, Verdier, Hennequin,...
- N° 44 Spécial expo **Horizons Mathématiques** Ebenhoh, Fischer, Aebischer, Lefort, Gauthier,..
- N° 45 Dossier spécial **Images et mathématiques** Emmer, Colonna, Delerue, Parzisz, Taurisson,...

1989

- N° 46 Dossier spécial **Collèges** Clinard, Métregiste, Fages, Provost, Gagneux,...
- N° 47 Mathématiciens en **Révolution.** IUT de Tours
  Quels profs pour demain. M. Dofal
- N° 48 Spécial congrès de **Rouen: la curiosité** Bourguignon, Bolon, Berté, Dusson, Delclaux
- N° 49 **Popularisation** des maths. Kahane, Howson, Pollak
  Pythagore s'expose au collège. S. Ducloux

Et n'oubliez pas, en plus, les Dossiers, Matériels et Affiches du PLOT

Une nouvelle affiche pour la classe: **Cercles et Sphères** (Poitiers)

prochain numéro 51

Spécial Lycée

- Changement de programme: Marcel Dumont
- Quand les profs tronquent: Bouteiller & Chauvat
- Evaluation en Seconde: Claudine Vidal
- Des complexes sans complexe: ENS d'Atakpamé
- Des fiches pour la classe: René Metregiste
- Itérer, itérarum: Michel Clinard
- Des maths en histoire-géo: Jacques Pinaud
- A vos calculettes: Yves Olivier
- Le Chaos à La Villette: Michel Darche