



Directrice de publication
Marie-Laure Darce-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Metrégiste

Rédaction
Michel Darce, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhèrent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**
Techniques Graphiques du Futur

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen et Clermont-Ferrand

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du
Centre National des Lettres et du
Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

Éditorial	1
Formes, vibrations et essais non destructifs. Jean-Pierre Bourguignon.....	2
Découverte de propriétés numériques par l'image. Pierre Goetgheluck.....	7
D'un problème à l'activité mathématique. Jean Aymes.....	11
Redonner confiance chez des adultes. Jeanne Bolon.....	17
Faire revivre la curiosité des élèves du secondaire... Annie Berté....	21
Reconnaître les erreurs. François Dusson.....	28
Enquête sur la curiosité. Hélène Delclaux.....	33
Les travaux d'Archimède en géométrie. Bernard Bettinelli.....	35
Le billard polygonal. Bernard Caumartin.....	36
L'espace en 2^de - 1^{ère}. Aimé Vogt.....	37
Petite géométrie dédéeiste. T. Hamel, F. Lachaux, G. Lemir, L. Sinègre.....	40
Organisation d'activité du type tournoi, rallye, olympiades....	
Daniel Fredon.....	42
Ressusciter la curiosité des élèves. Sylviane Gasquet.....	43

SUPPLÉMENT AU PLOT N° 48 : Le Jeune Archimède n° 1.

ÉDITORIAL

Ces journées de Rouen semblent aujourd'hui un lointain souvenir, mais le souvenir d'une belle aventure : 18 mois de préparation, 3 journées riches et intenses et puis la joie d'une certaine réussite.

Plus de 800 congressistes «curieux» ou «soucieux de curiosité» se sont déplacés. Des intervenants de spécialités très diverses ont animé les séances plénières et les ateliers. Le pari d'associer des mathématiciens professionnels a été tenu.

Ce numéro du Plot fera revivre l'atmosphère du congrès de Rouen et permettra à chacun de découvrir des ateliers auxquels il n'a pu assister.

Que chaque animateur ayant rédigé un compte-rendu soit vivement remercié ! Tous les documents n'ont malheureusement pas pu être publiés. Tout choix comporte, hélas, une part d'arbitraire.

La réalisation de cette brochure est entièrement le fruit du travail de l'équipe du Plot. Nous l'en félicitons et l'en remercions.

Pour la Régionale de Haute-Normandie,

Jacqueline COLLET

*Deux articles ont déjà été publiés dans le Plot n° 45 «Images et mathématiques» de décembre 88.
Bernard Parzisz : lire et écrire les dessins.
André Deledicq : les maths, un grand livre d'images.

INFO-DERNIÈRES : De nombreux abonnés ont eu la désagréable surprise de se voir rappeler à l'ordre pour se réabonner alors qu'ils l'étaient déjà. Qu'ils veuillent bien nous en excuser : Erreur humaine liée à l'informatique !!!

Une raison de plus pour que vous surveillez votre fin d'abonnement (par année civile) sur l'étiquette adresse et que vous vous réabonniez avant l'arrivée d'une, deux ou... trois lettres de rappel

Mer

FORMES, VIBRATIONS ET ESSAIS NON DESTRUCTIFS

Un aperçu de la géométrie de Riemann :
«peut-on entendre la forme d'un tambour ?»

Jean-Pierre BOURGUIGNON - Palaiseau

Reller la forme d'un objet à ses propriétés vibratoires.

Parmi les caractéristiques d'un ouvrage industriel figure son spectre de vibrations.

Parmi les illustrations possibles de la géométrie riemannienne (poursuivant l'œuvre de pionnier de C. F. Gauss, B. Riemann la fonda en 1854 dans sa fameuse leçon inaugurale, "*über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*"), nous avons choisi de présenter celle qui permet de relier les propriétés géométriques d'un objet, comme sa forme, à ses propriétés vibratoires. Il y a plusieurs bonnes raisons à cela. Tout d'abord cette illustration a un côté spectaculaire que l'on peut résumer dans la formule imagée "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?". Bien plus, dans la dernière décennie, elle a motivé les travaux de nombreux mathématiciens débouchant sur des résultats tout à fait importants (2). Enfin, les applications industrielles des phénomènes qu'elle recouvre ont connu des développements considérables : elles font en effet partie des méthodes d'essais non-destructifs. Nous y ajouterons personnellement une autre raison qui nous semble aussi importante : elle permet de bien mettre en valeur ce qu'est la modélisation d'un phénomène et ce que peut donner le point de vue d'un mathématicien confronté à celui d'un ingénieur devant un modèle donné.

Tout le monde se souvient d'avoir vu un cheminot frapper une roue de wagon avec un marteau pour "écouter" si celle-ci est fêlée. Il est possible d'appliquer des méthodes analogues à d'autres structures, même beaucoup plus complexes. Il s'agit d'analyser la réponse vibratoire d'une structure à une sollicitation pour déceler des modifications de sa géométrie (interne ou externe), en particulier pour savoir comment elle vieillit. C'est une des raisons pour lesquelles, chez les ingénieurs, l'idée s'est

* Il s'agit du titre d'une conférence donnée en 1965 par le physicien mathématicien américain Marc Kac, qui lui fut suggéré par son collègue Lipman Bers. (3).

■ Jean-Pierre Bourguignon est directeur de recherche au Centre de mathématiques, UA 169, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex. Ses travaux portent plus particulièrement sur la géométrie riemannienne et l'analyse globale et leurs relations avec la mécanique et la physique théorique.

répandue que, parmi les caractéristiques d'un ouvrage après construction, figure son spectre de vibrations. (Ici, nous avons délibérément choisi de nous concentrer sur des méthodes globales et exclu de notre champ d'investigation les méthodes de balayage par auscultation ultrasonique ou par radiographie qui permettent de détecter des pailles dans un objet ou une structure).

La musique des cordes vibrantes

Il faut d'abord préciser ce que nous appelons la réponse vibratoire. L'image d'un instrument à cordes permet de s'en faire une assez bonne idée en mettant en relief deux points importants : d'abord l'existence d'ondes stationnaires qui correspondent à un son pur faisant apparaître des ventres et des nœuds, ensuite le fait que l'instrument n'entre en résonance avec la sollicitation que pour certaines fréquences bien déterminées. (A ce propos, bien qu'il ait plus d'un siècle, le livre de J. W. Strutt, baron Rayleigh, *The Theory of Sound*, se lit toujours avec intérêt).

Prenons le modèle simple d'une corde vibrante de longueur L , maintenue fixe à ses deux extrémités. Ses petits déplacements transversaux dépendent du point de la corde que l'on peut repérer par sa distance à une extrémité. Ils sont solutions de l'équation des ondes (voir encadré 1) qui incorpore les caractéristiques de la corde, les conditions aux limites (exprimant que la corde est fixée aux deux extrémités) et s'il y a lieu la sollicitation extérieure.

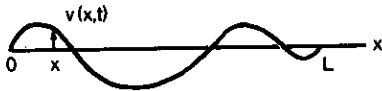
Les solutions stationnaires sont celles qui permettent de séparer l'influence du temps et de l'espace. C'est précisément pour celles-ci que l'on peut immobiliser la corde au stroboscope.

Il est connu, depuis Mersenne en 1636, que l'équation n'admet de solutions non partout nulles que pour des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale dont le carré est proportionnel (dans le cas d'une corde homogène) à la tension de la corde et inversement proportionnel à sa densité et au carré de sa longueur, d'où la possibilité pour le violoniste ou le guitariste de moduler la hauteur du son en raccourcissant la corde.

Le son est obtenu comme superposition du son fondamental et de ses harmoniques dont les

Les cordes et l'équation des ondes

Le déplacement transversal de la corde est représenté par une fonction $v(x,t)$ du temps t et de l'abscisse x du point qui satisfait à



l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

où τ est la tension de la corde et ρ sa masse linéaire.

Si la corde est fixée aux extrémités, la fonction v satisfait aux conditions aux limites

$$v(0,t) = v(L,t) = 0.$$

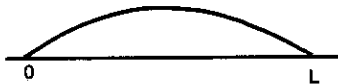
Les vibrations stationnaires sont alors obtenues en cherchant des solutions de la forme $\exp(i\Omega t)V(x)$ qui séparent les influences des variables d'espace et de temps. La fonction V est solution du problème de Dirichlet

$$-\frac{d^2V}{dx^2} - \Omega^2 V = 0, \quad V(0) = V(L) = 0.$$

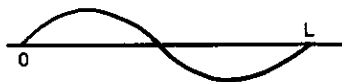
La fréquence fondamentale ν est donnée par

$$\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2} \Omega^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\tau}{\rho L^2}$$

Le déplacement pour la fréquence fondamentale est illustré ci-dessous



pour son harmonique double ci-dessous



avec apparition d'un nœud à la moitié de la corde.

fréquences forment une progression arithmétique.

Il est important de souligner que les caractéristiques physiques du système sont toutes contenues dans le coefficient de l'équation des ondes qui est variable si la corde est inhomogène. C'est ce coefficient qui fait le lien avec la géométrie en définissant une "métrique de Riemann" sur le segment de longueur L . C'est en cela que nous disons que le modèle mathématique, extrêmement simple dans l'exemple traité ici, a "codé" la physique de la situation dans la métrique de Riemann. En une dimension, le seul invariant riemannien est la longueur et une courbe peut toujours se paramétrer par son abscisse curviligne. Pour une corde inhomogène, ce paramètre variera plus vite que la longueur physique dans les zones où la densité de la corde est plus faible.

Il n'est peut-être pas inutile de mentionner que les instruments à vent comme l'orgue ou la flûte, pour lesquels le phénomène physique produisant le son est différent, ressortent de modèles tout à fait analogues à une différence fondamentale près : les conditions au bord n'imposent plus nécessairement qu'aux extrémités du tuyau le déplacement s'annule (les mathématiciens appellent cela les conditions de Dirichlet), mais que sa dérivée s'annule si le tuyau est ouvert (on parle alors de conditions de Neumann). Cela ne change pas la fréquence fondamentale ni la propriété fondamentale de la musique unidimensionnelle, à savoir la belle régularité des fréquences propres qui sont toutes multiples de la fréquence fondamentale.

Passons donc au cas (qui est beaucoup plus intéressant mathématiquement) de la dimension 2, c'est-à-dire aux membranes vibrantes.

Les membranes vibrantes ou "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

Nous nous intéressons aux vibrations stationnaires d'une membrane tendue (un tambour, quoi !) qu'on suppose sans raideur. On la représente par un domaine D du plan. De la même façon que pour les systèmes à une dimension, nous disons que les caractéristiques physiques de la membrane (sa densité, sa tension éventuellement anisotrope) peuvent être incorporées dans la donnée d'une métrique de Riemann sur D .

Les fréquences des vibrations stationnaires apparaissent là aussi dans une équation faisant intervenir les dérivées secondes des fonctions définies sur le domaine par le biais de l'opérateur de Laplace. Elle s'obtient par séparation des variables à partir de l'équation des ondes. Les conditions au bord nécessaires pour bien poser le problème traduisent là encore le fait que la membrane est fixée sur son pourtour (on parle donc d'un problème de Dirichlet). On peut bien sûr considérer aussi des problèmes de Neumann, pour lesquels la condition au bord consiste à demander que la dérivée normale de la solution soit nulle, mais pour elles nous manquons d'analogie musicale.

La connaissance de la "musique du tambour D " n'est alors rien d'autre que celle des valeurs propres de ce problème de Dirichlet, qui sont les carrés des fréquences des vibrations stationnaires. (Nous les notons δ_j dans la suite). Nous voulons comprendre en quoi la géométrie du tambour influence cette musique. Pour nous ici, la géométrie est concentrée dans la forme du bord, supposant en cela que la membrane dont est fait le tambour est homogène ainsi que la tension qui lui est appliquée. Dans notre

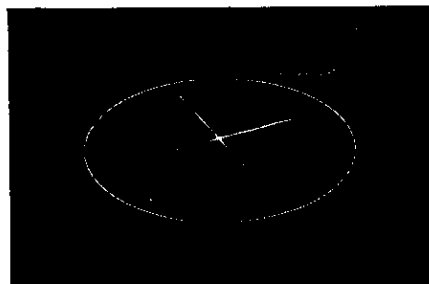


Fig. 1. Visualisation d'un mode propre de vibration d'ordre assez élevé d'un tambour modélisé par un calcul sur ordinateur. © EDF. Direction des études et recherches.

La musique des cordes est très régulière.

Comprendre en quoi la géométrie du tambour influence le son qu'il produit.

modèle, cela revient à prendre pour métrique de Riemann la métrique ordinaire du plan euclidien. Pour bien des résultats que nous allons donner, cela n'est en fait pas du tout nécessaire et beaucoup de preuves se font aussi simplement dans le cadre riemannien général (si on les prend bien !).

D'abord, comme pour les cordes, la collection des valeurs propres s'ordonne en une suite régulièrement croissante de nombres tendant vers l'infini, mais il n'est plus vrai, comme à une dimension d'espace, qu'elles s'ordonnent comme la suite des carrés de la fréquence fondamentale. (Les valeurs propres du problème de Neumann jouissent de la même propriété). On peut donc donner un contenu plus précis à la question de Marc Kac mentionnée précédemment. Lorsqu'on connaît la suite (δ_j) des valeurs propres, c'est-à-dire le son fondamental et ses harmoniques, peut-on retrouver la "forme" du tambour D ? En fait, bien des informations géométriques intéressantes sont cachées dans cette suite. Grâce à une formule asymptotique obtenue en 1949 et d'ailleurs valable pour toutes les surfaces de Riemann fermées, on peut retrouver l'aire A du tambour D ainsi que la longueur L de son bord, mais aussi le nombre G de ses trous. Cette formule s'énonce :

$$\sum_1^t e^{-4\pi t \delta_j} \sim At^{-1} + Bt^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(1-G)t + \dots$$

En fait, la détermination de A à partir de la donnée des δ_j remonte à Hermann Weyl en 1915 qui répondait par cela à une question posée en 1910 par le physicien A. Lorentz (voir aussi Poekels, Teubner 1891). De nombreuses et très importantes extensions de cette formule ont été données récemment. Elles ont eu des conséquences de première grandeur dans divers domaines des mathématiques.

A ce point, il est important de souligner que le membre de droite du développement donné plus haut n'est pas affecté par la méconnaissance d'un nombre fini de δ_j , mais qu'au contraire rien ne peut être dit sur lui si l'on ne connaît qu'un nombre fini d'entre eux. Or l'oreille, comme tout instrument de mesure physique, n'apprécie qu'un nombre fini de ces fréquences propres, et encore ne le fait-elle qu'avec une marge d'incertitude ! On voit donc là l'idéalisation que représente la donnée de tous les δ_j , même éventuellement sauf un nombre fini. Ce point fait assez bien sentir une des différences fondamentales entre un problème de nature mathématique et son correspondant physique ou mécanique.

Il n'en reste pas moins que le problème général de savoir si la connaissance des nombres (δ_j) , le spectre de la variété riemannienne, permet de la caractériser est un important problème mathématique. Ce problème d'isospectralité a connu des progrès récents tout à fait intéressants. Ainsi, J.W. Milnor a fourni en 1964 un exemple de deux métriques sur des tores de dimension 16 (le produit de seize cercles) ayant le même spectre. D'autres exemples ont été obtenus en 1980 par A. Ikeda en géométrie sphérique (des quotients de la sphère ronde à cinq dimensions par des groupes qui généralisent les groupes cristallographiques), et par M.F. Vigneras* en géométrie hyperbolique avec des surfaces de Riemann intéressantes en théorie des nombres.

* On trouvera dans le n° 59 du *Courrier du CNRS* une interview de cette mathématicienne.

Ces éléments de réponse à la question de M. Kac sont malgré tout des objets localement isométriques. Ils appartiennent en effet tous, soit à la géométrie euclidienne (c'est le cas des tores de Milnor qui sont localement euclidiens), soit aux deux autres géométries riemanniennes-modèles : la géométrie sphérique, indispensable pour faire de la cartographie, et la géométrie hyperbolique qui ne vérifie pas l'axiome des parallèles d'Euclide (son existence avait soulevé des controverses jusqu'au siècle dernier et a joué un rôle tout à fait important dans la motivation de B. Riemann). Ce sont ces trois géométries qui possèdent le plus de symétries, et leurs groupes d'isométries jouent un grand rôle dans la géométrie moderne.

N. Ejiri en 1979 et C. Gordon en 1983 ont fourni des exemples qui ne sont pas localement isométriques. Cette dernière a même exhibé une infinité de métriques dépendant d'un paramètre sur des espaces de dimension 5 qui ont toutes le même spectre sans être isométriques. C'est un mathématicien japonais, H. Urakawa, qui, en s'appuyant sur des calculs préalables en géométrie sphérique de P. Bérard et G. Besson, s'est approché le plus près d'une réponse (d'ailleurs négative) à la question posée par Marc Kac en construisant des domaines de l'espace euclidien R^4 qui ont même musique (ils ont en fait même spectre pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann). Outre d'être de dimension un peu grande, ils ont le défaut de ne pas avoir un bord lisse, car ils présentent des coins. Dans son article (3), Marc Kac remarquait déjà que la présence de coins modifie une bonne partie des raisonnements mathématiques appliqués aux tambours. Et justement la plupart des exemples physiques naturels ne possèdent-ils pas de coins !

Pour conclure ce paragraphe, il est sans doute intéressant de noter que tous les exemples qui ont été mentionnés sont en fait très spéciaux. Ils s'appuient tous sur la présence d'un groupe de symétrie géométrique qui permet de faire les calculs jusqu'au bout (voir encadré 3). Dans le cas général, on ne peut pas calculer effectivement toutes les valeurs propres d'une variété riemannienne, ne serait-ce qu'une seule d'ailleurs, par une formule explicite. Ainsi, même pour un triangle quelconque (ni équilatéral, ni rectangle), les valeurs exactes des fréquences propres ne sont pas connues, mais bien sûr on peut en trouver des valeurs approchées par des méthodes numériques.

L'inégalité de Faber-Krahn ou "graves sont les tambours ronds"

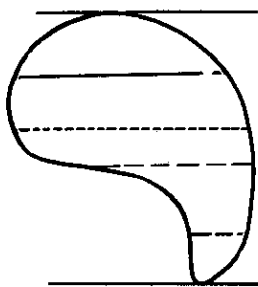
Après notre escapade dans l'infini, revenons aux informations géométriques qu'il est possible de tirer de la connaissance d'un nombre fini de valeurs propres. En fait nous allons rencontrer diverses inégalités dont certaines ont une longue histoire. Elles ont de très nombreuses applications tant dans les mathématiques proprement dites que dans divers domaines pratiques (nous y revenons dans le chapitre suivant). Elles sont souvent englobées sous le nom d'inégalités isopérimétriques. (Au moins deux monographies sous ce titre, (1) et (6), et deux articles de revue, (4) et (5), méritent d'être cités).

Celle sur laquelle nous voulons nous attarder un peu est l'inégalité prouvée indépendamment en 1923 par G. Faber et E. Krahn, mais qui se trouve déjà énoncée par Lord Rayleigh dans son

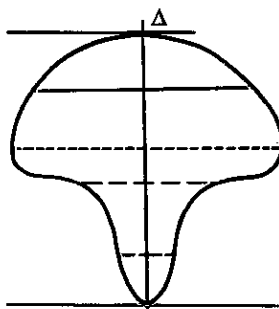
Connaître toutes les harmoniques du tambour permet de déterminer le nombre de ses trous.

Hors d'exemples spéciaux, on ne sait pas calculer explicitement le spectre d'un domaine.

Symétrisation d'un domaine plan



Un domaine D du plan

Son symétrisé par rapport à la direction de droite Δ

Pour construire le symétrisé de D, on porte le long des droites perpendiculaires à Δ des segments symétriques par rapport à Δ de longueur égale à la longueur du segment de cette droite intérieur à D.

Le symétrisé de D a même aire que D, et donc même masse. Si on réitère la symétrisation par rapport à d'autres directions de droite Δ , on obtient très vite un domaine presque circulaire (pratiquement après moins d'une dizaine d'itérations).

Traité fondamental sur la théorie du son. Elle s'énonce très simplement : "pour tout tambour D de forme quelconque, le produit de son volume par le carré de sa fréquence fondamentale est plus grand que la même quantité évaluée pour un tambour rond. De plus, l'égalité ne peut avoir lieu que si le tambour D est rond." Ainsi, en écoutant un tambour dont on connaît l'aire, on peut reconnaître s'il est rond.

Insistons à nouveau sur le fait que nous avons modélisé la situation, c'est-à-dire que nous avons fait rentrer toutes les caractéristiques physiques de la situation dans la métrique qui sert à définir ce problème de Dirichlet. C'est ainsi que l'aire du domaine dont il est question contient en elle la tension et la densité de la membrane tout autant que sa taille physique. Quelques commentaires sur la preuve de ce résultat ne sont probablement pas déplacés ici, dans la mesure où ils mettent en évidence comment la géométrie peut intervenir dans ce genre de problèmes a priori analytiques. A ce sujet, citons d'abord Rayleigh pour constater que la nécessité d'une preuve mathématique d'un tel résultat n'est pas toujours apparue comme évidente. A la page 339 de son traité, on peut en effet lire : "Nous avons vu que le son fondamental d'une membrane de bord à peu près circulaire est sensiblement le même que celui d'une membrane comparable mécaniquement qui a la forme d'un cercle de même surface. Si l'aire d'une membrane est donnée, il y a évidemment une forme du bord pour laquelle le son fondamental est le plus grave possible et cette forme ne peut être autre que le cercle. Dans le cas où le bord est presque circulaire, une preuve analytique peut en être donnée..." La bonne conjecture était ainsi avancée, mais le travail mathématique restait à faire.

Les preuves données par Faber et Krahn sont similaires et font toutes deux appel à une notion géométrique importante, la symétrisation (voir encadré 2), qui a trouvé de nombreuses applications dans ce domaine d'analyse géométrique (2). L'idée est simple : si on remplace un domaine D du plan de forme quelconque par un domaine obtenu à partir de D par symétrisation, alors sa fréquence fondamentale diminue tandis que par construction son aire reste inchangée. En recommençant cette construction par rapport à des directions de droites différentes, le

domaine D ressemble de plus en plus à un disque*. Pour terminer la démonstration, il faut ensuite un argument de convergence un peu délicat à mettre en œuvre (ce dont Rayleigh, en physicien averti, déclarait pouvoir se passer !) et l'inégalité isopérimétrique géométrique classique ("de tous les domaines du plan ayant une aire donnée, le disque est celui qui a le plus petit périmètre").

Cette inégalité n'est pas spéciale à la dimension 2 et s'étend aux domaines de l'espace euclidien de toutes dimensions.

Il est certainement bienvenu de signaler qu'il existe une inégalité analogue pour les valeurs propres du problème de Neumann, mais elle va en sens contraire. En effet H.F. Weinberger a montré en 1956 que la fréquence fondamentale pour le problème de Neumann (comme si la membrane pouvait glisser sur le corps du tambour) de tout domaine du plan est toujours plus basse que celle d'un tambour rond. L'égalité est là encore caractéristique du tambour rond. (Cela souligne à quel point il est vital dans la modélisation d'avoir une description adéquate des conditions aux limites et de les prendre comme partie intégrante des équations définissant le problème).

Un résultat analogue a été prouvé par un mathématicien suisse, J. Hersch, en 1970 pour toute métrique riemannienne, aussi bosselée soit-elle, sur la sphère de dimension 2. Cela indique que les surfaces sans bord ont pour les estimées de leur première valeur propre non nulle un comportement plus proche du problème de Neumann des domaines à bord que du problème de Dirichlet. Des généralisations à toutes les surfaces de Riemann ont été données par deux mathématiciens d'origine chinoise travaillant aux Etats-Unis, P. Li et S.T. Yau.

Il existe d'autres inégalités sur les modes de vibration, par exemple certaines portent sur la première valeur propre du système d'équations aux dérivées partielles décrivant les vibrations stationnaires d'un milieu élastique incompressible, système dont l'intérêt mécanique est évident.

* Une illustration interactive de cette inégalité ainsi qu'un film se trouvent dans la salle de mathématiques de la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette qui vient d'ouvrir.

Après symétrisation, la fréquence fondamentale d'un domaine diminue.

Fréquences fondamentales de certains domaines simples (d'aire unité)

(Illustration numérique de l'inégalité de Faber-Krahn)

Cercle	$2,404 \times \sqrt{\pi} = 4,261$
Carré	$\sqrt{2} \times \pi = 4,443$
Quadrant d'un cercle	$1/2 \times 5,135 \times \sqrt{\pi} = 4,551$
Secteur de 60° d'un cercle	$6,379 \times \sqrt{\pi/6} = 4,616$
Rectangle (rapport des côtés 2/3)	$\sqrt{13/6} \times \pi = 4,624$
Triangle équilatéral	$\sqrt{(9/\pi/6)} \times 2 \pi = 4,774$
Demi-cercle	$3,832 \times \sqrt{\pi/2} = 4,803$
Rectangle (rapport des côtés 1/2)	$\sqrt{5/2} \times \pi = 4,967$
Triangle isocèle rectangle	$\sqrt{5/2} \times \pi = 4,967$
Rectangle (rapport des côtés 1/3)	$\sqrt{10/3} \times \pi = 5,736$

On utilise des méthodes vibratoires pour suivre le vieillissement d'une structure.

La géométrie de Riemann intervient dans beaucoup de domaines des mathématiques et de leurs applications.

Essais non destructifs

Jusqu'à maintenant, nous avons d'une certaine façon eu une approche musicale en recherchant les résonances. Les inégalités que nous avons présentées et surtout leurs généralisations à des systèmes comme celui de l'élasticité servent aussi à s'assurer qu'une résonance extérieure d'une famille répertoriée (comme par exemple des vibrations provenant de l'environnement, voire même un micro-séisme) ne va pas pouvoir exciter une fréquence propre. On peut ainsi, par construction, en estimant le spectre d'un ouvrage complexe le mettre (avec une certaine fiabilité) hors d'atteinte de mouvements qui pourraient altérer la stabilité de son équilibre et conduire à sa destruction.

Comme nous l'avons dit, les essais non destructifs sont un domaine en grand développement car ils trouvent des applications industrielles extrêmement variées. Pour beaucoup de structures très coûteuses et dont la mise hors service entraîne des inconvénients majeurs pour leurs utilisateurs (par exemple un arbre d'alternateur dans une centrale électrique ou la coque d'un sous-marin), il est très important d'avoir une indication sur leur vieillissement. Ce mot recouvre en fait quelque chose de très complexe qui comprend à la fois l'état interne de la structure (état de contrainte par exemple), mais aussi l'assemblage de différentes parties de la structure entre elles ou les contacts avec l'extérieur (les fameuses conditions aux limites : ainsi pour l'exemple de l'arbre de l'alternateur un point sensible est l'état de la lubrification sur les paliers qui supportent l'arbre).

Les articles auxquels l'auteur a pu avoir accès montrent que les résultats actuellement disponibles sont essentiellement qualitatifs. Ceci est dû



Fig. 2. Pour suivre l'état mécanique interne d'une pale d'alternateur utilisé dans une centrale électrique, on la soumet périodiquement à des vibrations forcées. Une variation de sa réponse vibratoire indique la présence d'une anomalie, le plus souvent un début de fissure. © EDF, Direction des études et recherches.

aux difficultés à faire une modélisation pertinente de systèmes souvent complexes, mais aussi à l'absence des résultats mathématiques nécessaires. Quelques études quantitatives, en particulier pour estimer la taille de certaines fissures apparaissant dans une structure, ont cependant été menées.

De plus, ce domaine est en pleine révolution technologique à cause des possibilités de miniaturisation d'équipements électroniques qui sont aujourd'hui utilisables sur une vaste échelle. Il est tout à fait possible que la rapidité de ces progrès, en particulier la généralisation de l'utilisation de micro-processeurs, fasse passer au second plan les questions plus théoriques que nous avons essayé d'effleurer dans cet article. Ce serait dommage, car, de leur côté, les mathématiciens, et plus spécialement les géomètres riemanniens sont aujourd'hui mieux armés pour attaquer de tels problèmes. Il est probablement intéressant de souligner que ce mariage de la géométrie et de l'analyse qui a produit ce corps de connaissances nouveau a eu lieu pour des raisons essentiellement internes aux mathématiques, avec la volonté presque exclusive de résoudre des problèmes géométriques où une certaine esthétique joue un rôle déterminant. Mais les résultats sont là !

Les développements précédents sont seulement des exemples parmi d'autres permettant d'affirmer que la géométrie fondée par Riemann est devenue une branche à part entière des mathématiques. Non seulement, sa structure interne est suffisamment riche pour lui permettre de résoudre les problèmes qu'elle se pose à elle-même, mais elle a su se rendre utile à beaucoup d'autres sous-disciplines mathématiques ou non mathématiques. Si son omniprésence dans la physique théorique contemporaine qui traite des interactions fondamentales par le biais des théories de jauge semble un fait qui n'est plus disputé, dans d'autres domaines, d'application comme la mécanique des milieux continus, l'état des choses semble moins avancé, ce qui ne veut pas dire moins prometteur. La situation de la mécanique est en fait très contrastée, car, en ce qui concerne la mécanique analytique, son histoire se confond presque avec celle de la géométrie différentielle. De même, la mécanique céleste a été la source de nombreux travaux mathématiques. On peut imaginer que dans un proche avenir, cette dissymétrie pourra être atténuée. ■

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Bandle (C.), "Isoperimetric inequalities and applications"; *Monographs and studies in Maths* 7, Pitman (1981).
- (2) Bérard (P.), "Le spectre des vibrations d'une variété riemannienne"; *Le Courrier du CNRS*, supplément, Images des mathématiques 1985.
- (3) Kac (M.), "Can one hear the shape of a drum?"; *Amer. Math. Monthly*, 1966, n° 73, pp. 1-23.
- (4) Osserman (R.), "The isoperimetric inequality"; *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1978, n° 84, pp. 1182-1238.
- (5) Payne (L.E.), "Isoperimetric inequalities and their applications"; *S.I.A.M. Review*, 1967, n° 9, pp. 453-488.
- (6) Polya (G.), Szegő (S.), "Isoperimetric inequalities in mathematical physics"; *Ann. of Math. Studies*, 1951, n° 27, Princeton, Princeton University Press.

Le Centre de documentation scientifique et technique du CNRS propose de fournir aux lecteurs intéressés une bibliographie comportant les 100 références les plus récentes signalées dans la base de données PASCAL.

DÉCOUVERTE DE PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES PAR L'IMAGE

Pierre GOETGHELUCK - Orsay

1. NOTATIONS

Dans toute la suite, n et k désigneront des entiers vérifiant $0 \leq k \leq n$. On notera les coefficients du binôme

Pour un entier a positif, on dira que $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ est une représentation en base p de a si et seulement si

$$a = \sum_0^r a_i p^i, \quad 0 \leq a_i < p \quad (i = 0, \dots, r).$$

Par exemple 11 et 0011 sont des représentations en base 2 du nombre décimal 3. Cette convention nous permet d'utiliser pour n et k des représentations ayant le même nombre de chiffres.

Soient a et b deux entiers positifs,

$$a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0 \quad \text{et} \quad b_r b_{r-1} \dots b_1 b_0$$

des représentations binaires de a et b respectivement. Nous noterons

• $(a \text{ et } b)$ le nombre admettant la représentation binaire

$$c_r c_{r-1} \dots c_1 c_0$$

$$\text{avec } c_i = \text{Min}(a_i, b_i),$$

$$(i = 0, \dots, r)$$

• $(a \text{ ou } b)$ le nombre admettant la représentation binaire

$$d_r d_{r-1} \dots d_1 d_0$$

$$\text{avec } d_i = \text{Max}(a_i, b_i),$$

$$(i = 0, \dots, r).$$

Exemple :

Écriture décimale	écriture binaire
43	101011
25	011001
(43 et 25)	001001
(43 ou 25)	111011

Ainsi en notation décimale :

$$(43 \text{ et } 25) = 9$$

$$(43 \text{ ou } 25) = 59$$

2. UNE REMARQUE GÉOMÉTRIQUE ET SES CONSÉQUENCES

Le schéma de la figure 1 peut être obtenu de deux manières différentes :

1. Le point $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ est matérialisé par un point noir si et seulement si C_n^k est impair.
2. Pour chaque $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ on matérialise par un point noir le point $((a \text{ ou } b), (a \text{ et } b))$.

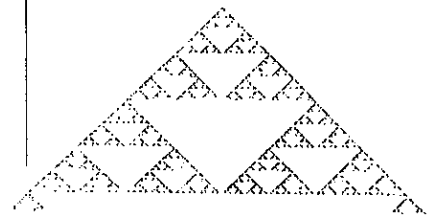
Nous sommes donc amenés à penser que :

R1 : C_n^k est divisible par 2 si et seulement si (n, k) n'est pas de la forme $((a \text{ ou } b), (a \text{ et } b))$.

Ce qui peut s'énoncer de façon équivalente sous la forme

R2 : soient n et k deux entiers positifs ($k \leq n$) et $n_r \dots n_0, k_r \dots k_0$ des représentations binaires de n et k respectivement. C_n^k est divisible par 2 si et seulement s'il existe i tel que $k_i > n_i$.

Quel est l'exposant de 2 dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers ?



La figure 2 montre les coefficients du binôme qui sont divisibles par 2 mais pas par 4 et la figure 3 montre ceux qui sont divisibles par 4 mais pas par 8. L'examen de ces dessins suggère qu'une raison mathématique sous-jacente doit expliquer leur régularité. L'étude d'une liste des couples (n,k) tels que C_n^k soit divisible par 2 avec indication de l'exposant de 2 dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers fait apparaître le phénomène suivant :

R3 : L'exposant de 2 dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers est égal au nombre de retenues dans la soustraction $n-k$ en base 2.

Une exploration expérimentale montre que R3 reste vrai quand on remplace 2 par un nombre premier p quelconque :

R4 : Soit p premier. L'exposant de p dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers est égal au nombre de retenues dans la soustraction $n-k$ en base p .

Ce résultat, trouvé expérimentalement, se démontre facilement.

3. ALGORITHME DE CALCUL DES C_n^k

Le résultat (R4) peut être exploité pour calculer l'exposant E de p (premier) dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers :

si $p \leq n^{1/2}$ on prend pour valeur de E le nombre de retenues dans la soustraction $n-k$ en base p ,
 si $n^{1/2} < p \leq n/2$ on prend $E = 1$
 si $n \pmod p < k \pmod p$
 et $E = 0$ sinon,
 si $n/2 < p \leq n-k$ on prend $E = 0$,
 si $n/2 < p \leq n$ on prend $E = 1$,
 si $n < p$ on prend $E = 0$.

On peut donc obtenir facilement la décomposition de C_n^k en facteurs premiers et en déduire sa valeur exacte par un calcul en multiprécision.

4. RÉPARTITION DES DIVISEURS PREMIERS DES C_n^k

Pour n fixé on porte p (premier) en abscisse et k en ordonnée et on matérialise le point (p,k) par un point noir si et seulement si C_n^k est divisible par p . La figure 4 montre ce que l'on obtient pour $n = 600$.

On remarquera que l'exposant E de p dans la décomposition de C_n^k en facteurs premiers vérifie

$$E = \sum_{i>0} [n/p^i] - [k/p^i] - [(n-k)/p^i]$$

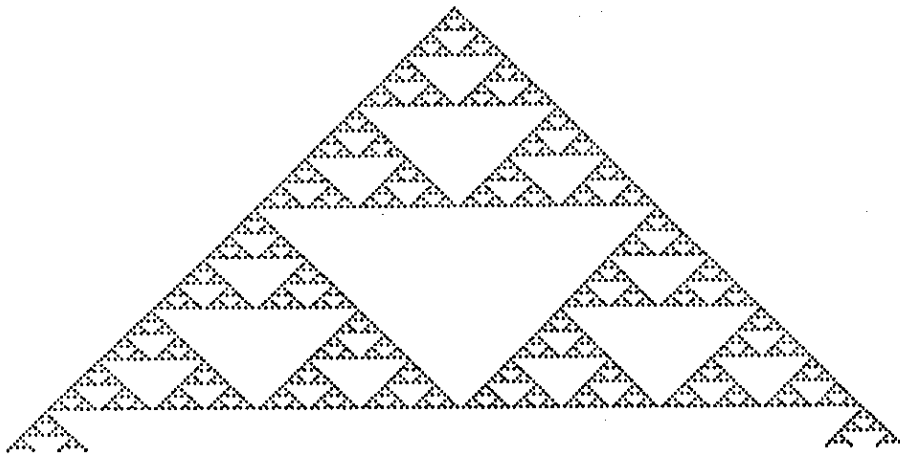


Fig. 1

8

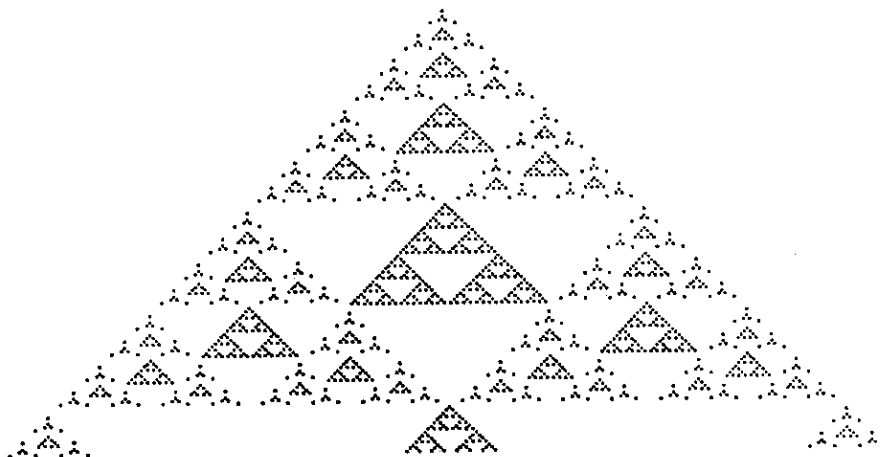


Fig. 2

et que pour tout i l'expression

$$[n/p^i] - [k/p^i] - [(n-k)/p^i]$$

vaut 0 ou 1.

Notons D_i l'ensemble suivant :

$$\{ (p,k) \in \mathbb{N}^2$$

$$| [n/p^i] - [k/p^i] - [(n-k)/p^i] = 1 \}$$

Il est clair que C_n^k est divisible par p si et seulement si

$$(p,k) \in \bigcup_{i>0} D_i$$

et que E est égal au nombre d'indices i tels que $(p,k) \in D_i$.

L'ensemble D_1 sera constitué de zones triangulaires limitées par les verticales $p = n, p = n/2, p = n/3...$ et les droites $k = p, k = 2p, k = 3p...$, $k = n-p, k = n-2p, k = n-3p...$

De même D_i sera limité par les verticales $p = n^{1/i}, p = (n/2)^{1/i}...$, et les courbes $k = p^i, k = 2 p^i, k = 3 p^i, ..., k = n-p^i, k = n-2 p^i, k = n-3 p^i...$

Le point (p,k) ne peut appartenir à D_i que si $p \leq n^{1/i}$; ainsi, pour $p > n^{1/2}$ les points de $\bigcup_{i>0} D_i$

sont les mêmes que ceux de D_1 . C'est ce qui explique l'allure de la figure 4.

5. QUELQUES REMARQUES

La figure 4 peut être exploitée pour montrer que pour n fixé et $0 \leq k \leq n/2$ le nombre $V(n,k)$ de diviseurs premiers distincts de C_n^k est en gros une fonction croissante de k admettant des irrégularités d'amplitude limitée (on peut encore le constater expérimentalement). Ce résultat a également été démontré de façon théorique en 1982 par P.A.B. Pleasants. On peut aussi retrouver sur cette image la formule asymptotique d'Erdős :

$$V(2n,n) \approx n (\ln 4) / (\ln n).$$

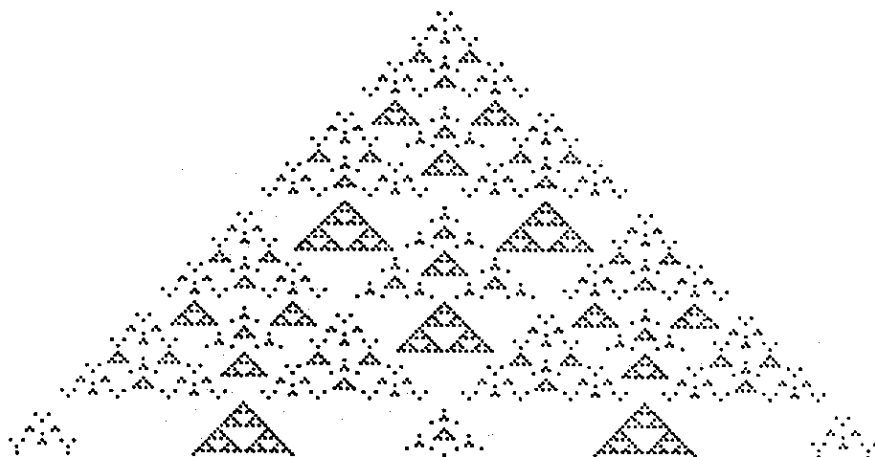


Fig. 3

Terminons sur une conjecture due à Erdős :

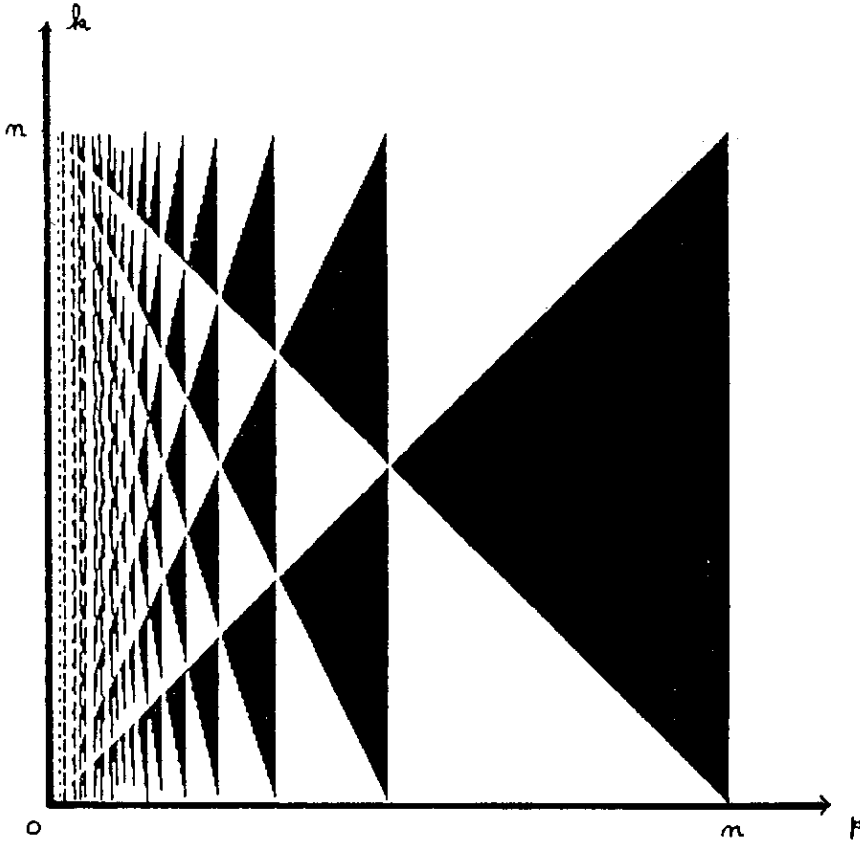
Pour $n > 4$ C_{2n}^k a toujours un facteur carré.



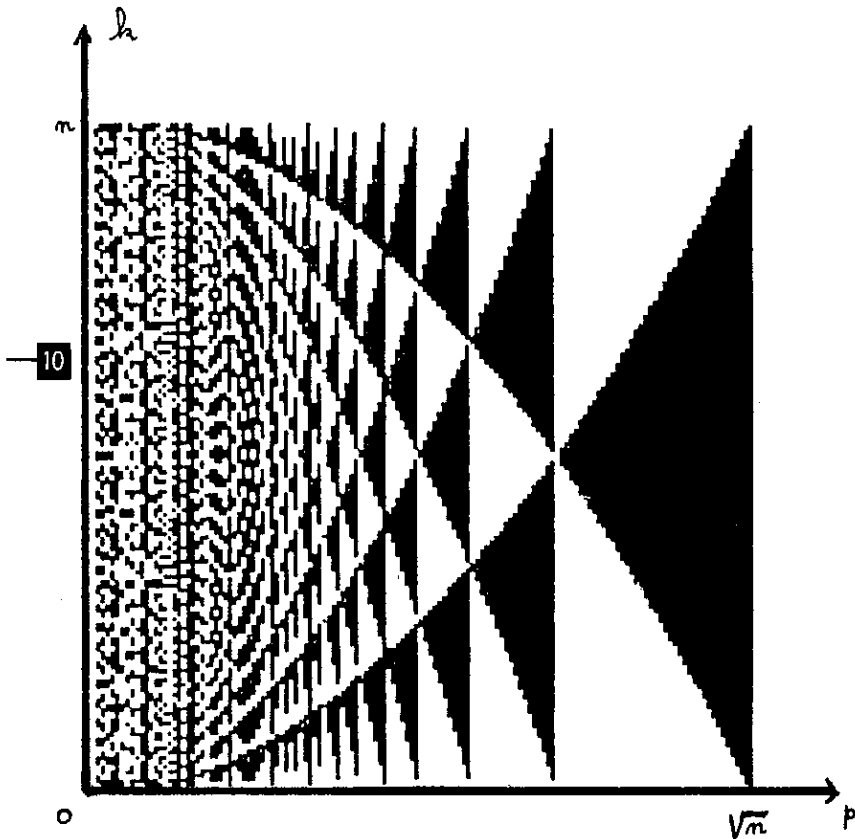
Fig. 4

Grâce à R4 on voit que cette conjecture est vraie si n n'est pas une puissance de 2. Si $n = 2^r$ la conjecture a été vérifiée pour $3 \leq r \leq 42205184$.

On sait de plus qu'elle est vraie pour $n \geq n_0$ (Sarközy 1985) mais on ne peut pas encore donner de valeur pour n_0 .



L'ensemble D_1 pour n très grand.



L'ensemble D_2 pour n très grand
(avec une forte dilatation en largeur)

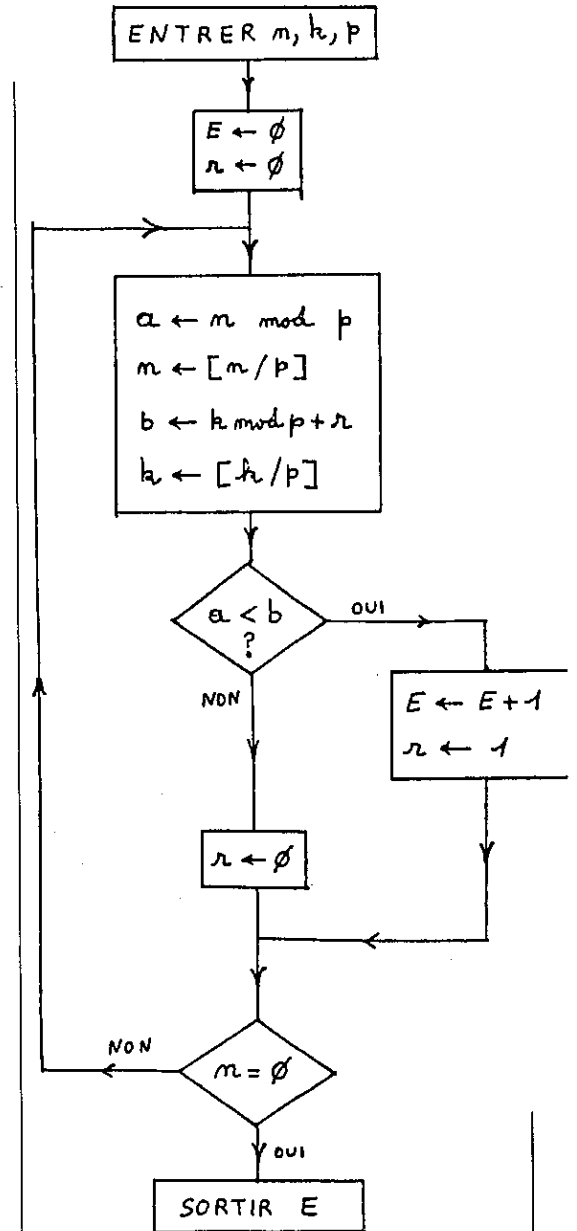


Fig. 5 - ALGO-1

ALGO-1.

1. Donner n, k, p .
2. $E \leftarrow 0, r \leftarrow 0$.
3. Répéter jusqu'à ce que $n = 0$:
 - a) $a \leftarrow n \bmod p, n \leftarrow [n/p],$
 $b \leftarrow k \bmod p + r, k \leftarrow [k/p].$
 - b) Si $a < b$ alors $E \leftarrow E + 1, r \leftarrow 1;$
sinon $r \leftarrow 0$.
4. Sortir E .

(voir aussi l'organigramme ci-dessus).
Cet algorithme est utilisable pour tout triplet (n, k, p) vérifiant
 $0 \leq k \leq n, p \leq n$.

D'UN PROBLÈME A L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Jean AYMES - Montauban

Nous avons montré comment un problème peut être le moteur d'activités mathématiques fécondes.

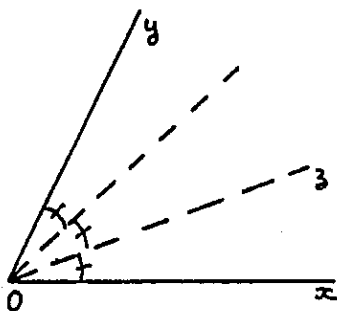
En partant du problème de la trisection de l'angle :

- nous avons rappelé quelques solutions historiques, dégagé l'évolution des conceptions.
- proposant des solutions, nous en avons fait des problèmes.
- nous avons relevé quelques problèmes apparus dans la résolution du premier et cité quelques exemples d'usages possibles en classe.

On trouvera ci-dessous, si on est curieux, un résumé de ces activités.

C E FUT UN GRAND PROBLÈME,
CE N'EST PLUS UN PROBLÈME,
CELA FOURNIT DES PROBLÈMES.

Il s'agit du problème de la trisection de l'angle, abordé par les Grecs, longuement cherché depuis. A l'origine leur impératif d'une solution par la règle et le compas, leur impuissance à le résoudre ainsi, vont être les leviers de nombreuses recherches : ce travail s'est poursuivi durant plus de deux millénaires.



Le problème :
Un angle xOy est donné,
construire une trisectrice Oz .

Un problème résolu :

La recherche de ce problème a jalonné, depuis le IV^e siècle avant J.C., la construction de nombreux concepts mathématiques : remise en question des outils règle et compas, statut des courbes, résolution des équations algébriques par exemple...

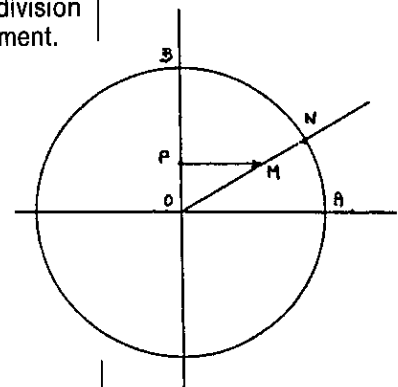
Elle est un foisonnement de propositions dont l'ingéniosité mérite parfois le détour, jusqu'à l'aboutissement obtenu avec le résultat de Wantzel en 1837 : l'impossibilité de construction par règle et compas.

Cela fournit des problèmes :

En remettant un peu nos pas dans ceux des Anciens, à relire leurs propositions pour résoudre le problème, on peut tirer matière à quelques énoncés de problèmes. En voici quelques exemples qui soulignent en gros l'évolution depuis le IV^e siècle avant J.C.

La plus ancienne solution connue.

Au IV^e siècle avant J.C. Hippias d'Elis propose une réponse ramenant la subdivision régulière du cercle à celle d'un segment.

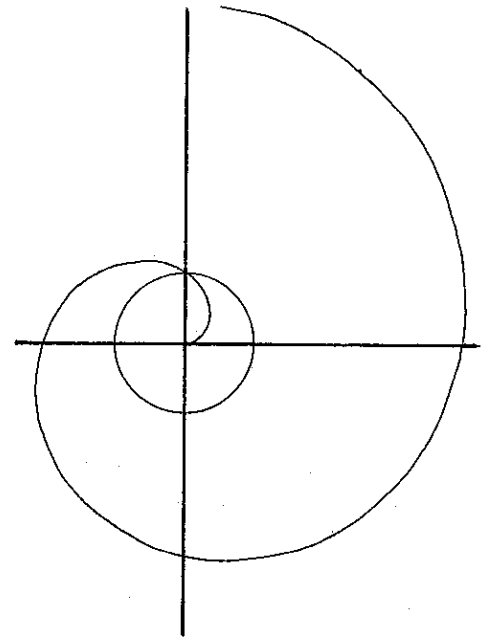
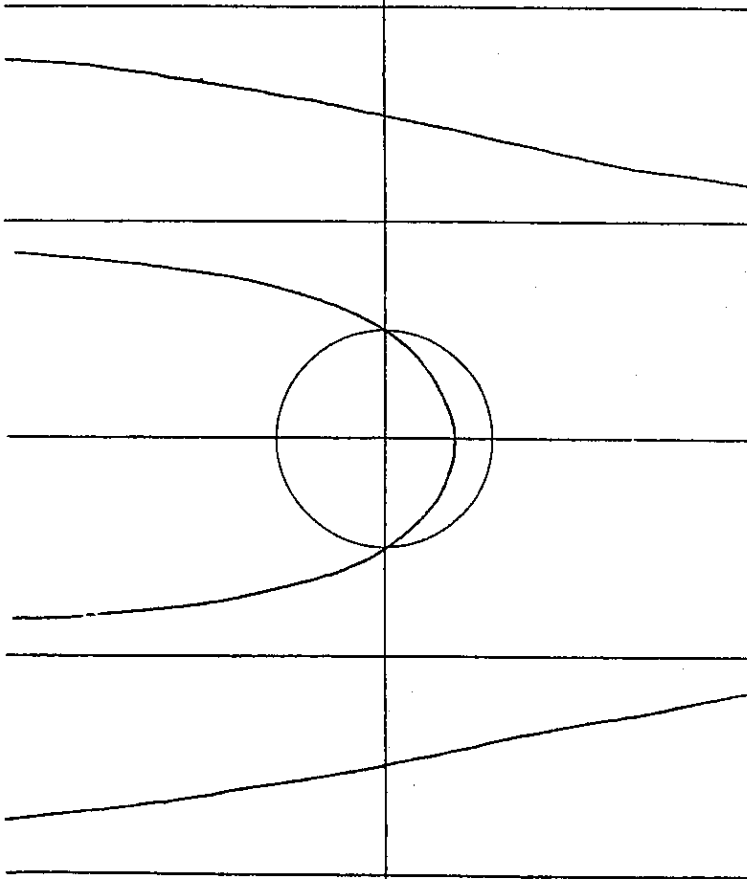


Un cercle C est donné avec deux rayons OA et OB perpendiculaires. Un point décrit (OB) uniformément, un point N décrit C uniformément avec coïncidence en B puis O en A .

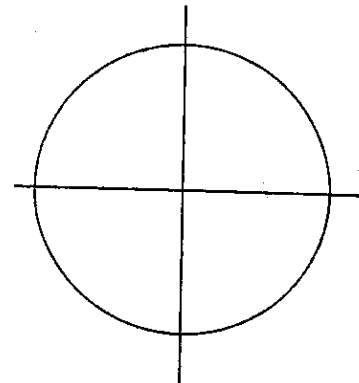
On considère M sur (ON) de même ordonnée que P : M décrit une courbe, la quadratrice.

Un problème :
La quadratrice étant fournie, construire une trisectrice d'un angle donné.

Un autre problème :
 La construction de la quadratrice : peut-on construire ses points à la règle et au compas ?



Et le problème semblable quant à la construction règle et compas des points de la spirale.



La quadratrice

Une solution due à Archimède (287-212 av. J.-C.).

Elle ressemble à la précédente dans son principe :

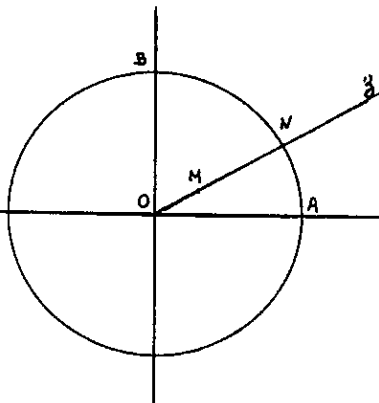
N parcourt le cercle uniformément aussi. M et N sont en même temps en O et A puis en B.

Le point M décrit dans ces conditions une courbe : la spirale d'Archimède.

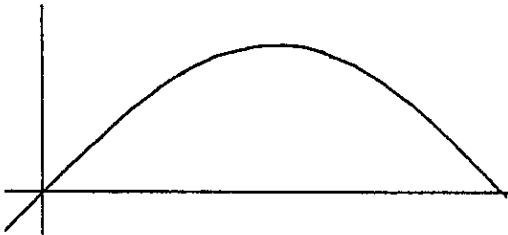
Un problème :
La spirale étant donnée, s'en servir pour faire la trisection d'un angle donné.

Les trisections reposent sur la correspondance entre la subdivision régulière du cercle et celle du segment : elles ont été traitées par deux courbes transcendantes, dont les points ne peuvent pas être obtenus à la règle et au compas, exception faite d'un sous-ensemble dense.

Cela n'a pu, du point de vue historique, que participer à la volonté de recherche des procédés plus... accessibles... Le tracé d'une courbe c'est aussi un problème : par exemple, on doit à A. Kempe (1849-1922) le résultat suivant : « toute partie bornée d'une courbe algébrique plane peut être tracée par un mécanisme articulé » (1875). (cf. Plot-dossier : systèmes articulés).

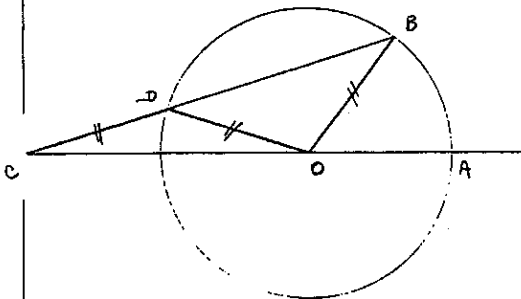


Dans la même veine, proposons de résoudre le problème avec une sinusoïde...



Où une configuration mérite d'être soulignée.

Dans ses «Euvres complètes», en la proposition VIII, Archimède met l'accent sur une configuration qui va être le point de départ d'un grand nombre de propositions pour la trisection.

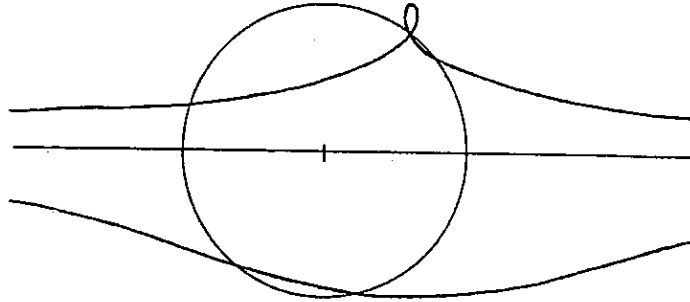


O, A, C alignés et C, D, B de même.
 OCD et ODB sont isocèles de sommets respectifs D, O et de côtés $CD = OD = OB$, dans ces conditions $\widehat{AOB} = 3 \widehat{ACB}$.

Comme il s'agit de trouver C, D, B connaissant O, A, B, on va voir avec quelle diversité peut s'exercer le comportement de «l'abandon de contraintes» si fécond dans les problèmes de construction...

Le point de vue de Nicomède (250 av. J.C.).

D fait partie :
 — d'une part d'un cercle fixe de centre O et de rayon $OA = OB$.
 — d'autre part d'une courbe ensemble des points D tels que $CD = OA$ sur (CB) lorsque C décrit (OA) : c'est la conchoïde de droite (de pôle B, de paramètre OA).



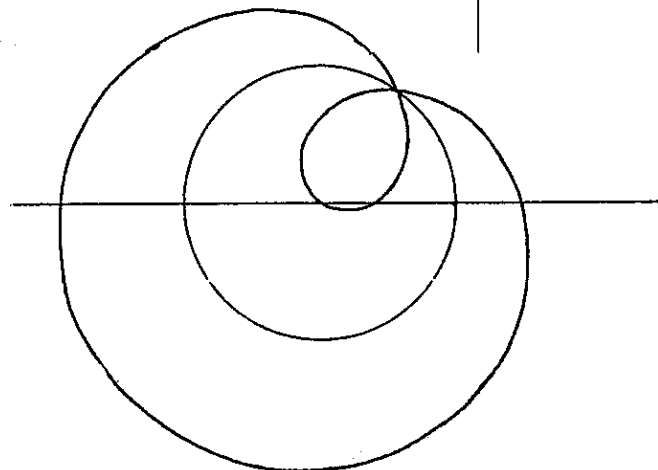
Cette courbe tracée, la construction est accessible.

Le point de vue, dual, d'Étienne Pascal (vers 1640).

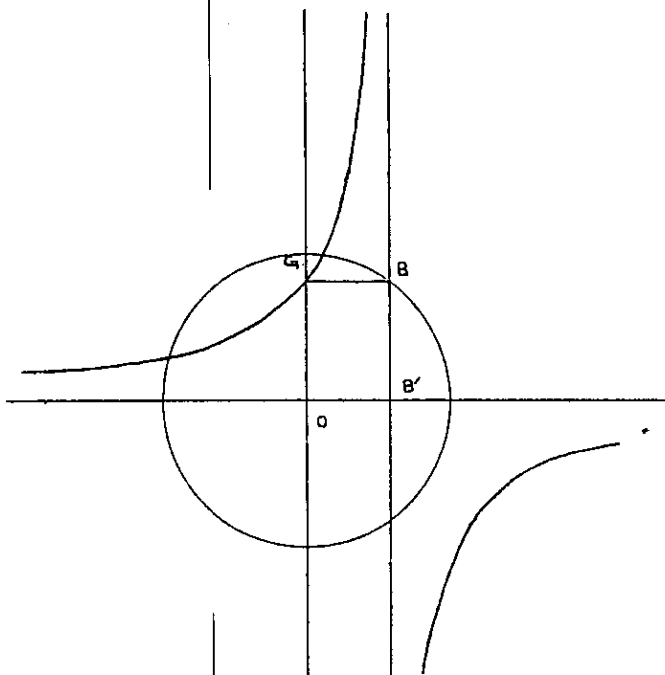
C fait partie :

— d'une part de la droite (OA)
 — d'autre part de l'ensemble des points C tels que $CD = OA$ sur (BD) lorsque D décrit le cercle de centre O de rayon $OA = OB$: le limaçon de Pascal (de pôle B, de paramètre $OA = OB$).

Le limaçon tracé, on en tire une construction.



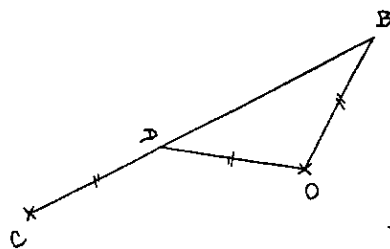
Cette hyperbole tracée, on fera la construction...



On trouve ici une solution ne faisant intervenir qu'un cercle et une hyperbole : essentiellement des courbes primordiales dans la géométrie des Grecs ; la conception à base d'aires est à remarquer : le rectangle (1) a la même aire que le parallélogramme CEGF, par addition de l'aire du rectangle construit sur EGB et la proposition 43 d'Euclide, on aboutit à la solution.

On gagne ainsi en simplicité des courbes mises en jeu ; mais notons que cette hyperbole dépend, comme la conchoïde et le limaçon, de l'angle à trisecter ; à chaque angle sa courbe... on peut souhaiter plus de commodité.

Où une seule courbe suffit pour tout angle.

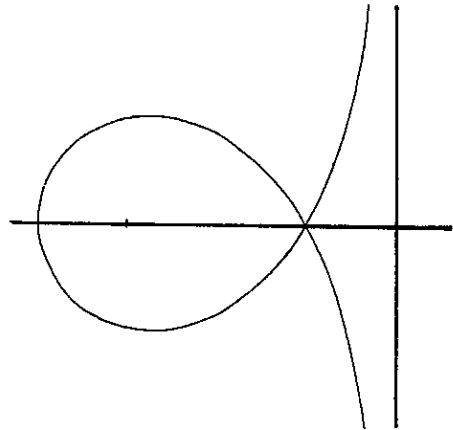


Une première proposition, due à Mac Laurin (1698-1746), reprend la configuration d'Archimède, pour envisager l'ensemble des points B lorsque C et O étant fixes, la distance commune $CD = DO = OB$ varie.

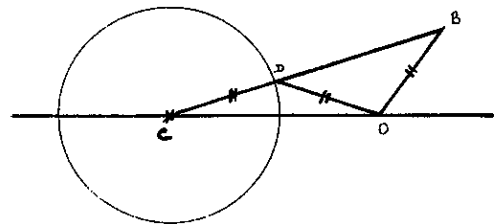
Il s'agit de la trisectrice de Mac Laurin.

Problème

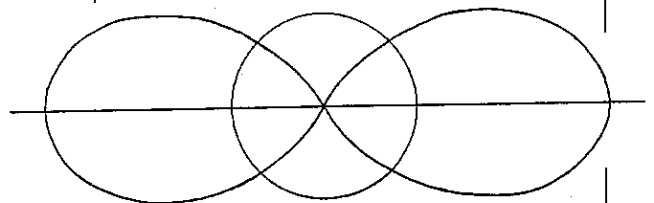
Se servir de la trisectrice pour trisecter !



Un deuxième point de vue, dû à Jean de Ceva (1648-1734), envisage l'ensemble des points B lorsque, C étant fixe, D décrit le cercle de centre C de rayon fixe, O varie sur la droite fixe diamètre du cercle.



On obtient une nouvelle... trisectrice... et une nouvelle construction.



Bibliographie (suite)

HEATH : Volume I. A history of Greek mathematics. DOVER 1981.

La trisection des angles : sur les solutions des Anciens. pp. 235 à 238 et pp. 235 à 244.

HABEGGER Philip : The trisection problem. NCTM 1968. Un court article récapitulatif.

IREM : Groupe Épistémologie et Histoire. Le chapitre Géométrie notamment : la méthode des aires, les grands problèmes chez les Grecs.

IREM DE TOULOUSE : Equations du troisième degré (1980) Equations du quatrième degré (1982). Deux brochures pour une analyse historique.

KLEIN Félix : Famous problems of elementary Geometry. New York - Dover - 1956.

PAPPUS D'ALEXANDRIE : La collection mathématique. Traduction Ver Eecke. Éditions Blanchard 1933. Diverses solutions de Pappus.

PLOT (revue éditée par la Régionale APMEP Orléans-Tours) Supplément : traceurs de courbes.

Une bibliographie assez complète.

Pliages et Mathématiques. Une trisection par pliages.

WANTZEL M.L. : Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de Mathématiques 1837.

YATES Robert C. : The trisection problem. NCTM 1971.

Statut théorique du problème, solutions au moyen de courbes, des trisecteurs mécaniques, des approximations, quelques exemples de solutions fausses.

Un assez large panorama.

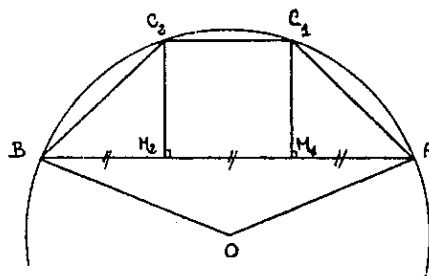
Problème :
Quelles doivent être les coordonnées du centre pour que la trisection soit faite ?

Avec ces deux dernières réponses, se font écho à travers les siècles deux méthodes résolvant la question avec des coniques seulement qui conviennent indépendamment de l'angle : une hyperbole, une parabole.

En outre, l'avancée dans la maîtrise des équations algébriques se fait jour : le problème à résoudre est une équation du troisième degré.

Quand Wantzel aura établi que les points constructibles à la règle et au compas correspondent à ceux dont les coordonnées sont algébriques sur \mathbb{Q} avec un degré puissance de 2, la preuve de l'impossibilité de la construction par règle et compas pour la trisection sera faite.

Ceci ouvre, à vrai dire, un nouveau problème : quels angles sont trisectables à la règle et au compas ?

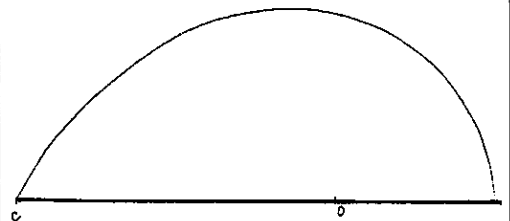


Où une moyenne fait à peu près l'affaire :
On doit à Albert Durer (1471-1528) une approximation de la trisectrice... Soit \widehat{AOB} angle au centre, M_1, M_2 trisectant le segment $[AB]$, C_1, C_2 sur le cercle et les perpendiculaires à (AB) respectivement par M_1, M_2 .

Albert Durer propose d'adopter la moyenne des trois cordes AC_1, C_1C_2, C_2B pour approximer la corde sous-tendant le tiers.

Problème :
Estimer numériquement l'erreur.
Quelle construction approchée cela permet-il ?

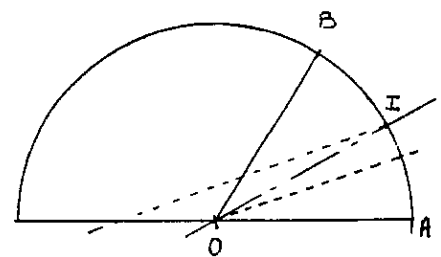
En approchant la trisectrice de Mac Laurin :
C'est d'Ocagne («L'enseignement mathématique» 1934) qui suggère d'approcher la trisectrice par un cercle.



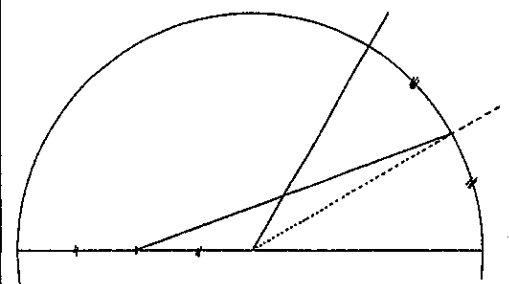
Avec les notations antérieures, envisager un cercle centré sur l'axe (OC) et coupant la trisectrice sur la perpendiculaire en O à cet axe.

Quel est ce cercle ?
Estimer numériquement l'erreur.
Quelle construction approchée cela permet-il ?

C'est, à peu près, très simple :
Il s'agit encore d'une proposition de d'Ocagne.
Un angle au centre \widehat{AOB} aigu étant donné, étudier l'intersection de la parallèle à une trisectrice par le milieu I de l'arc avec le diamètre $[OA]$.



Que dire alors du tracé ci-dessous comme construction de la trisectrice ?



Empruntons la conclusion à d'Ocagne : «Il ne me semble pas possible de pousser plus loin la simplicité de la construction».

REDONNER CONFIANCE CHEZ DES ADULTES

Jeanne BOLON - Versailles

Pourquoi cet exposé ?

Les étudiants avec qui je travaille en école normale ont mauvais souvenir de leur éducation mathématique, pourtant ce sont des étudiants d'un bon niveau (les deux tiers ont la licence ou plus). Ils acceptent, à la rigueur, d'enseigner les mathématiques à l'école élémentaire, parce qu'ils les considèrent «élémentaires»; de plus, beaucoup de «vocations» pour l'école maternelle sont la conséquence d'un rejet des mathématiques... J'enseigne également à des étudiants littéraires (Nanterre) dans le cadre d'un DEUG avec pré-professionnalisation intégrée: ils ne font des mathématiques que pour préparer le concours d'entrée à l'école normale.

Rejet, dégoût, contrainte..., le constat n'est pas nouveau. Déjà, Stella Baruk se moquait des professeurs de mathématiques dans son ouvrage «Echec et maths» particulièrement incisif et vengeur... Son deuxième livre «Fabrice ou l'école des mathématiques» moins polémique met en valeur l'effet désastreux chez des jeunes incertains sur l'image d'eux-mêmes, d'un «oh» d'horreur écrit en rouge sur une copie ou d'un commentaire «vous écrivez n'importe quoi»... Un exemple récent: une des normaliennes avec qui j'ai travaillé (35 ans), en difficulté en mathématiques, m'a remis un jour une rédaction pleine de quantificateurs et de flèches d'implication...: quand je lui ai demandé pourquoi elle s'était livrée à cette comédie, elle m'a répondu qu'elle ne supportait plus d'avoir des appréciations négatives sur ses devoirs, et qu'elle espérait, grâce au travail d'un copain plus «matheux» qu'elle allait enfin recevoir des encouragements!

Le but est donc pour la plupart des étudiants de survivre dans un système qui les oblige à subir des mathématiques...

Je vais donc décrire quelques procédés que j'ai personnellement utilisés. Ils ne sont pas nouveaux (cf. par exemple l'article de N. Rouche, dans le bulletin APMEP n° 362; voir aussi les travaux de didactique des mathématiques).

Ils ne réussissent pas à tout coup: J'ai dû récemment faire face à un groupe d'étudiants qui attendaient de moi une dictée de

cours dont ils prendraient des notes: ils se sont refusés à faire des mathématiques sous mes yeux (intrusion dans leur domaine...).

Ces procédés ne sont probablement pas les seuls: merci aux lecteurs de proposer des compléments, des remises en cause, des mises en perspective autres...

1. faciliter le démarrage du travail mathématique.

Devant un problème à résoudre, les étudiants cherchent à repérer, au besoin par des indices de surface, la similitude avec des énoncés déjà traités et se lancent, dès que possible, dans une suite d'écritures qui leur semble cohérente, stylistiquement, avec la forme de l'énoncé. Ils ne s'autorisent pas à faire des essais: cela manque de «noblesse». Par ailleurs, ils les considèrent inutiles, puisque la plupart des professeurs de mathématiques du secondaire attendent une démonstration assurant à la fois un chemin vers la solution et sa validation...

Je fait donc «régesser» les étudiants à l'étape «infantile» des constats de cas particuliers.

Par exemple, pour résoudre $2x - 3y = 1992$, je fais essayer des couples (0,10), (10,100) etc. Cela leur donne une idée de l'ensemble des couples solutions. Ils éliminent ainsi les couples où x est négatif et y positif. Bien sûr, cette méthode serait à rejeter si l'on voulait déterminer l'ensemble de tous les couples solutions, mais elle donne des indications sur le caractère plausible du résultat, si on en trouve un.

2. A la recherche de l'outil universel ?

Le souvenir qu'ont les étudiants est que chaque problème a une solution et une seule: pour eux, cette solution passe par un déroulement typique, répertorié, qu'il faut suivre selon des rites bien établis. Les mathématiques sont donc perçues comme des problèmes-types à résoudre à l'aide d'un ou plusieurs «outils» de leur boîte-à-outils mathématique.

Les étudiants se sentent en sécurité dès qu'ils reconnaissent un traitement qu'ils ont pu automatiser (cf. article de J. Houdevine & S. Julo, les élèves du premier cycle en difficulté en mathématiques et en français,

revue française de pédagogie n° 84, août 1988). Leur confiance (ou leur manque d'engagement dans le problème !) fait qu'ils ne contrôlent plus ce qu'ils écrivent : tout s'écrit «automatiquement».

Les programmes de mathématiques contiennent, à juste titre, bon nombre d'algorithmes qu'il vaut mieux automatiser, pour garder l'esprit libre pour faire autre chose, en particulier des problèmes non répertoriés. Mais, chez les étudiants, le recours aux algorithmes automatisés entraîne un désengagement sur le sens du problème en cours d'étude. Il y a donc contradiction, au moins apparente, entre le besoin d'automatiser et la nécessité de résoudre des problèmes. Pour y remédier, on peut citer, parmi d'autres, l'intérêt de maintenir en concurrence des algorithmes différents, les uns lents mais sûrs, les autres rapides mais risqués..., durant toute la scolarité obligatoire (et au-delà).

Par ailleurs, il est certain que notre histoire mathématique est pleine de renoncements à des automatismes installés : le nombre de chiffres dans l'écriture d'un nombre n'est pas un indice de sa grandeur (passage des nombres naturels aux décimaux) ; l'écriture 1356 - 2458 est interdite à l'école élémentaire et autorisée au collège ; la racine carrée d'un nombre négatif déclenche des réactions d'horreur au collège et devient un outil de calcul en terminale... Les professeurs qui enseignent ces automatismes sont-ils conscients des ruptures que devront vivre leurs élèves ensuite ?

3. Changer le «contrat didactique» dominant.

La plupart des étudiants jugent les contenus de cours en référence à une utilité immédiate : l'épreuve partielle, la préparation au concours... etc. Résoudre un problème de recherche qui ne débouche pas sur une règle ou sur un algorithme, est du temps perdu. En voici un exemple.

J'ai proposé à des étudiants en école normale l'énoncé suivant : on veut fabriquer un puzzle avec des pièces toutes de forme carrée et le puzzle lui-même de forme carrée (les pièces peuvent ne pas être de même taille). Peut-on fabriquer un puzzle de 5 morceaux ? de 11 morceaux ? de 1000 morceaux ? de n'importe quel nombre de morceaux ?

Au début, les étudiants ont été réticents à rentrer dans ce problème. Il m'a fallu plaider : ce problème les entraînerait à faire des essais, à formuler des hypothèses, à les tester, puis à les démontrer ; en cela, je pouvais espérer les faire progresser dans

ce qu'est une démarche d'ordre mathématique. Du coup, j'ai été amenée à parler des démarches en mathématiques : l'exhaustion des cas, la démonstration...

J'avais probablement négligé cette constante en formation d'adultes : définir le but de l'exercice en cours. Je ne suis pas sûre que ce soit inutile pour les plus jeunes...

4. Apprendre à rédiger.

Les étudiants se souviennent de leurs professeurs du secondaire très puristes sur les écritures mathématiques (à juste titre le plus souvent...). Mais cette attitude est paralysante : par peur de mal dire, on préfère ne rien avoir à dire... comme la focalisation sur les fautes d'orthographe peut freiner l'expression écrite.

Montrer qu'il y a des conventions d'écriture en mathématiques est très utile ; les distinguer des règles logiques aussi. Par exemple, la règle de priorité de la multiplication sur l'addition est une commodité et non une nécessité logique. Appeler milieu et non centre le... centre de symétrie d'un segment relève aussi des conventions.

En revanche, il est important de saisir les fautes de raisonnement dans un texte écrit. Personnellement, j'organise les corrections de devoir autour de la lecture de copies. Des groupes sont constitués et leurs travaux —que j'ai déjà corrigés— sont soumis à l'étude : je m'arrange pour qu'il y ait une variété d'erreurs et une variété de méthodes de résolution dans chaque groupe. La tâche que les étudiants doivent assurer est de reconnaître en quoi ma correction est justifiée (comme je me trompe souvent, il y a un réel enjeu... ; je corrige au crayon !). Cela permet de voir aussi qu'il y a des styles différents dans la mise en forme écrite d'un raisonnement (cf. travaux non publiés de Marie-Odile Ottenwaelter, école normale d'Auteuil).

Je me demande s'il n'y aurait pas lieu de faire un travail systématique sur le passage à l'écrit. A Nanterre, nous avons demandé, pour l'évaluation continue, entre autres, de rédiger un exercice résolu oralement en classe. Chaque fois, cela a été intéressant à corriger : on ne soupçonne pas l'abondance des désignations dans un devoir mathématique bien rédigé... Par devoir, la preuve suppose un référent commun entre le lecteur et le rédacteur : ce que l'on suppose bien connu n'a pas besoin d'être rappelé... Les règles sont, là aussi, sociales.

5. Certaines notions restent difficiles.

Tout ce que je viens de dire peut laisser croire que les mathématiques sont deve-

GÉOMÉTRIE : DICTÉE DE FIGURES

Activité 1

Les étudiants sont par binôme. Chaque binôme reçoit un dessin de figure. Il doit rédiger un message «à téléphoner», c'est-à-dire sans dessin. Ce message sera remis à un autre binôme qui dessinera une figure conforme au message.

Il convient de donner quelques précisions sur la qualité du dessin : le dessin refait doit présenter les mêmes angles et le même ordre de grandeur de distances que le dessin initial.

L'expression «ordre de grandeur des distances» est utilisée à dessein : elle laisse le flou sur le respect des distances ou le respect de la forme.

La plupart des étudiants inscrivent la figure dans un cadre et dictent par rapport à ce cadre : en haut, à gauche, au milieu... Beaucoup ignorent la désignation : les démonstratifs et les relatives abondent. La mise en commun permet de dégager les critères suivants pour un bon message :

- dictée du dessin sans le cadre,
- désignation des objets,
- emploi conventionnel du langage géométrique (segment et non droite pour un segment, milieu et non centre pour un segment...),
- cohérence du message par rapport à la figure initiale.

Activité 2

Les binômes fonctionnent de manière similaire, mais cette fois-ci ils ont à dicter une figure décrite elle-même par un texte avec l'interdiction d'employer certains mots du texte.

Les exemples sont choisis de telle sorte que la dictée oblige les étudiants à retrouver certaines propriétés des figures classiques. Par ailleurs, les figures obtenues ne sont pas forcément celles qu'auraient dessinés les binômes émetteurs.

On constate des progrès dans les 2 premiers critères décrits ci-dessus. Cette fois-ci, l'attention est centrée sur les figures elles-mêmes. C'est à l'enseignant qu'il revient de mettre en défaut les messages des étudiants : la plupart des récepteurs complètent ou corrigent (souvent inconsciemment) les messages des binômes émetteurs. Par ailleurs la langue géométrique est souvent mal employée. D'où l'activité suivante :

Activité 3

Les messages émis sont recopiés et distribués à tous les étudiants. L'enseignant leur demande de corriger le texte pour qu'il soit

cohérent (sans se préoccuper de la figure initiale qui était demandée).

C'est l'occasion de revenir sur l'emploi de un, de le ; sur les liaisons nécessaires :

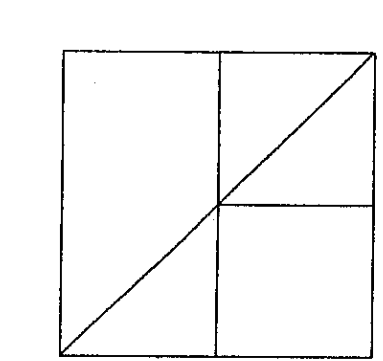
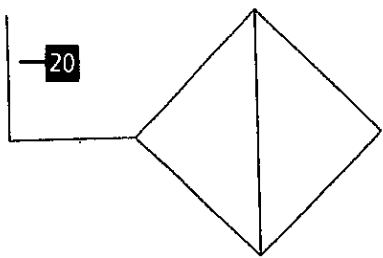
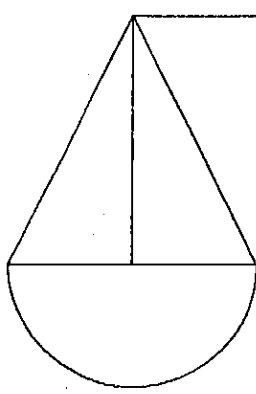
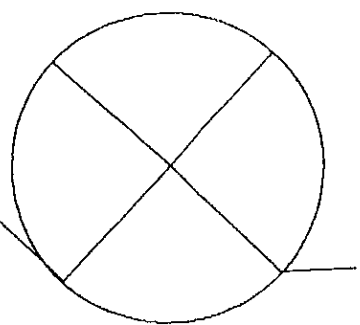
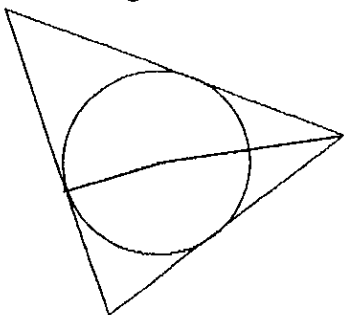
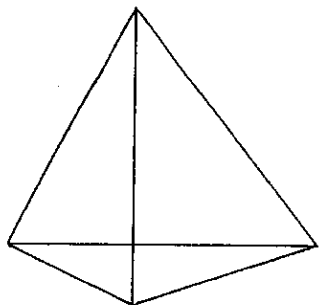
- **médiatrice** suppose un nom de segment,
- **cercle** suppose la désignation d'un centre et d'un rayon (le plus fréquent),
- **médiane** suppose un nom de sommet de triangle et le côté opposé...

Activité 4

Certains messages permettent d'obtenir des figures toutes superposables, d'autres laissent des choix. Où interviennent les choix ?

C'est l'occasion de présenter l'idée de paramètres (ou de degrés de liberté). De combien de paramètres dispose-t-on pour dessiner un carré ? un rectangle ? un triangle équilatéral ? etc. On dégagera ainsi un 5^e critère de dictée de figure : indiquer au récepteur les endroits où il a le choix.

- Faites reproduire un carré, sans prononcer ou écrire le mot CARRÉ. Le carré doit avoir une diagonale de 10 cm de côté.
- Faites reproduire un parallélogramme dont un côté mesure 5 cm et une diagonale 10 cm. N'utilisez pas le mot PARALLÉLOGRAMME.
- Faites reproduire un losange dont les côtés mesurent 5 cm. N'utilisez pas le mot LOSANGE.
- Faites reproduire un parallélogramme dont les diagonales mesurent 5 cm et 10 cm. N'utilisez pas le mot PARALLÉLOGRAMME.
- Faites reproduire un parallélogramme non rectangle dont les côtés mesurent 5 et 10 cm. N'utilisez pas le mot PARALLÉLOGRAMME.
- Faites reproduire un hexagone régulier sans utiliser le mot HEXAGONE. Le côté de l'hexagone doit avoir 5 cm de longueur.
- Faites reproduire un rectangle sans utiliser le mot RECTANGLE. Le rectangle doit avoir un côté de 5 cm et une diagonale de 10 cm de longueur.
- Faites reproduire un triangle équilatéral dont une hauteur à 10 cm de longueur. N'utilisez pas le mot ÉQUILATÉRAL.



FAIRE REVIVRE LA CURIOSITÉ DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE... MAIS AVEC QUELLE DIDACTIQUE ?

Annie BERTÉ - Bordeaux

Le thème de ces journées : «Susciter la curiosité», comme celui des journées de Loctudy : «Mathématiques pour qui, pourquoi?», prend sa source dans le même souci : Comment donner du sens à notre enseignement pour nos élèves ?

Dès qu'on pose la question du sens, on a deux catégories de réponses.

1. Ceux qui pensent que le sens des mathématiques est à chercher dans les rapports qu'elles entretiennent avec la réalité et, dans ce cas, on éveillera l'intérêt en montrant les applications des mathématiques.

2. Ceux qui pensent que la mathématique est purement abstraite et n'a donc en soi aucun rapport avec la réalité. Elle tire seulement son sens d'elle-même, c'est-à-dire de la cohérence interne de ses théories.

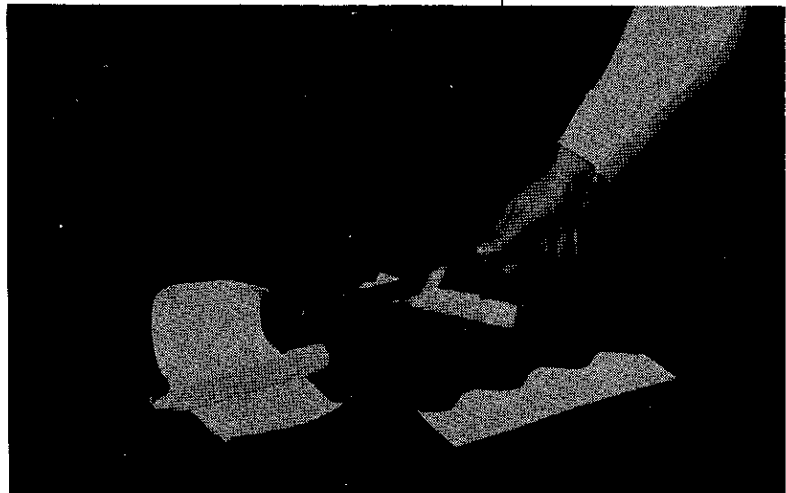
Malgré la contradiction, les professeurs essaient à la fois ces deux directions pour faire revivre la curiosité des élèves, mais dans les deux cas, ils rencontrent de sérieuses difficultés.

Première direction : Quand un élève demande : «A quoi ça sert les maths. ?», le professeur répond en général par l'utilisation des mathématiques en physique : «Pour faire des ponts, des avions, des fusées...». Mais nous savons bien que cette réponse n'est pas satisfaisante car elle est beaucoup trop lointaine pour l'élève moyen qui ne fera jamais de ponts ni de fusée.

Le professeur peut dire aussi : «Regarde l'ombre de ce panneau circulaire. L'ombre n'est pas un cercle. C'est une ellipse. Si tu mets de l'eau dans un verre cylindrique penché, tu vois la même chose. Il s'agit de la section d'un cylindre par un plan. J'obtiens la même figure si j'étire un cercle

dessiné sur une toile élastique. Et maintenant, voici une sinusoïde en coupant une bougie entourée de papier. Tout ceci est intéressant, car il s'agit d'objets familiers que l'élève peut voir tous les jours et d'expériences qu'il peut refaire à volonté. C'est encore mieux si on sait écrire l'équation du cylindre et du plan et démontrer pourquoi on a une sinusoïde. Sans cela, avec la toile élastique, on peut faire des mathématiques déjà intéressantes assez simplement.

Des idées de ce genre qui paraissent simples, sont pourtant difficiles à trouver et supposent de la part du professeur beaucoup de temps pour l'information et la réflexion sur l'enseignement, en d'autres termes : une certaine formation didactique.



D'un cylindre à une ellipse,
d'une ellipse à une sinusoïde.

Deuxième direction : Certains élèves qui se rendent compte qu'on peut résoudre les équations du second degré avec des formules, demandent : «Est-ce qu'il y a aussi des formules pour le 3° degré et le 4° ?... «Ils se posent là une question purement formelle, interne aux mathématiques. Malheureusement, ce genre de question ne vient qu'en 1° S ou TC. Même des questions ou des conjectures plus modestes, dans d'autres classes, arrivent assez rarement jusqu'au professeur, car pour qu'un élève pose de bonnes questions, c'est-à-dire retrouve sa curiosité originelle, il lui faut un minimum de confiance en lui. Or, la majo-

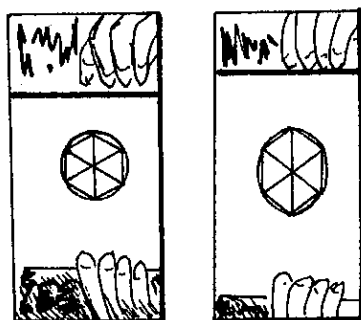
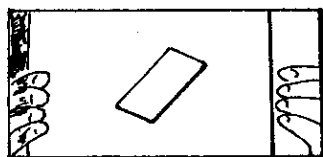
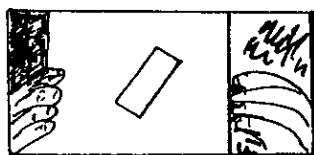
rité de nos élèves ont perdu cette confiance en eux, non parce que les professeurs de mathématiques ont été particulièrement odieux, mais surtout parce que la pratique des mathématiques est difficile et que cette perte de confiance est un phénomène inévitable sans une profonde réflexion didactique du professeur.

D'où le titre de cet exposé qui repose sur une conviction : le professeur de mathématique ne peut faire revivre durablement la curiosité dans sa classe en procédant de façon ingénue et simplement parce qu'il possède un certain art pédagogique ou parce qu'il est savant en mathématique.

Si les élèves posent la question : «à quoi ça sert ?», cela signifie déjà qu'il y a eu échec et que l'enseignement qu'ils ont reçu leur est resté étranger, car il n'était pas une réponse à des questions qu'ils se sont posés.

On n'apprend pas grand chose par la parole imposée magistralement. Nous percevons la réalité à travers des modèles parfois implicites et qui sont la base de nos prévisions et de nos actions. Ils nous paraissent suffisants tant que nos prévisions n'échouent pas. Même si c'est le cas, nous tentons des adaptations locales en résistant au changement. Le savoir nouveau se construit ainsi non par une simple adjonction de connaissances mais en opposition avec le savoir ancien par une restructuration de ce savoir.

C'est pour cela qu'en didactique nous pensons qu'il doit y avoir plusieurs phases dans notre enseignement :



1. Une phase sociale pendant laquelle les élèves peuvent travailler en groupe sur une action à réaliser ou bien pendant laquelle le professeur instaure le débat scientifique dans la classe. C'est la phase qui permet aux élèves de se poser des questions.

On distingue des situations d'action, de communication, de formulation et de preuve (Guy Brousseau).

2. Une phase d'institutionnalisation des connaissances.

C'est bien le bilan de la phase précédente mais la mise en forme permet au maître un «plus» pour faire avancer la classe tout en la rendant plus homogène par rapport au savoir visé. Cette phase permet de résoudre le paradoxe fondamental de l'enseignement : on n'apprend rien par la parole mais pourtant on ne peut tout réinventer seul. Ceci se produit grâce au décalage entre ce que chaque élève a trouvé seul et ce que le maître reprend ensuite dans le bilan. Ce décalage ne doit pas être trop grand sinon il signifie un échec de la phase 1, il doit être optimum.

3. Une phase de réflexion personnelle de l'élève :

L'élève vérifie s'il a bien compris grâce à des exercices à sa demande, et il réinvestit le savoir acquis dans des problèmes qui peuvent consister entre autres en la mathématisation de situations réelles.

Sur un sujet donné, on peut avoir un enchaînement de phases 1-2-3.

Actuellement, on assiste à une phase 2 hypertrophiée : le cours magistral, puis une phase 3 d'exercices d'application répétitifs, infantilisants pour l'élève. Mais comme la demande de recettes est très forte de la part de l'élève, le professeur y souscrit pour obtenir un succès relatif.

Plus récemment, la dernière mode dite du «contrôle continu» supprime la phase 2 et hypertrophie la phase 3 dans le but louable de responsabiliser davantage l'élève. On peut cependant prévoir l'échec puisqu'on économise la phase 1, seule porteuse de sens. On ne peut obtenir que des automatismes éphémères chez l'élève sans cette phase 1 qui est très difficile car porteuse d'insécurité aussi bien pour le professeur que pour l'élève. Elle est cependant indispensable si on veut communiquer valablement la curiosité dont nous parlons ici. Cette curiosité de l'élève pourra alors continuer à vivre dans toutes les autres phases.

Un exemple a été donné à propos de l'enseignement du sujet suivant : proportionnalité, homothétie, affinité.

Mise en évidence d'un problème didactique dans le cadre numérique

1. Les faits suivants sont quotidiennement observés par les enseignants.

a) On cherche un rapport à 4/5 de numérateur 8.

Il n'y a pas de problème car $4 + 4 = 8$
 $5 + 5 = 10$ donc c'est 8/10.

On passe de 4 à 8 par une multiplication par un entier.

b) On cherche un rapport égal à 4/5 de numérateur 7.

Les élèves écrivent $4/5 = 4/5 + 3/3 = 7/8$.

Passer de 4 à 7 par multiplication n'est pas envisagé. Seule l'addition est possible.

On ne rencontre pas beaucoup cette erreur quand la question est posée formellement.

Par exemple :

Trouver x tel que $4/5 = 7/x$ les élèves appliquent mécaniquement l'algorithme du produit en croix : $x = 5 \times 7/4$.

Par contre, on la rencontre beaucoup dans la simplification d'un rapport.

Par exemple :

$$\frac{4 + 3}{5 + 3} = \frac{4}{5}$$

ou encore plus souvent

$$\frac{4 + x}{5 + x} = \frac{4}{5}$$

Les professeurs essaient de corriger cette erreur, en utilisant deux moyens :

— la démonstration :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+x} \Leftrightarrow a(b+x) = b(a+x) \Leftrightarrow ax = bx$$

qui équivaut à $a = b$ si $x \neq 0$

— le contre exemple :

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{2+1} ; \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$$

Or, tous les professeurs ont pu observer qu'ils n'arrivent pas à éliminer cette erreur avec ces arguments indéfiniment répétés. Les élèves semblent convaincus mais recommencent la même erreur le lendemain.

2. Analyse.

Il s'agit de ce qu'on peut appeler l'obstacle du modèle additif. A l'école primaire, on in-

troduit la multiplication comme une addition répétée.

$$ab = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ fois}}$$

C'est une étape obligatoire. Mais cette addition répétée constitue un obstacle dès que le « nombre de fois » est un négatif ou un rationnel non entier.

Dans l'erreur signalée plus haut, il y a deux composantes :

— on ne peut passer de 4 à 7 par la multiplication par 7/4 puisque 7/4 n'étant pas un entier, il ne peut prendre le sens de « nombre de fois ».

— les élèves pensent implicitement que pour conserver un rapport, on peut ajouter un même nombre aux deux termes.

Deux connaissances fonctionnent encore là comme un obstacle :

— le modèle implicite du rapport 1 :

$$\forall x, \frac{a}{a} = \frac{a+x}{a+x}$$

On verra la force de ce modèle dans le cadre géométrique.

— le modèle implicite de la conservation de la différence :

$$\forall x, (a+x) - (b+x) = a - b$$

C'est à cause de tous ces obstacles que la démonstration ou le contre-exemple n'ont pas l'effet correctif escompté.

Mise en évidence du même problème didactique en géométrie

Quelques faits que tout professeur peut observer en seconde :

1. Agrandissement d'un rectangle (cadre géométrique, puis graphique).

Le professeur pose la question suivante : voici une petite photo dont les dimensions sont 4 cm et 2 cm. Je veux l'agrandir, de façon que la plus grande dimension devienne 7 cm. Quelle sera alors la petite dimension ?

Dans une classe de seconde ordinaire hétérogène avec des élèves non sélectionnés, environ 50 % des élèves donnent une réponse fautive :

(1) La petite dimension est 5 cm car on passe de 4 à 7 en ajoutant 3, donc on ajoute aussi 3 à 2 et on trouve 5.

(2) La petite dimension est 3 cm : pour agrandir, on commence par doubler les dimensions qui deviennent 8 cm et 4 cm. Mais 8 cm c'est trop grand d'une unité donc on enlève 1 cm et on trouve $8 - 1 = 7$ et $4 - 1 = 3$

(3) La petite dimension est 3,75 car $2 + 7/4 = 2 + 1,75 = 3,75$

L'opérateur 7/4 est bien apparu mais au lieu de calculer $2 \times 7/4$ l'élève a dévié sur l'addition.

La liste des erreurs ci-dessus n'est pas exhaustive. L'erreur la plus fréquente est la première. Les autres sont plus marginales. Dans tous les cas, on note cependant le même obstacle : l'obstacle additif.

Voici maintenant les diverses justifications pour la réponse exacte :

(1) 2 est la moitié de 4, donc on prend la moitié de 7 soit 3,5.

Ceux qui utilisent ce raisonnement ne savent pas le généraliser quand les dimensions ne sont pas dans un rapport entier. Exemple : 5 cm et 2 cm, avec la même question : trouver la largeur si la longueur est 7 cm.

(2) Pour 4 cm, il faut ajouter 3 cm. Donc, pour 2 cm, qui est la moitié de 4 cm, je vais ajouter la moitié de 3 cm soit 1,5 cm. D'où la réponse : $2 + 1,5 = 3,5$.

J'appelle ce raisonnement, le modèle additif adapté. Comme le précédent, il n'est pas généralisable si les dimensions ne sont pas dans un rapport simple.

(3) Pour 4 cm, on ajoute 3 cm, c'est-à-dire les 3/4 de la dimension.

Donc, à 2 cm, il faut ajouter

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ d'où } 2 + 1,5 = 3,5.$$

Cette solution est aussi un «modèle additif adapté» mais cette fois généralisable dans tous les cas.

Ceci revient à dire que la nouvelle dimension est

$$a + \frac{3}{4} a = a(1 + \frac{3}{4})$$

donc à mettre en évidence l'opérateur

$$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

La dernière justification utilise directement l'opérateur 7/4.

Je passe de 4 à 7 en multipliant par 7/4 donc la nouvelle dimension est

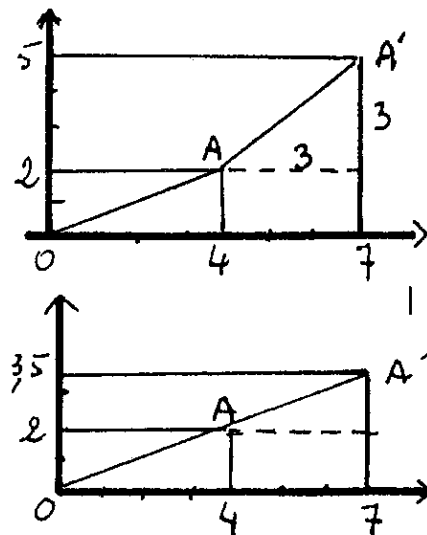
$$2 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Actuellement, dans une classe de seconde moyenne des interviews attentifs d'élèves permettent de mettre en évidence ces différents stades dans les conceptions de la proportionnalité.

Ces difficultés font obstacle à la compréhension de la notion de vecteurs colinéaires et à celle de pente d'une droite (*).

La corrélation est la suivante :

Quand on place les rectangles de la photo dans un repère (OHAK et OH'A'K')



(AA') a pour pente $1 = 3/3$
(OA) a pour pente $1/2 = 2/4$

(AA') a pour pente $1/2 = 1,5/3$
(OA) a pour pente $1/2$

proportionnalité des dimensions des rectangles équivalent à :
alignement des points
O, A et A' et $OA' = 7/4 OA$

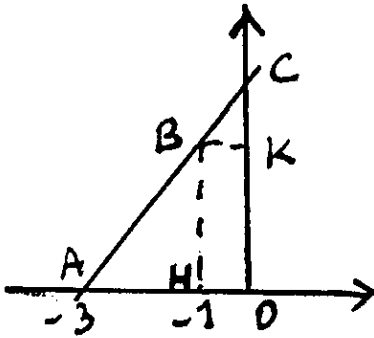
équivalent à : les droites (OA), (OA') et (AA') ont même pente 1/2.

Le problème didactique est nettement visible dans l'exemple suivant :

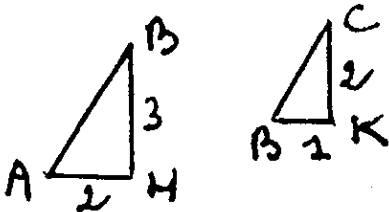
2. Agrandissement d'un triangle (cadre graphique puis géométrique)

Dans un repère orthonormé soit les points A(-3,0), B(-1,3). La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées en C.

(*) L'expression «pente d'une droite» est actuellement abandonnée car en physique la pente est le sinus de l'angle et non la tangente. Nous continuons à l'employer ici dans son sens mathématique ancien : coefficient directeur en repère orthonormé.

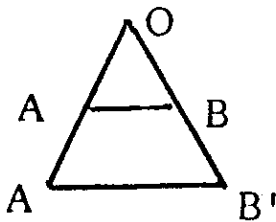


Trouver les coordonnées de C.
 La réponse de certains élèves est 5 parce que dans le triangle AHB on a :
 $AH = 2$ et $HB = 3$ donc dans le triangle BCK qui a la même forme, on retranche 1 aux côtés et on a $BK = 1$ donc $KC = 2$ dont $OC = OK + KO = 3 + 2 = 5$.
 Ces élèves sont très étonnés quand leurs camarades trouvent que l'ordonnée de C est 4,5.

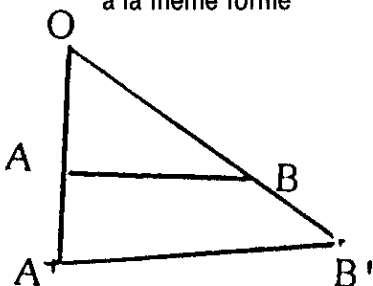


Quand on ajoute une même longueur à chaque côté OA et OB d'un triangle OAB, sa forme n'est pas conservée sauf dans le cas où ce triangle est isocèle ($OA = OB$) en général (AB) et (A'B') ne sont pas parallèles.

Le fait que la forme soit conservée pour le triangle isocèle est à l'origine d'un modèle implicite très fort.



le nouveau triangle à la même forme



le nouveau triangle n'a pas la même forme

C'est un fait maintes fois observé par les enseignants.

Dans le théorème de Thalès, les élèves interprètent

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \text{ comme et } OA = OB \text{ et } OA' = OB'$$

par suite du modèle implicite du triangle isocèle.

et effectivement :

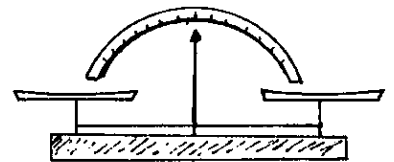
$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \\ \text{et } OA = OB \end{array} \right\} \Rightarrow OA' = OB'$$

Pour l'agrandissement du rectangle, on a de même le modèle implicite du carré qui reste semblable à lui-même quand on ajoute une longueur quelconque à son côté.

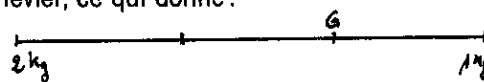
3. Cadre physique : problème du barycentre de deux points.

On demande aux élèves : où faut-il suspendre une tige pour avoir l'équilibre ?

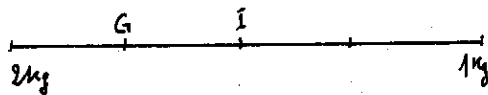
cas 1. Avec 1 kg à chaque extrémité : tout le monde dit «au milieu».



cas 2. Avec 2 kg à une extrémité et 1 kg à l'autre, dans ce cas, même si la loi des leviers a été vue en physique, on rencontre les erreurs suivantes : certains élèves placent le barycentre G du côté du poids le plus léger en faisant un raisonnement de proportionnalité des masses et des bras de levier, ce qui donne :

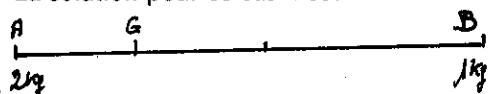


L'expérience physique permet de corriger : Certains élèves placent bien de façon intuitive le barycentre G du côté du poids le plus lourd, mais on peut trouver la solution suivante :



On part du milieu I trouvé dans le cas 1 et comme le poids est doublé d'un côté, on redivise le segment correspondant en deux.

La solution pour ce cas 2 est :



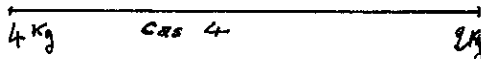
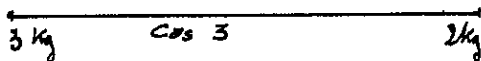
ce qui permet de rappeler la loi des leviers vue en physique : proportionnalité inverse des masses et des bras de levier :

$$\alpha GA = \beta GB$$

Ici : $2 GA = GB$.

cas 3 et 4.

Le professeur demande alors la place de G dans les deux cas suivants :



La réponse spontanée de la majorité des élèves est la suivante :

«Le cas 3 se ramène au cas 2 puisqu'on a rajouté 1 kg à chacune des masses.

Le cas se ramène au cas 2 puisqu'on a multiplié chaque masse par 2».

Ils se retrouvent alors devant une contradiction. Ils disent : «dans le cas 3, les valeurs des masses sont plus voisines, donc le barycentre doit être plus proche du milieu que dans le cas 4».

Ceci leur permet de revenir à la loi des leviers pour trouver les positions exactes du barycentre.

Encore, dans cet exemple, l'erreur première des élèves relevait bien de l'obstacle du modèle additif (dans le cas 3).

Pour continuer, il faut construire une situation didactique sur le barycentre. Avec le barycentre de points alignés, on peut construire une situation à partir des notes coefficientées d'un élève fictif, les notes représentant les abscisses des points sur un axe, les coefficients sont les masses, la moyenne est le barycentre... L'intérêt essentiel de ce sujet est d'obtenir une très bonne dévolution du problème, car tout problème sur les notes et les moyennes concerne profondément les élèves.

Le développement de ce sujet est hors de propos ici où il s'agit seulement de la proportionnalité en géométrie et de l'obstacle du modèle additif que nous venons de repérer dans de nombreux faits.

**Analyse du problème
géométrique en vue d'une
solution au problème
didactique mis en
évidence par les faits**

Si on fait travailler les élèves sur le thème de l'agrandissement des figures (rectangle, triangle ou autre figure), à quoi peut-on s'attendre de leur part ?

Pour agrandir, les élèves vont utiliser le modèle additif, c'est-à-dire :

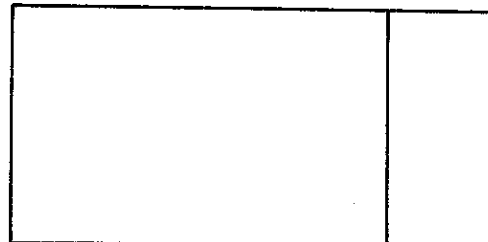
— soit ajouter un même nombre aux dimensions,

— soit ajouter une bande de largeur constante sur un ou plusieurs côtés de la figure.

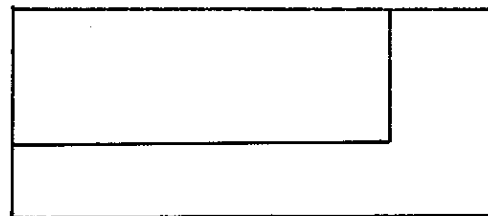
Regardons ce que cela donne dans les deux cas particuliers : rectangle et triangle.

1. Les élèves cherchent à augmenter la longueur des côtés :

a) Pour le rectangle :



- ajouter un même nombre aux deux côtés

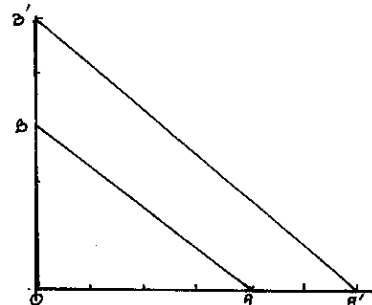


- ajouter un même nombre aux quatre côtés

- Dans les deux cas, la figure obtenue n'est pas semblable à la figure de départ.

b) Pour le triangle :

Si on ajoute un même nombre à deux côtés, le triangle obtenu n'est pas semblable au triangle de départ, et en plus, la même augmentation pour deux côtés ne produit pas la même augmentation du troisième côté.



Par exemple, si on part du triangle rectangle OAB avec $OA = 4$, $OB = 3$ et $AB = 5$

$$OA' = OA + 2 \quad OB' = OB + 2$$

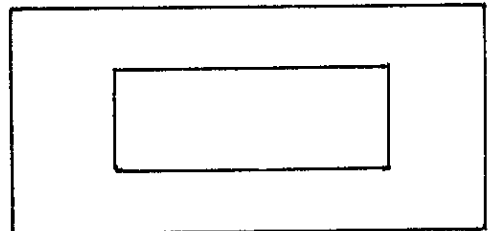
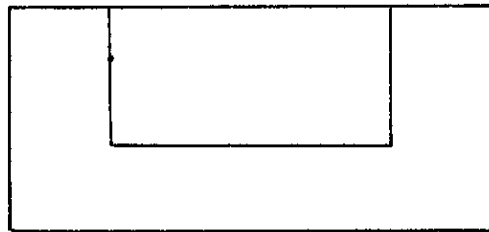
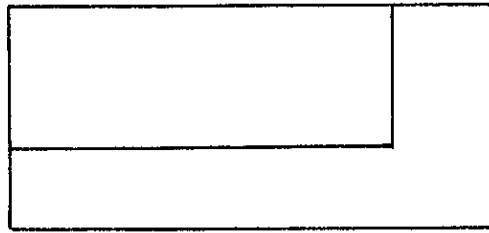
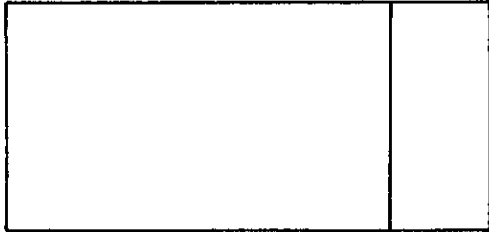
$$A'B' = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \neq 5 + 2$$

Il y a donc ici une source de contradiction qui peut être exploitée.

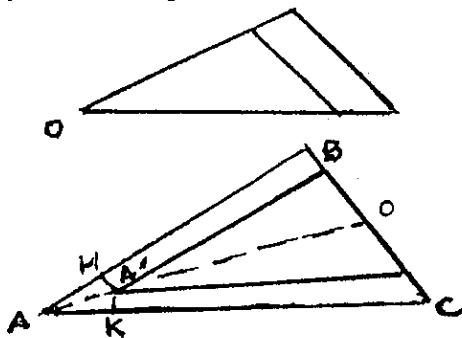
2. Les élèves cherchent à ajouter des bandes de largeur constante :

a) Pour le rectangle :

Une bande de largeur constante sur un, deux, trois ou quatre côtés ne permet dans aucun des cas d'obtenir un rectangle semblable.



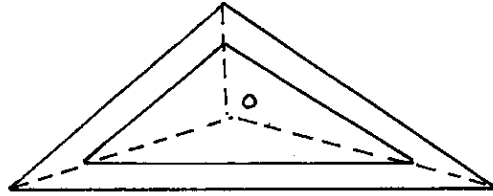
b) Pour le triangle :



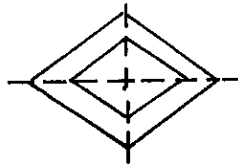
$A'H = A'K$ donc
(AA') bissectrice de l'angle \widehat{BAC}

Une bande de largeur constante sur un, deux ou trois côtés donne un triangle homothétique dans tous les cas. Le centre d'homothétie est indiqué (point O) sur les trois figures. Dans le troisième cas, il s'agit du point d'intersection des bissectrices du triangle.

L'agrandissement est possible par l'adjonction d'une bande de largeur constante pour tout polygone dont les bissectrices des angles sont concourantes.



Par exemple pour le losange.
Elle est fautive pour un rectangle et un parallélogramme qui ne sont pas carrés.
Elle est vraie pour le carré et le cercle.



Une propriété qui est vraie pour les deux figures de base : carré et cercle donne lieu à un modèle implicite très fort. C'est une source de contradiction intéressante pour construire des situations d'enseignement (*).

Le souci d'économiser la place me conduit à arrêter ici la description de l'atelier. Après l'analyse, il s'agit de proposer des situations d'enseignement plus riches que celles qui ont simplement permis de mettre en évidence l'obstacle dans les différents cadres.

Ces situations je les ai souvent réalisées dans des classes devant un public d'enseignants observateurs, ou décrites oralement et par écrit, et en particulier dans l'atelier de Rouen qui s'est poursuivi ainsi :

— Trois situations d'enseignement pour la phase 1

- agrandissement d'un puzzle,
- trois triangles rectangles semblables,
- le cadre.

— Le bilan par le maître (phase 2)

- rôle du centre d'homothétie,
- la multiplication de deux nombres et l'étirement de l'élastique en dimension 1,
- la multiplication en dimension 2 (toile élastique et affinité).

— Des situations de réinvestissement pour la phase 3

(*) On verra qu'il en est de même pour la relation aire-périmètre.

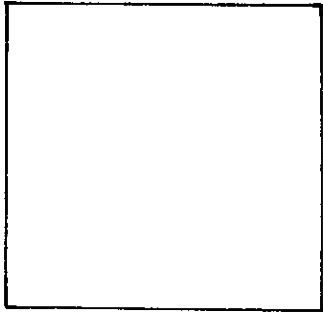
Si le temps l'avait permis, l'atelier aurait pu se poursuivre avec un autre thème : l'inégalité triangulaire en 4^e. Quelques personnes ont posé des questions à ce sujet, hors atelier.

Pour tous les concepts de didactique, j'ai puisé essentiellement dans les travaux de deux personnes : Guy Brousseau et Régine Douady.

Si aujourd'hui j'ai changé mon enseignement, c'est grâce à Emma Castellnuovo, que j'ai la chance d'avoir pour amie. ■

RECONNAITRE LES ERREURS

François DUSSON - Rouen



Ceci n'est pas un losange

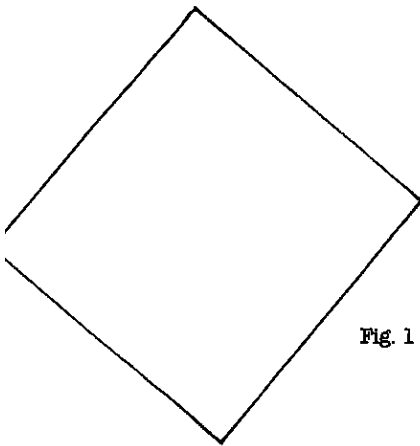


Fig. 1

Ceci n'est pas un carré



Fig. 2 : et vice et versa.

I. Discontinuité perceptive

La figure 1 donne un exemple d'erreur. Logiquement les deux figures proposées sont à la fois losange et carré. En déplaçant une des figures nous pouvons la faire coïncider avec l'autre assurant la vraie identité carré et losange. Quel élève peut ne pas être atteint par un tel argument ?

La figure 2 montre la puissance de notre pensée. Les traits s'organisent soudain en visage. Le processus d'apparition est inconscient ; le visage s'impose. En tournant la feuille, voici qu'un autre visage apparaît ; les mêmes traits s'organisent autrement. Il y a une discontinuité perceptive. Il est impossible de lire en même temps les deux visages. Chacun est une organisation particulière des traits. On intentionnalise les traits.

Le rapprochement de ces deux exemples est éclairant. La formidable capacité à donner sens à des traits n'est-elle pas tout autant en action dans cette question de losange et de carré ? Mais n'est-il pas alors concevable qu'en déplaçant losange ou carré une discontinuité analogue à celle des deux visages soit présente à l'esprit de quelqu'un ?

Ici j'appelle «contenu mathématique» : un carré est un losange, un losange qui possède un angle droit est un carré. Le contenu mathématique n'éclaire pas l'erreur. Il décide l'erreur. C'est le processus mental qu'il est important de saisir pour connaître l'erreur.

Je crois que l'on peut tirer de ce qui précède un autre enseignement important : Le fait que deux affirmations contradictoires peuvent cohabiter chez une même personne. Voici un exemple récent en classe de SUPTA. L'exercice était de reconnaître l'ensemble A suivant :

$A = \{ M \text{ de l'espace} / \vec{OM} = t^2\vec{U} \text{ quand } t \text{ décrit } \mathbb{R} \}$. Beaucoup d'élèves ont dit que «c» était une parabole. Après avoir pris conscience de la colinéarité de \vec{OM} et \vec{U} , certains élèves n'ont pas stabilisé cette affirmation. La parabole revenait sans qu'ils perçoivent les fondements de cette idée. Et le lendemain le même problème avec t^2 remplacé par $\sin t$ a produit une sinusoïde.

Quelques points à noter pour terminer cette partie I :

- L'erreur est décidée par référence à une norme.
 - La rectification de l'erreur peut sans doute ne rien modifier dans le processus créateur.
 - Une grande part de l'activité cérébrale est inconsciente.
 - Deux éléments de pensée contradictoires peuvent exister tour à tour sans nécessairement se détruire.
 - Le processus créateur d'erreur est peut-être un processus de pensée habituellement très performant.
- Comment aborder ces phénomènes ?

II. Situation à la carte.

A. Confronté à une situation, un individu construit une **carte de la situation** dont certains éléments sont conscients, d'autres pas.

Pourquoi choisir une telle expression ?

Sartre dit dans son ouvrage «l'imaginaire» : «... Nous retrouvons ici une caractéristique de l'image mentale, le phénomène de quasi-observation. Ce que je perçois c'est ce que je sais ; l'objet ne saurait rien apprendre, et l'intuition n'est que du savoir alourdi, dégradé». Le mot carte rend compte de la mémoire qui est interaction entre le sujet et la situation. La situation n'est jamais neuve car elle est abordée par un savoir, des processus déjà là. Un géographe qui aborde un nouveau pays va à travers l'étude d'une carte de ce pays l'analyser en référence à ses études antérieures qui lui font comprendre une carte.

Le sujet va plus ou moins préciser différents éléments de la situation. Il y a des phénomènes de mise à distance. Tel élément est grossi, tel autre est effacé.

Le sujet fixe les limites de la situation, consciemment ou pas. Il peut associer différents savoirs, problèmes à la situation par exemple.

La carte vise aussi une synthèse pour favoriser la mémorisation. Il y a toujours des schématisations qui s'opèrent pour faciliter une exploitation ultérieure de cette rencontre situation-sujet.

La carte peut s'expliciter à travers des langages, des signes, des symboles, ce qu'on nomme «signifiants».

La carte tend à une certaine stabilité. Elle organise la situation pour que le sujet la traite et la mémorise. Elle admet une cohérence.

Je résume cela par les six points suivants :

1. mémoire interactive.
2. mise à distance des éléments.
3. limitation de la situation.
4. schématisation pour mémorisation.
5. ensemble des signifiants.
6. cohérence.

B. Illustration sur un exemple.

Dans une classe de TB était posé l'exercice : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction qui à x associe $f(x) = \text{Ln}(x^2-2)$.

1. En examinant les erreurs des élèves on peut toujours se poser la question : Quelle trace de passé apparaît-il ? On peut tenter le retour à une carte ancienne. Ici celle concernant le cours sur le Ln. C'est la fonction Ln qui est la vedette. Les fonctions du chapitre comportent Ln dans leur expression... «ce sont des fonctions Ln». L'ensemble de définition de Ln est \mathbb{R}^{++} .



2. Voilà ce que dit un élève essayant de traduire sa démarche : «Lorsque j'ai vu cet exo, le Ln m'a tapé dans l'œil, je me suis donc dit aussitôt que (x^2-2) doit être strictement positif». On voit bien ici le travail de mise à distance des éléments. Par exemple, la question «qu'est-ce qu'un ensemble de définition ?» n'apparaît pas.

J'avais écrit dans mon cours «Ln (Intérieur)» pour attirer l'attention sur un élément gommé en général par les élèves. Chez des redoublants, un conflit va naître analogue à ce qui est signalé partie I. A la question «quel obstacle avez-vous rencontré dans cet exercice ?», une élève répond : «Le fait que le logarithme soit défini sur \mathbb{R}^{++} et que l'ensemble de définition de f soit

$] -\infty, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty [$ ». D'autres élèves vont essayer de tenir compte des deux éléments : «Pour qu'un logarithme existe, il faut que l'intérieur de celui-ci soit positif par conséquent j'ai posé $(x^2 - 2)$ soit supérieur à 0. Puis sachant qu'un logarithme n'existe que sur $] 0, +\infty [$ j'en ai déduit que $E =] \sqrt{2}, +\infty [$ ». L'établissement de la carte est lié aux phénomènes d'attention. Les éléments faciles sont gommés. Voici un élève expliquant ses obstacles : «Il y avait longtemps que je m'étais trompé sur ce problème. Le manque d'habitude m'a fait tromper sur ce type de problème, peut-être devenu trop simple. Mon erreur est due, souvent, à la rapidité. La facilité et mon manque d'analyse précise me font partir dans de mauvaises voies. Je réfléchis plus quand c'est plus dur». Une autre élève explique ses erreurs : «Ce qui est déterminant dans ma création d'erreurs c'est le fait de rester fixée sur quelque chose».

3. La situation à travers la carte a des limites difficiles à repérer. C'est là que je situe les aspects dits psychologiques, sociologiques. Que veut dire cette élève en affirmant : «Ln est un obstacle. A chaque fois que je vois un Ln c'est la panique». Que vient faire cette peur dans une situation où «seulement» des connaissances mathématiques semblent appelées ?

4. On peut relire les 1 et 2 précédents comme illustration de la schématisation pour mémoriser. La carte ancienne apparaît avec ses éléments clefs : Ln, \mathbb{R}^{++} , Intérieur ; éléments non pas articulés logiquement mais «en portraits».

5. Pour ce qui est des signifiants, je remarque que l'écriture mathématique adoptée par les élèves rend difficile le compte-rendu de leur carte de la situation parce que le professeur, que je suis, comprend les symboles et les phrases utilisées dans leur sens classique. C'est l'analyse suivant l'exercice, réalisée par les élèves qui met mieux à jour ce dont ils veulent rendre compte.

6. Pour illustrer la dimension cohérence de la carte, voici le commentaire d'une élève : «Je me suis approchée de la fonction et je me suis dit, il faut trouver E . Étant donné la présence du Ln, il faut que $(x^2 - 2)$ soit supérieur à 0. Mais ensuite il faut trouver



comment faire. Sachant très bien que ma réponse est fautive, je la formulais quand même ne sachant pas quoi faire d'autre : $(R - \{2, 0, 1\})$ ».

C. Vers une classification des erreurs ?

Les six points précédents aident à mieux analyser la carte. On pourrait peut-être regrouper les erreurs par la domination d'un des points. Du moins toute erreur peut-être questionnée par leur passage en revue. Essayons de classer quelques erreurs.

1. Je cite le livre de N. Kroguious «la psychologie au jeu d'échecs» : «on présente une position de l'Est-Indienne tirée d'une partie. Les sujets découvrirent rapidement les plans et les principaux thèmes tactiques. A un groupe similaire, on proposa ensuite la même position, couleurs inversées. La moyenne de réflexion fut alors augmentée de dix minutes». Cet exemple illustre bien la mémoire interactive. On retrouve ce phénomène dans les erreurs ou les blocages dus à l'utilisation non habituelle de lettres pour désigner une variable ou un paramètre. On trouvera plus d'erreurs à la question : résoudre, dans C, $x^2 + 1 = 0$; qu'à la question : résoudre, dans C, $z^2 + 1 = 0$.

On le retrouve dans les juxtapositions d'affirmations non compatibles.

2. Pour des élèves déjà bien avancés dans leur formation en calcul, les erreurs de calcul sont souvent dues à une surestimation d'un élément du calcul. Les fautes sont sur un point facile, la difficulté ayant absorbé le sujet. En particulier tout calcul de tête comportant une difficulté particulière entourée de tâches faciles porte de gros risques d'erreur. Décomposer un calcul en très petits éléments semble être une bonne sécurité.

On trouve ici les blocages liés à «l'oubli» de certaines hypothèses ou données.

3. Comme déjà dit les limites données à une situation rejoignent les questions d'ordre psychologique et social. Certains éléments absents, a-priori d'un problème, peuvent être les éléments principaux pour un sujet donné. On comprendra bien qu'un problème, de partage entre frères et sœurs d'une famille, posé en classe puisse éveiller autre chose que de l'arithmétique chez un jeune dont le frère est décédé. Se trouve posé ici aussi l'importance des conséquences que peut avoir la réussite ou l'échec à un exercice sur les plans : orientation, confiance en soi, relationnel. Quelle image des maths à chaque élève ?

Mais ce n'est pas exclusivement cela. Une situation peut être enrichie par des connais-

sances, les frontières de compétence sur un problème peuvent évoluer. Il sera important de saisir ses frontières. On peut trouver ici les erreurs liées à la restriction «utilisation du cours juste fait» qui réduit de beaucoup le champ d'une situation.

4. La schématisation pour mémoriser est très claire dans tout ce qui est désigné par théorèmes-élèves. Par exemple : «l'ensemble de définition d'une fonction, c'est quand c'est pas nul». Pour comprendre ces théorèmes, il faut voir la schématisation à la manière de la composition d'un tableau. Par exemple, qui n'a pas été surpris de relire dans des interrogations écrites de cours les définitions dans le désordre. Les éléments sont présents mais sans la logique interne.

La question des signifiants peut être traitée en distinguant plusieurs types de langage : Le langage descriptif ; le langage logique ; le langage heuristique.

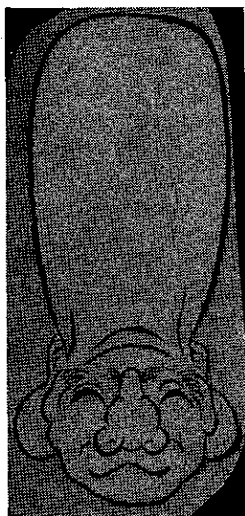
Considérons cette phrase d'élève :

$|x - 2| = 3$ donc $x - 2 \geq 0$ etc. D'un point de vue logique ceci ne tient pas la route. Mais en fait l'élève décrit sa démarche : Je résous cette équation donc je vais essayer d'enlever les barres, donc je pose d'abord $x - 2 \geq 0$. (Et effectivement, plus tard apparaissait $x - 2 < 0$). Beaucoup d'affirmations illogiques peuvent être comprises si l'on pense que l'élève décrit une démarche (en utilisant des abréviations !) au lieu d'écrire des propositions logiquement recevables. L'utilisation de l'hypothèse apparaît ainsi quelquefois comme conclusion introduite par un donc, alors qu'il faudrait traduire : donc je vais utiliser l'hypothèse. Cela pose le statut perçu par l'élève du langage mathématique. Cela pose aussi l'introduction d'un langage heuristique, langage favorisant la réflexion, la découverte souple avec lequel un élève peut exprimer des idées, des souhaits, des difficultés et qu'il ne serait pas amené à confondre avec le langage logique.

6. La question de cohérence sera traitée dans la partie suivante sur le sens. Disons que ce qui semble ne pas avoir de sens n'est pas dépourvu de cohérence. Un élève de collège m'a dit un jour : «au collège on nous demande une réponse immédiate». Ceux qui trouvent l'âge du capitaine sont peut-être tout à fait cohérents vis-à-vis de la nécessité de fournir une réponse. Un élève de SUP, à la question : montrer que les points A, B, C (ils étaient définis par des coordonnées dépendant d'un paramètre) sont coplanaires, s'est trouvé surpris qu'il n'y ait rien à faire. Il avait déjà calculé deux produits scalaires... A quelle nécessité répondait-il ?

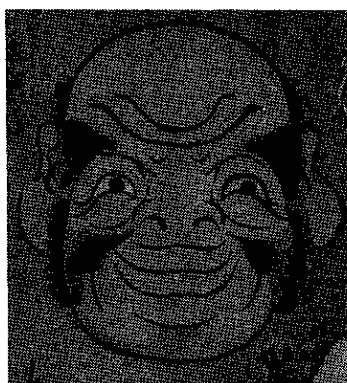


III. Sens et sciences



A. Une expérience.

Dans un ouvrage de l'IREM de Reims «la logique des erreurs», on lit la figure 3. André Thiebault commente : «une grande majorité de ceux qui se sont livrés à l'expérience ont reconnu avoir mis en œuvre des raisonnements de type graphique et même s'ils ne sont pas parvenus à une réponse, ils ont pu voir que le fait de ne rien produire ne signifie pas automatiquement paresse, mauvaise volonté, stupidité...». Ce test pose bien la question du sens. A. Thiebault écrit : «Ainsi un élève peut savoir résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3(x - 2) = x + 2$ et se montrer incapable de vérifier l'exactitude de sa réponse en remplaçant x par 4». Pourtant je ne dirai pas que la démarche de cet élève n'a aucun sens. Elle a un sens qui n'est pas «le vrai».



B. Questionnement

Une connaissance scientifique se construit sur des questions. Ce sont elles qui vont produire le sens. On peut essayer de penser une démarche scientifique en utilisant l'idée de carte.

1. La mémoire interactive est l'ensemble des postulats et théorèmes reconnus... Ici une idée fondamentale est que cette mémoire se veut consciente.

2. La reconnaissance d'identités, d'invariants, le découpage d'un problème en morceaux simples, sont la mise à distance des éléments d'une situation...

3. La limitation de la validité d'une analyse, c'est la limitation de la situation...

4. La connaissance scientifique s'organise autour de principes synthétiques...

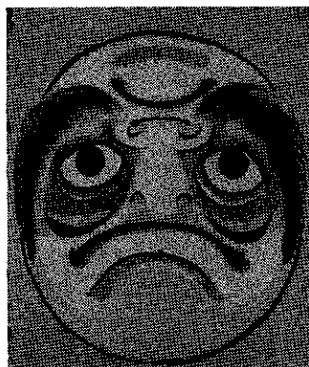
5. Le choix du langage, des notations, de la transmission des idées est un point scientifique capital...

6. Le tout vise une cohérence qui s'organise autour des questions définissant la situation...

Ce que je veux traduire par là, c'est que l'effort scientifique est dans le sens d'une carte de situation d'un certain type.

C. Histoire des maths et effort scientifique.

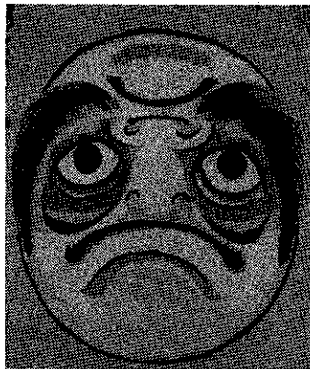
L'histoire des maths permet justement de saisir les difficultés d'élaboration de cette carte à visée consciente. Faire l'histoire des questions posées nous aidera sans-doute à comprendre les conflits que notre esprit



gère entre nos modes habituels de penser pour beaucoup inconscients, et l'effort de mise en questions conscientes d'une situation. Comme exemple, je citerai le cas d'un élève qui parlait du point le plus proche d'une extrémité.

D. Pour conclure cette partie : L'erreur contre le sens est un bon indice de la carte personnelle qu'un élève se fait d'une situation. Il s'agira alors de voir quelle question la situation fait naître chez l'élève sachant que même si la situation initiale est sous forme de question cette dernière n'est pas la source exclusive de la carte. Il s'agira aussi de voir quel questionnement est à l'origine du «vrai» sens de la situation.

IV. Apprendre, comprendre, mémoriser



nement. Car c'est sur le terrain de ce que j'ai appelé la carte que se situe l'enjeu scientifique : celui qui apprend se découvre lui-même. Comprendre, c'est aussi se comprendre face à une situation. La mémoire qui est interaction entre sujet et situation est solidaire de la compréhension. Comprendre, c'est mémoriser une reconnaissance et c'est reconnaître des identités mémorisées.

Il y a donc une très grande solidarité entre les mots : comprendre, mémoriser, apprendre. Ainsi traiter l'erreur comme révélateur permet de passer des seuils dans la façon d'apprendre.

B. Reconnaître l'erreur passera par des temps où, avec les élèves, on posera des questions sur notre mode de penser, mais pas seulement. On insistera sur les questionnements générateurs de connaissances, on essaiera d'exposer le à-mémoriser et le à-comprendre ensemble. ■

A. L'erreur est le signe d'une activité intelligente. Reconnaître ce signe et le faire reconnaître par l'élève est un élément sûrement de première importance dans l'ensei-

*Tous ces dessins peuvent être regardés dans l'autre sens.

DU CHINOIS OU PRESQUE

Nous avons eu l'occasion de distinguer les erreurs accompagnant normalement l'apprentissage, de celles qui trahissent une complète rupture de sens. Faudrait-il que ces dernières échappent à toute logique ? Lors de la première journée de stage, les participants ont été soumis à une épreuve intitulée «Du chinois ou presque». Il s'agissait de placer chaque professeur dans la situation de l'élève qui ne sait absolument pas ce qu'on lui demande et qui va tout de même proposer une réponse :

Exemple :

1) 2) 3) 4)

5) 6)

Faire de même avec :

Il suffit, pour retrouver le sens de la question, de considérer l'exemple comme la résolution dans R de $3(x - 2) < x + 2$ avec comme réponse finale $x < 4$.

Faire de même avec... donne $2(x - 1) < x + 1$ soit

ENQUÊTE SUR LA CURIOSITÉ

Hélène DELCLAUX - Champigny

Quels sont leurs penchants à voir et à savoir ? Comment les utiliser ?...

651 élèves de la banlieue parisienne et de l'académie de Rouen ont répondu à cette enquête. La population est regroupée en deux parties :

— Dans un premier tableau. 603 élèves de Rueil, Rouen et Champigny

- 69 collégiens de 3^e (Rueil)
- 201 lycéens de 2^e technologique (2T) et de 2^e économique (2EC)
- 172 lycéens de 1^{ère} du secteur technique et scientifique (1E-1F1-1F3-1S) et du secteur économique (1G-1B).
- 124 lycéens de Terminale du secteur technique (TE-TF1-TF2) et du secteur économique (TG-TB) notés TT et TEC.
- 37 étudiants de TS première année en électrotechnique et informatique industrielle.

— Au bas du premier tableau 48 lycéens de TC (Rouen et Champigny).

Souignons d'entrée que 63,5% des 603 élèves n'aiment pas la **géométrie** contre 31,2% sur l'échantillon TC. (difficile - inutile - trop de théorèmes pas concret).

Quels ressorts actionner pour ouvrir l'accès au courant mathématique ? Il nous faudra en général commencer par **rassurer** (49,3%) pour très vite **étonner** (48,3%) la première population (rq : en TC 50% étonner, 60,8 en TEC, 65% en 3^e). Nos jeunes cherchent d'abord une sécurité face à l'angoissante mouvance du monde moderne.

Le **concret**, qui rassure, l'emporte donc sur le **jeu** (sauf chez les plus jeunes (3^e) et les TEC).

Comment parviennent-ils à cette sécurité ? Par la pratique des chiffres dont la perfide séduction ternit la transparence des figures (1^{er} pop : 77,4% contre 22,4). Tristes figures qui portent les stigmates de la tornade passée d'un formalisme débridé !

Par le **travail** (oui collègue !) : On s'intéresse plutôt au raisonnement et 54% de la population reconnaît que l'intérêt peut naître d'un travail soutenu.

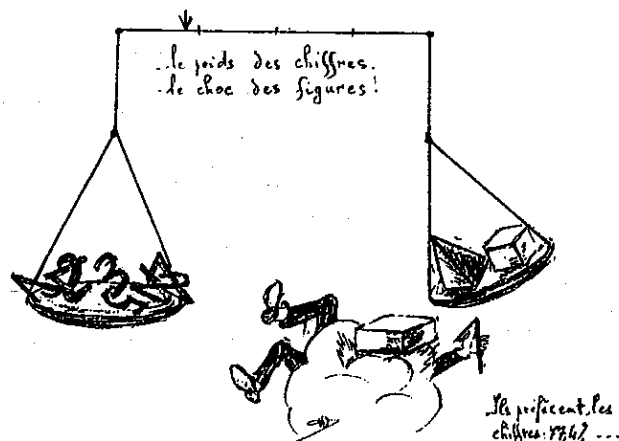
D'accord, il y a des exceptions sur ce point : les TC (déjà motivés ?) et les aînés du secteur économique ; on peut observer que les 1Ec et les TEC croient de moins en moins aux vertus du travail en math. alors que, parallèlement, leur intérêt pour l'**aspect historique** semble augmenter. Cette remarque ouvre-t-elle la porte à une révision des programmes dans ce secteur ?... (Prudence, à contrôler sur une population plus étendue).

Peut-être est-ce encore cette recherche de la sécurité qui oriente leur choix des Thèmes : on tourne, bien entendu, son regard vers le secteur choisi. Remarquons toutefois que les sections économiques aiment bien des thèmes différents. **Étonnons-les ! Variions nos thèmes.**

L'intérêt pour ces thèmes sous-entend une disponibilité de l'esprit, alors, en cas de blocage, comment réagissent-ils face à l'échec ? Révons un peu (10) : Des phrases stéréotypées, projections de sentiments d'adultes voisinent ici avec des réponses très personnelles :

- Stimulant : «fait un effort, après c'est génial» (3^e)
- Paresseux : «Je laisse faire ma mère» (3^e)
- Psychologue : «Les chiffres sont tes meilleurs copains» (2T)
- Original et profond : «Te vois-tu sans savoir compter ? Non ! et bien les maths sont une évolution du calcul qui donne une autre ouverture aux chiffres» (2T).
- Angoissé : «Les maths ? un secours dans la vie. (1E) **travaille !...**».
- Drôle : «Je te donne deux bonbons et je t'en reprends deux ; combien t'en reste-t-il ? Tu vois, ça sert les maths !» (1E).

D'angoissants «Ne fais pas comme moi, travaille si tu ne veux pas te trouver en G», témoignent de l'idée négative que nombre de ces élèves ont de leur section.



Alors, face à l'échec ? On invoque d'abord le côté utilitaire des maths (35,2 %) puis on conseille de travailler (16,3 %).

Travailler pour réussir, mais de quelle façon ?

- En petits groupes de préférence (64,6 %)
- Comptiez-vous encore, sur la recherche personnelle en dehors du lycée ? (6,9 % pardon pour le désenchantement !) (11⁽²⁾).

Gardiez-vous quelque illusion quant au développement, par votre enseignement des maths, de l'imagination des élèves ? Le point 14 (2) vous décidera définitivement (8,1 % sur la première population, 14,6 % en TC). Signalons que l'esprit d'initiative, l'esprit de synthèse, non mentionnés sur la liste, n'ont pas été évoqués dans le point 14 (5).

Sans doute, est-il trivial de rappeler que les

qualités d'esprit requises de nos jours dans divers domaines scientifiques, les modélisations utilisées dans de nombreux systèmes, nécessitent le développement chez nos jeunes de l'esprit d'initiative et de l'imagination.

L'enseignement des mathématiques, tout particulièrement en géométrie, se doit de contribuer à ce développement, favorisant ainsi le rétablissement de l'équilibre entre un formalisme contrôlé et une intuition dépourvue.

Les professeurs du premier cycle qui, à Rouen, ont participé à la réflexion sur cette enquête font confiance aux nouveaux programmes de 6-5^e relatifs à la géométrie et souhaitent vérifier leurs impressions.

Alors, rendez-vous dans cinq ans !

ENQUÊTE:

SUSCITER LA CURIOSITÉ EN MATHÉMATIQUES

(sous le patronage de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).

Renseignements personnels:

NOM: _____ PRENOM: _____
 Date de naissance: _____ Sexe: M F
 Etablissement: _____
 Classe: _____

(ENTOUREZ LE NUMERO CHOISI)

<p>1 Aimez-vous les mathématiques? un peu 1 beaucoup 2 pas du tout 3 En particulier aimez-vous la géométrie? OUI 1 NON 2 Si vous avez répondu Non, essayez d'expliquer pourquoi:</p>	<p>10 Il vous en faut un peu: votre petit frère se montre peu intéressé par les maths, vous souhaitez le motiver, que lui dites-vous? Courageux, vous décidez de le faire travailler. Commencez-vous par: - l'algèbre 1 - la géométrie 2 - autre chose, quoi? 3</p>
<p>2 Lisez les deux verbes qui suivent et notez en moins de 10 secondes: au premier abord les maths devraient plutôt ÉTONNER 1 RASSURER 2</p>	<p>11 Comment préférez-vous travailler en mathématiques? - En T.D. aimez-vous être - en terrain connu 1 - en terrain complètement nouveau 2 - en terrain neuf avec repères connus 3 Seul chez vous, mêmes questions: 1 2 3</p>
<p>3 Aimez-vous que les Maths - prennent l'allure d'un jeu 1 - aient un point de départ concret 2 - se présentent tantôt comme un jeu tantôt sous un aspect concret 3</p>	<p>12 Dans votre cas pensez-vous plus profitable un travail de maths: - en petit groupe 1 individuel 2</p>
<p>4 Préférez-vous travailler: - avec des chiffres 1 avec des figures 2</p>	<p>13 Quel rôle souhaitez-vous voir jouer aux calculatrices? - un rôle d'appoint 1 - un rôle plus important 2 L'ordinateur utilisé en classe semblerait plutôt: rassurant 1 inquiétant 2 attrayant 3</p>
<p>5 Pensez-vous être plus attentif à: - une phrase que vous lisez 1 - une phrase que vous entendez 2</p>	<p>14 Qu'attendez-vous des maths? - une meilleure organisation de vos connaissances dans tous les domaines 1 - un enrichissement de votre imagination 2 - un meilleur développement de votre raisonnement 3 - de votre esprit d'observation 4 - autre chose. Quoi? 5</p>
<p>6 Quand vous lisez un roman êtes-vous de ceux qui lisent d'abord la fin ? OUI 1 NON 2 En Matha êtes-vous sensible - plutôt au raisonnement 1 - plutôt à la conclusion 2 - aux deux 3</p>	<p>Quel(s) sont, dans l'ordre, parmi ces qualités, les 2 que vous souhaitez développer en priorité par la pratique des maths? <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>
<p>7 Pensez-vous que le dicton populaire "L'appétit vient en mangeant" puisse être appliqué aux Maths dans votre cas? OUI 1 NON 2</p>	
<p>8 L'aspect historique au début d'un cours: - vous met en appétit pour la suite 1 - vous ennueie plutôt 2</p>	
<p>9 Si vous êtes engagé dans un secteur économique E, technologique T, ou scientifique S (précisez en cochant) Préférez-vous les thèmes choisis: - dans votre secteur 1 - dans un secteur différent 2</p>	

NB : prévue au départ pour des sections techniques et économiques, l'enquête a été étendue en 3^e, 1^e, TC, afin de suivre l'évolution des points 1 et 4.

LES TRAVAUX D'ARCHIMÈDE EN GÉOMÉTRIE

Bernard BETTINELLI - Besançon

Pour les Grecs qui furent les inventeurs de la géométrie, tout concept est profondément visuel. Ils furent les artisans de la visibilité : l'objet est d'abord lié à une forme ; le nombre est profondément enraciné dans la matière géométrique.

Archimède fut une plaque tournante dans ce courant géométrique, intégrant et exploitant au mieux l'ensemble des connaissances qu'Euclide avait rassemblées peu de temps avant lui ; mais aussi, grand intuitif, tourné vers l'avenir, il se lance dans des problèmes de mesures complexes comme l'aire de la sphère — bien que ses prédécesseurs se soient cassé la tête sur la quadrature du cercle.

LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

Les moyens qu'il met en œuvre pour parvenir à ses fins sont de deux sortes. Le premier, qu'il dit tenir d'Eudoxe dont il ne nous reste aucun écrit, est la méthode d'exhaustion qui porte en elle l'intuition de la notion de limite. Elle fonctionne à des variantes près — toujours de la manière suivante : l'objet complexe à mesurer est encadré par deux autres objets dont il sait déterminer la mesure par des moyens classiques à son époque (essentiellement basés sur la proportionnalité). Ces deux objets doivent pouvoir être construits aussi proches l'un de l'autre qu'il le veut ; en d'autres termes, une mesure de même nature étant donnée par avance, il montre qu'il sait construire les objets encadreurs, de telle manière que la différence de leurs mesures soit inférieure à la mesure donnée. Si, dans le même temps, le calcul de la mesure des objets encadreurs fait apparaître une mesure fixe comprise entre leurs deux mesures, Archimède sait qu'il a gagné son pari et que la mesure fixe est celle de l'objet étudié. Il ne se contente jamais de l'affirmer, mais il termine toujours sa démarche par une longue démonstration par l'absurde sur le refrain suivant :

«La mesure de l'objet inconnu ne peut qu'être la mesure fixe intermédiaire, car, sinon, elle serait différente, et, donc, la différence existerait. Je peux donc concevoir de construire deux objets encadreurs de mesures plus proches que cette différence. Mais alors la mesure de l'objet inconnu et la mesure fixe, tous deux coincés par les objets encadreurs, seraient plus proches l'une de l'autre que leur propre différence ! Ce serait un comble !».

C'est ainsi qu'Archimède sait que l'aire d'une sphère est quatre fois plus grande que celle d'un de ses grands cercles ; que le volume d'une boule est les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit ; que l'aire d'un segment de parabole est les $\frac{4}{3}$ de celle du triangle de même base et même sommet ; que le volume d'un segment de parabolode de révolution est moitié de celui du cylindre circonscrit ; ou qu'il sait ramener à un secteur circulaire l'aire de n'importe quel secteur de la spirale qui porte son nom.

LA MÉTHODE PAR TRANCHES

Le second moyen géométrique utilisé est ce qu'il appelle la méthode mécanique, dont il dit qu'elle est un moyen d'approche efficace, mais intellectuellement moins satisfaisant que la méthode d'exhaustion. Il s'agit d'une version très intuitive du calcul intégral. Partant du célèbre théorème des leviers qu'il a construit pour la détermination du centre de gravité des objets, il se donne un levier imaginaire qui transperce deux objets imbriqués comme un segment de parabolode et son cylindre circonscrit, ou une boule et son cylindre circonscrit — l'un étant inconnu et l'autre connu par son centre de gravité. S'il arrive à trouver un point d'appui pour son levier de telle manière que s'il coupe une tranche verticale simultanée quelconque de ses deux objets, la tranche de l'inconnu transportée en un point opposé est équilibrée par la tranche de l'objet connu laissée en place, il affirme que l'objet inconnu transporté en entier au point opposé sera équilibré par l'objet connu laissé en place.

C'est ainsi qu'il détermine une seconde fois l'aire d'un segment de parabole, le volume du parabolode, de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde de révolution ; le volume de la boule ou d'un segment de boule...

Comme il m'apparaît fondamental de donner aux élèves du Secondaire un engagement affectif dans les mathématiques, basé sur leur sens de la réalité, et leurs perceptions, l'œuvre d'Archimède m'a paru extraordinaire d'images, de relations, d'intuitions et j'ai entrepris à l'IREM de Besançon de traduire les images décrites dans un texte très difficilement lisible, en images affectives grâce aux moyens audio-visuels permis à notre époque. C'est ainsi que la première traduction fut faite pour le rétro-projecteur, à l'aide d'un jeu de rhodoïds superposés et de feutres colorés.

Les développements extraordinaires de la micro-informatique m'ont conduit à transposer ce travail sous forme d'un livre d'images où les trames remplacent les couleurs et où l'essentiel est dit par l'image. Le texte, réduit au maximum, ne fait qu'apporter une confirmation. Il faut presque le voir comme une bande dessinée géométrique.

Les thèmes développés dans des chapitres indépendants sont ceux qui m'ont paru toucher aux concepts les plus fondamentaux : l'aire du segment de parabole, les révolutions de spirale, la méthode mécanique, l'aire de la sphère et le volume de la boule. Les prolongements qui poussent plus loin l'exploitation d'un thème, ont été proposés comme exercices. Ainsi l'ouvrage a été voulu comme un recueil de thèmes lisibles par des élèves de second cycle, et utiles comme introduction de nouveaux outils plus généraux, plus performants tout en comprenant quel besoin a poussé les hommes à un moment propice de leur histoire à créer de nouveaux concepts, de nouveaux outils. A chaque enseignant de sentir que l'étude d'un thème peut engager affectivement plutôt qu'intellectuellement ses étudiants et ouvrir une nouvelle porte de leur conscience. ■

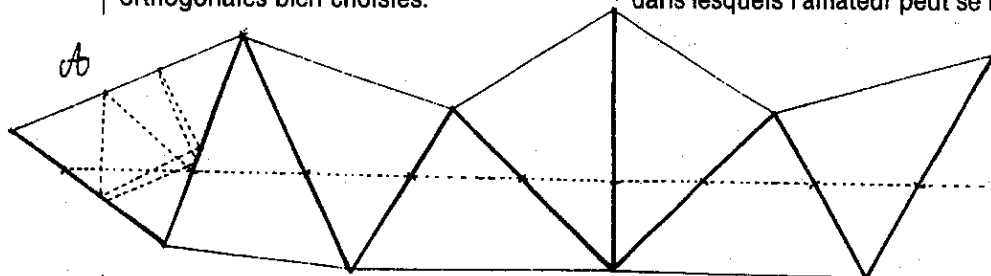
LE BILLARD POLYGONAL

Bernard CAUMARTIN - Dijon

Considérons un polygone convexe, dont les côtés consécutifs seront numérotés de 0 à $N - 1$. Sauf cas très particuliers, la trajectoire d'une boule (supposée ponctuelle) paraît rapidement échapper à l'intuition et s'avérer fort difficile à étudier. On peut, par exemple, s'intéresser à la suite β des numéros des côtés des rebonds successifs, suite d'éléments de l'ensemble $\{0, \dots, N - 1\}$.

Ici, c'est le point de vue inverse qui a été adopté : une suite β d'éléments de $\{0, \dots, N - 1\}$ (finie ou non) étant donnée, astreinte à vérifier $\beta(n + 1) \neq \beta(n)$ pour tout n , le problème est de savoir s'il existe une ou plusieurs trajectoires associées à cette suite. De telles trajectoires seront appelées β -trajectoires.

La méthode utilisée pour aborder ce problème consiste à «déroiler» les β -trajectoires éventuelles en des portions de droites par applications successives de symétries orthogonales bien choisies.



Au cours de ce déroulement, on met en évidence une ligne brisée \bar{A} (représentée en traits épais sur la figure) formée par certaines images de côtés de A de telle sorte que les β -trajectoires correspondent de manière biunivoque aux droites qui coupent chaque côté de A . Le problème se ramène donc à la détermination de toutes ces droites ; à chacune correspondra une β -trajectoire.

Ce procédé graphique, pour intéressant qu'il soit, n'en demeure pas moins a priori réservé (en théorie) à des suites β finies. Que se passe-t-il alors lorsque la suite β est infinie ? On démontre que, pour qu'il existe au moins une β -trajectoire, il est nécessaire que la ligne brisée \bar{A} soit non bornée et contenue dans une certaine bande du plan. Si cette condition est réalisée, alors il existe zéro, une ou une infinité de β -trajectoires qui sont toutes parallèles entre elles et de «longueur» infinie. A ce stade, il paraît difficile d'en dire beaucoup plus sans imposer à β des conditions

plus draconiennes. Par ailleurs, la recherche de trajectoires périodiques est alléchante et il est immédiat que la suite associée à une trajectoire périodique est elle-même périodique. On se propose donc, réciproquement, de supposer β périodique de période p . On peut alors démontrer, et c'est une application non banale de la théorie des isométries du plan, qu'il existe zéro ou une infinité de β -trajectoires, toutes périodiques. Plus précisément :

- lorsque p est pair, les β -trajectoires sont p -périodiques
- lorsque p est impair, les β -trajectoires sont $2p$ -périodiques et seule l'une d'elles est p -périodique.

Toujours dans le cas où β est périodique, la théorie fournit essentiellement des conditions nécessaires à l'existence de β -trajectoires. Dans chaque cas «concret» se pose évidemment le problème de la suffisance de ces conditions. Ceci donne lieu à de nombreux exercices non triviaux de géométrie dans lesquels l'amateur peut se livrer à une

véritable activité mathématique, avec sa dialectique «conjectures-preuves». Le lecteur alléché pourra se reporter à la brochure citée plus haut, dans laquelle il trouvera également l'énoncé de plusieurs problèmes généraux, encore ouverts à la connaissance de l'auteur.

Ces quelques lignes auront, je l'espère, mis en «appétit» le lecteur qui, s'il souhaite satisfaire sa curiosité, pourra se procurer :

— d'une part la brochure en question auprès de l'IREM de Dijon, à l'adresse suivante :

Université de Dijon - Faculté des Sciences
-I.R.E.M. - B.P. 138 - 21004 DIJON Cédex.

— d'autre part le logiciel gratuitement auprès de :

Bernard CAUMARTIN - Lycée LAMARTINE,
avenue des Garses, 71000 MACON
en lui envoyant une disquette vierge (5 pouces 1/4) et la somme de 3,70 F en timbres poste pour l'expédition. ■

L'ESPACE EN 2^{de} - 1^{ere}

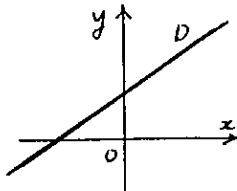
Aimé VOGT - Dijon

Est-il possible de rendre l'enseignement de la géométrie dans l'espace moins ardu grâce à un outil analytique sommaire ?

Avertissement

Il s'agit de montrer comment on peut utiliser \mathbb{R}^3 pour préparer les élèves aux théorèmes employés traditionnellement et qui apparaissent d'emblée dans les cours sous forme de «règles» (ou de «propriétés»). Le résumé qui suit ne peut donner qu'une faible idée des commentaires d'une intervention qui a duré environ une heure et demie.

Introduction



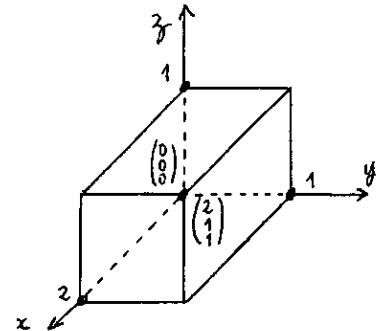
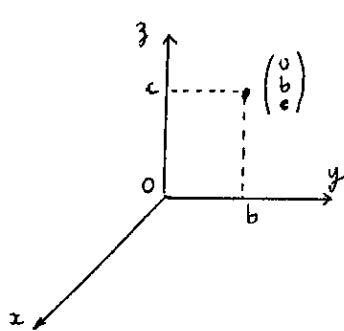
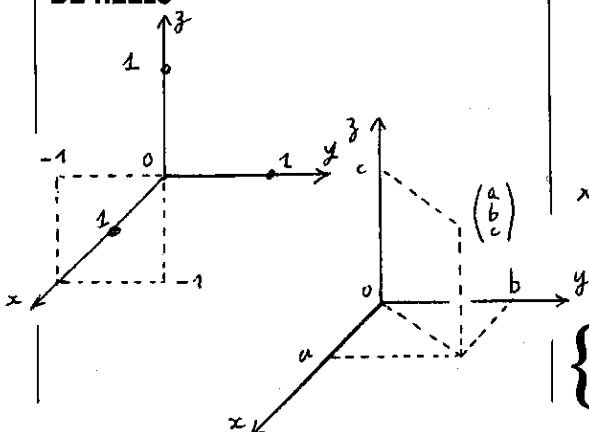
$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \}$$

$$D = \{ (x, y) ; ux + vy = h \}$$

$$(x, y) \in D \iff t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + t.\alpha \\ \text{et} \\ y = y_0 + t.\beta \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R} \}$$

I. REPRÉSENTATION D'UN TRIPLET DE RÉELS

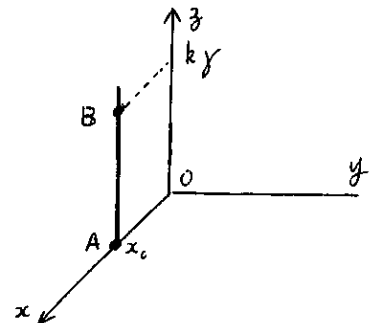
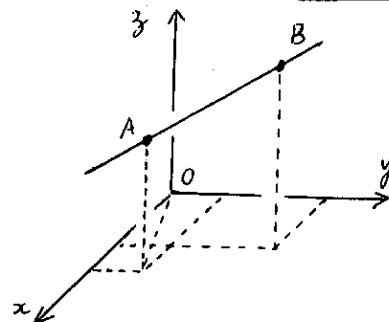


Triplets de réels (x, y, z) = point mathématique de coordonnées x , y et z .

II. DROITES DE \mathbb{R}^3

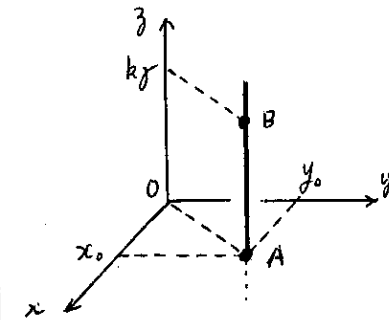
$$\begin{cases} x = x_0 + t.\alpha \\ y = y_0 + t.\beta \\ z = z_0 + t.\gamma \end{cases}$$

t	0	k
x	x_0	$x_0 + k.\alpha$
y	y_0	$y_0 + k.\beta$
z	z_0	$z_0 + k.\gamma$
M	A	B

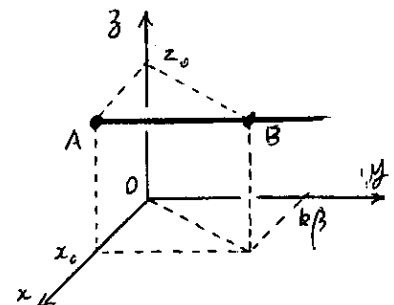


$$\begin{cases} x = x_0 + t \times 0 & (x = x_0) \\ y = 0 + t \times 0 & (y = 0) \\ z = 0 + t \times \gamma \end{cases}$$

37



$$\begin{cases} x = x_0 + t \times 0 & (x = x_0) \\ y = 0 + t \times 0 & (y = 0) \\ z = 0 + t \times \gamma \end{cases}$$

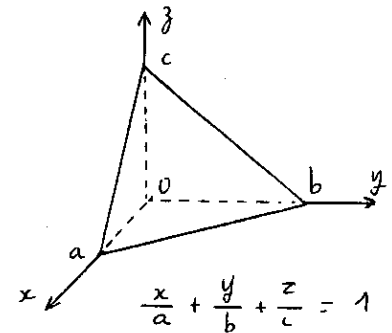
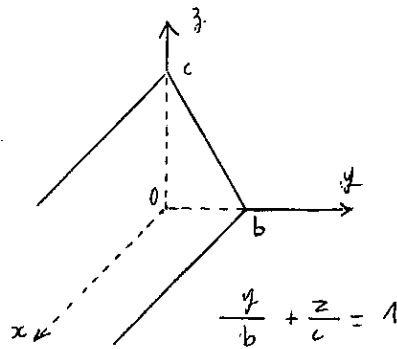
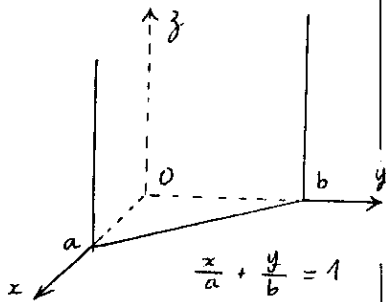
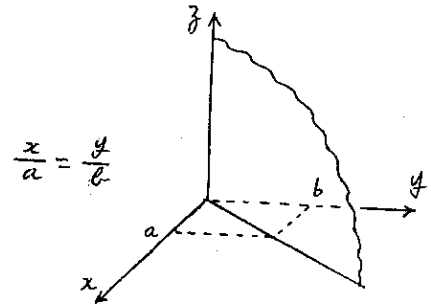
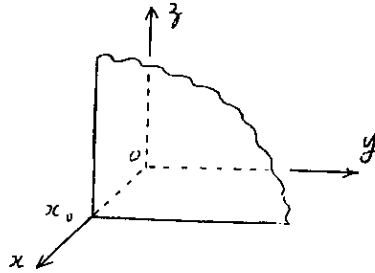
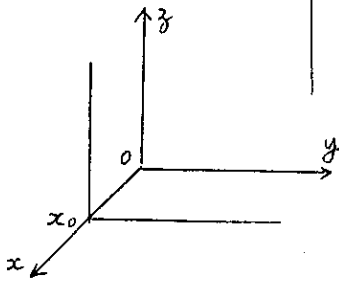


$$\begin{cases} x = x_0 + t \times 0 & (x = x_0) \\ y = 0 + t \times \beta & \\ z = z_0 + t \times 0 & (z = z_0) \end{cases}$$

III. PLANS DE \mathbb{R}^3

$P = \{ (x,y,z); ux + vy + wz = h \}$

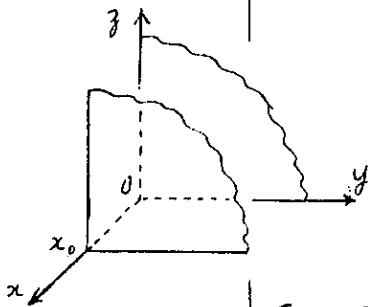
Exemple : $P = \{ (x,y,z); x = x_0 \}$



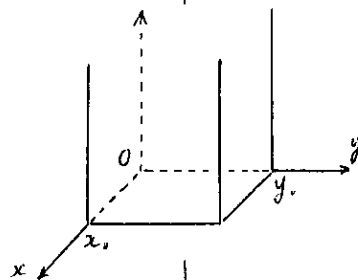
IV. INTERSECTIONS DE PLANS

$P = \{ (x,y,z); ux + vy + wz = h \}$

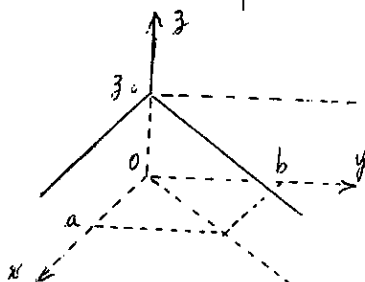
$P' = \{ (x,y,z); u'x + v'y + w'z = h' \}$



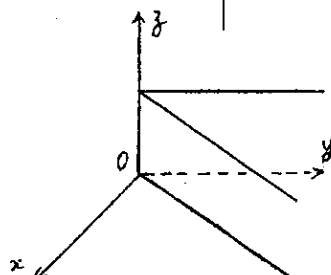
$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ x = x_0 (\neq 0) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x_0 \\ \text{et} \\ y = y_0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x = x_0 + t \times 0 \\ y = y_0 + t \times 0 \\ z = 0 + t \times \gamma \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} x/a = y/b \\ \text{et} \\ z = z_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = t \\ y = t \times b/a \\ z = z_0 \end{cases} \text{ c.a.d. } \begin{cases} x = 0 + t \times 1 \\ y = 0 + t \times b/a \\ z = z_0 + t \times 0 \end{cases}$$

V. ÉQUATIONS VECTORIELLES DE DROITES ET DE PLANS

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha' \\ \beta + \beta' \\ \gamma + \gamma' \end{pmatrix}$$

$$t \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \alpha \\ t \times \beta \\ t \times \gamma \end{pmatrix}$$

● Triplet de réels (α, β, γ) = vecteur de composantes α, β et γ .

● Notation de Grassmann

$$A \in \mathbb{R}^3, \quad B \in \mathbb{R}^3, \quad B - A = \vec{AB} \quad (\vec{AB} \in \mathbb{R}^3)$$

● Équations vectorielles d'une droite

$$M = A + t \cdot \vec{V} ; \quad M = A + t \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AM} = t \cdot \vec{V} ; \quad \vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$$

● Équations vectorielles d'un plan

$$M = A + t \vec{V} + t' \vec{V}'$$

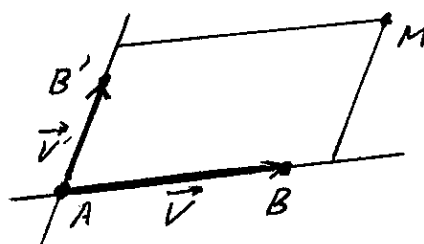
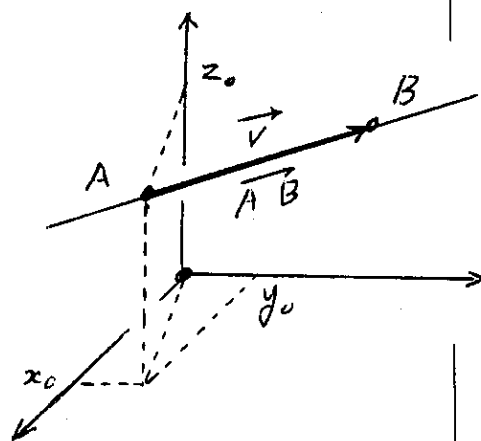
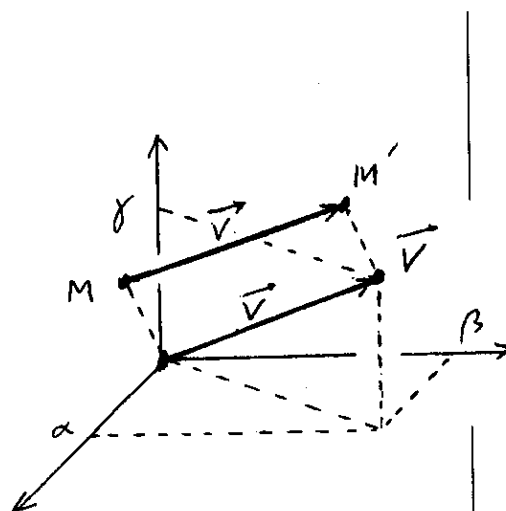
$$\vec{AM} = t \vec{V} + t' \vec{V}'$$

$$M = A + t \vec{AB} + t' \vec{AB}'$$

$$\vec{AM} = t \vec{AB} + t' \vec{AB}'$$

Exemple :

$$x + y + z = 1 \quad \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = 1 - t - t' \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

PETITE GÉOMÉTRIE DÉDÉISTE

T. HAMEL, F. LACHAUX, G. LEMIR, L. SINEGRE - Rouen

L'idée première de cette intervention nous est venue en observant quelques propriétés des isométries du cube, avec des élèves de Première S, sur les dès qu'ils avaient apportés.

- Après avoir, comme en classe, cherché tous les «mouvements» possibles sur les deux types de dès (figurant l'orientation), on peut aussi, à l'inverse, calculer le nombre des isométries en «conduisant» toutes les numérotations possibles. La méthode s'applique alors aux autres polyèdres possédant un centre de symétrie, en particulier à l'icosaèdre, quitte à rajouter quelques contraintes métriques de construction.

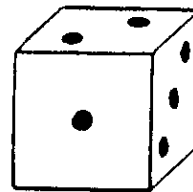
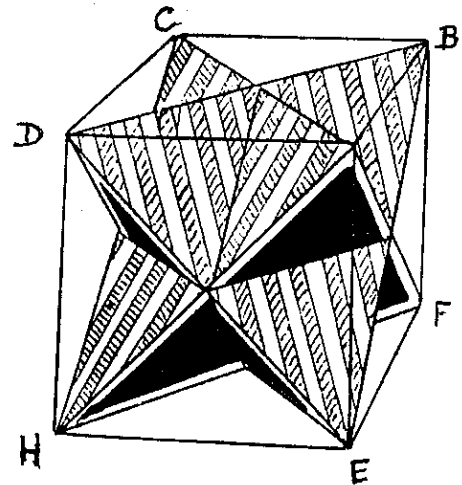
- L'idée d'étudier les isométries grâce aux dès a intéressée les auditeurs, nous pensons qu'elle peut aussi aider à visualiser les étapes de théorèmes plus compliqués.

I. Un dé pour le cube et le tétraèdre

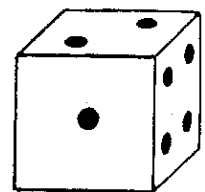
1. Fabrication d'un dé cubique : les deux types de dès.

2. Définition des isométries positives : elles conservent les types, négatives : elles échangent les types. Dénombrement des isométries du cube.

3. Recherche des axes et des ordres des isométries positives : groupe du cube.



Type 1



Type 2

4. Application à l'étude du groupe du tétraèdre.

Une fois le 1 avancé devant soi, le 2 placé au sommet, il y a deux croix pour le couple (3,4).

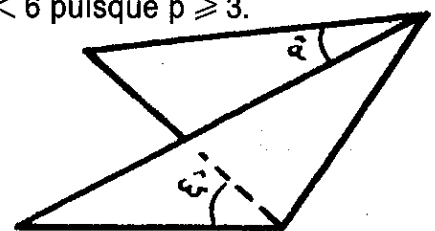
II. Le théorème de Platon et le tétraèdre

Il y a au plus cinq polyèdres réguliers.

1. Les sommets d'un polyèdre régulier sont cosphériques.

2. Les p sommets adjacents à un sommet fixé d'un polyèdre régulier sont coplanaires.

3. La condition $\hat{\alpha} < \hat{\omega}$ conduit après calcul à l'équation $p(n-2) < 2n$ soit $n < 6$ puisque $p \geq 3$.



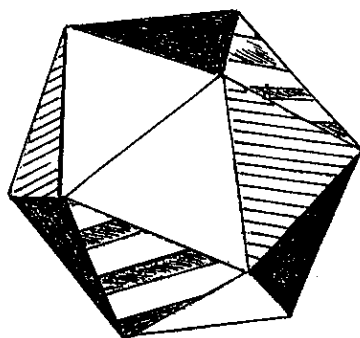
n étant le nombre de côtés d'une face du polyèdre.

$n = 3, p = 3$ donne le tétraèdre
 $n = 3, p = 4$ donne l'octaèdre
 $n = 3, p = 5$ donne l'icosaèdre
 $n = 4, p = 3$ donne le cube
 $n = 5, p = 3$ donne le dodécaèdre.

III. Un dé icosaédrique

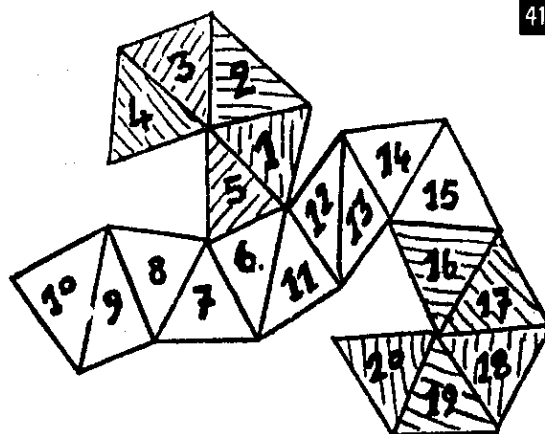
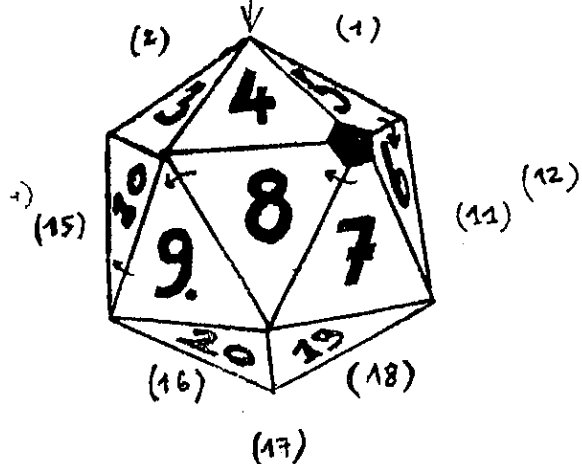
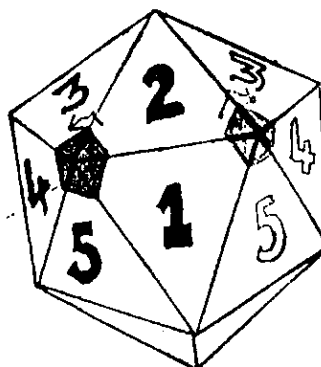
On construit d'abord le dé. Puis on dénombre et décrit les isométries de l'icosaèdre.

On fabrique ensuite un dé icosaédrique à cinq couleurs sur lequel le groupe des déplacements A opère fidèlement, pour visualiser l'isomorphisme entre A et A_5 . On trouve alors une démonstration géométrique de la simplicité de A_5 .



BIBLIOGRAPHIE :

- Petite géométrie. Dedéiste. IREM Rouen.
- Les Polyèdres par Louis Joly (Blanchard 1979).
- Les cinq polyèdres de R^3 et leurs groupes par Arnaudies (CDU Cédés Paris).
- Les dossiers et matériels du Plot : APMEP orléans.
- Polyèdres dans l'espace (80 p.) (dossier)
- Kit-polyèdres 1 et 2.
- Affiche-polyèdre (cf. bon de commande).



ORGANISATION D'ACTIVITÉ DU TYPE TOURNOI, RALLYE, OLYMPIADES...

Daniel FREDON,
Président du Tournoi Mathématique du Limousin

● La plupart des participants souhaitent des informations pour leur faciliter une éventuelle création d'épreuve du type Olympiades, qui évite le risque de l'élitisme et qui favorise l'imagination à partir de problèmes ouverts.

Plusieurs IREM ont fait fonctionner des rallyes qui n'existent plus Besançon, Clermont-Ferrand, Dijon, Rennes et Brest. A cette liste, il faut ajouter le critérium mathématique d'aquitaine organisé par un recteur de Bordeaux après un voyage en Australie.

Sont actuellement vivants :

— le Rallye d'Alsace, le pionnier, qui s'adresse aux élèves de premières et terminales individuellement ou par équipes de deux (rapports d'activité disponibles à l'IREM de Strasbourg) ;

— les Rallyes départementaux de l'Académie d'Orléans-Tours qui s'adressent aux élèves de troisième et de seconde concourant par classes entières (compte-rendus disponibles à l'IREM d'Orléans-Tours) ;

— diverses épreuves en Ile de France ;

— le Tournoi du Limousin. Les participants sont les élèves de premières et terminales de **toutes sections**, par équipes de deux ou individuellement. Les sujets sont communs, mais les récompenses sont séparées par sections. En 1988, il y a eu 1226 inscrits. La couverture médiatique est importante et les lots nombreux et de valeur.

Le Tournoi Mathématique du Limousin est une association (loi 1901 créée par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de maths de la faculté des Sciences de Limoges, l'IPR de maths de Limoges, l'IREM de Limoges.

La Régionale APMEP y joue un rôle déterminant. Et la mobilisation des collègues a conduit à une remontée des effectifs APMEP.

Pour tout renseignement supplémentaire, vous pouvez vous adresser à :
Daniel FREDON, 127, rue Gaston Charlet,
87000 LIMOGES.

● Par ailleurs, il est apparu que le championnat de France des Jeux Mathématiques avait des objectifs différents et compatibles avec ceux des épreuves analogues au

Tournoi Mathématique du Limousin. Pour des précisions éventuelles, s'adresser à :
Gilles COHEN, championnat de France des Jeux Mathématiques, 76, bd Magenta,
75010 PARIS.

● D'autre part, Aimé VOGT, 4, rue Th. de Bèze, 21000 DIJON souhaite organiser des jeux télévisés utilisant les mathématiques, et plus généralement les sciences.

● En conclusion, tous les participants reconnaissent le côté dynamique apporté par ces diverses épreuves. Mais attention à ne jamais les opposer à la pratique quotidienne de la classe et laisser croire que, d'ordinaire, les mathématiques sont ennuyeuses.

...A PROPOS DE LA CRÉATION DE CHAMPIONNATS DE FRANCE DE MATHÉMATIQUES...

Le Comité de la Régionale de Limoges, réuni le vendredi 16 juin, s'il se déclare d'accord avec le principe de la création d'une épreuve nationale, tient à faire plusieurs remarques :

1. Nous souhaitons vivement que ne soit pas mis en péril ce qui est organisé à l'échelon local, comme c'est le cas du Tournoi Mathématique du Limousin. Cette année, notre tournoi a mobilisé plus de cent collègues, et 1627 élèves de 1^{ère} et terminale y ont participé. Même si son est animé par le désir de créer, au nom d'un grand dessein nécessaire de préserver le travail qui est fait par plusieurs régionales. Briser cette diversité pour uniformiser constituerait en fait un recul dans notre efficacité pour la promotion des mathématiques.

2. Nous ne sommes pas d'accord avec l'engagement de notre association dans un tel projet alors que cette question, à notre connaissance, n'a pas été discutée au Bureau National.

3. Nous trouvons inadmissible que les Régionales n'aient pas été consultées et, par conséquent, dans l'état actuel des choses, nous refusons de participer à cette opération ; en effet, la mise en place d'un tel championnat risque de créer, avec les actions locales une confusion et une inflation d'activités qui ne serviraient pas les mathématiques. ■

RESSUSCITER LA CURIOSITÉ DES ÉLÈVES

Sylviane GASQUET - Grenoble

1. Quand les camemberts sont carrés...

— Est-il possible de construire simplement un camembert carré correct (c'est-à-dire tel que les aires des secteurs partant du centre soient proportionnelles aux pourcentages) ? Florence, élève de seconde 15, proposera une belle solution... alors qu'à première vue je ne pensais pas qu'il y avait une solution facile à réaliser !
Qu'en pensez-vous ?

Réponse : Comme tous les triangles ont la même hauteur, leur aire est proportionnelle à leur base. Donc, en faisant un carré de 25 petits carreaux de côtés, le périmètre du carré fait 100, et on découpe le périmètre en suivant les pourcentages : 12% = 12 carreaux de base.

Cet exemple est décrit dans «Langage des graphiques». CRDP de Grenoble.
Pour rendre plus vivant le résumé de cette séquence, précisons qu'elle fut faite une fois avec un magnétophone pour trois élèves, et que ce fut pour moi l'occasion de me demander si réellement je savais entendre mes élèves...

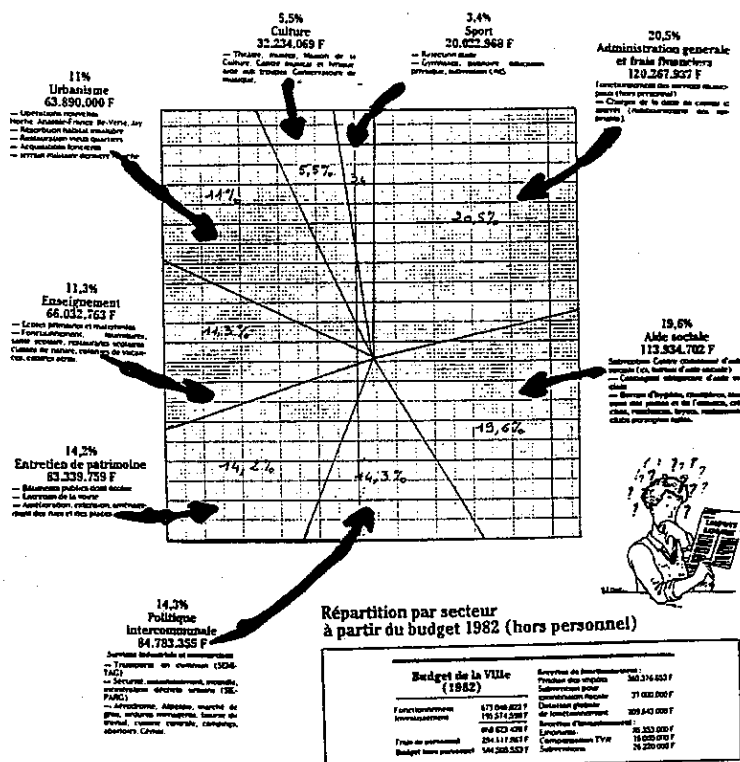
— Madame, c'est comment l'aire d'un triangle ?

— «La base par la hauteur divisé par deux» fut souvent ma réponse lapidaire... Oui, je savais bien que ce «raccourci» n'est pas correct, mais quand on doit répéter deux fois à chaque groupe, on raccourcit toujours... Oui, ce résumé n'était pas ambigu pour moi, mais je ne savais pas qu'il l'était autant pour mes élèves de secondes...

Voici quelques réflexions relevées sur les bandes à ce sujet :
«la base, c'est dans un triangle isocèle...»

TOUT SUR... L'IMPOT LOCAL

Où va l'impôt



«Ouh là là, dans ce cas là y a pas de base...»
 Eric : «La base c'est le plus grand côté»
 Frédéric : «C'est pas l'hypoténuse...»
 Bruno : «Et quand le triangle est équilatéral ?»

Autre groupe :

Laure : «T'auras trois hauteurs, tu prends laquelle ?» Discussion confuse...
 Laure : «Mais quelle hauteur ? vous savez pas ?»

L'observateur (dont la consigne était de noter les attitudes en restant muet... mais il n'y tient plus !) : «La hauteur, c'est celle qui fait un angle droit».

Le chœur unanime des trois filles : «Mais elles font toutes un angle droit !»

Cécile subitement inspirée : «C'est la hauteur relative à la base»

Laure : «ça dépend quelle base on prend !»

Cécile «ça change suivant la hauteur...»

Ou encore à propos du mode de calcul :

«Le tout divisé par 2 ?»

«tu divises le tout ou juste la hauteur ?»

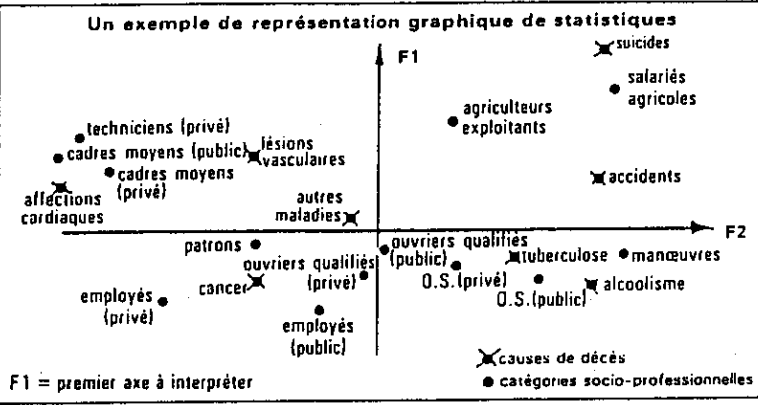
Et Éliane qui se gronde elle-même : «J'arrive jamais à me souvenir : c'est la hauteur par la moitié de la base ou la base par la moitié de la hauteur ?»

Parfois c'était presque du Raymond Devos, mais justement pour nos élèves, trop souvent nos phrases manquent de sens...

Cela dit, pour ceux qui ne connaissent pas déjà la réponse, est-il aisé de faire un graphique en camembert carré qui soit mathématiquement correct (dont les portions, partant du centre, aient une aire proportionnelle aux chiffres à illustrer) ?
 (Précisons, car j'ai déjà reçu des lettres à ce sujet, que j'emploie le mot chiffre là où le professeur de maths parlerait de nombre, mais dans le travail interdisciplinaire, le professeur de maths n'a aucune raison d'imposer son langage).

Le graphique ci-dessous permet d'apprécier la relation entre causes de décès et catégories socio-professionnelles en France. Il visualise, après des opérations mathématiques complexes, une information se rapportant aux 8 principales causes de décès des hommes âgés de 46 à 54 ans entre 1956 et 1960 et répartis en 13 catégories socio-professionnelles. Ces statistiques tiendraient dans un tableau à double entrée de 8 lignes et 13 colonnes, mais les relations existantes ne seraient pas visibles. Plus la distance sur le graphique entre cause de décès et catégorie socio-professionnelle est courte, plus la corrélation est grande. Ainsi, l'alcoolisme est une cause de mortalité importante chez les manœuvres et les ouvriers spécialisés, le cancer chez les patrons...

2. Initiation à l'analyse factorielle...



Il s'agit ici de faire construire à des élèves un graphique semblable au graphique rencontré dans leur livre et dont le commentaire est faux.

Le graphique est reproduit ci-contre, mais il serait trop long de détailler ici les calculs. Signalons qu'il s'agit d'une belle séquence pouvant convenir en fin de seconde car curieusement on voit apparaître le produit scalaire...

En effet, l'information est portée par l'angle que font deux vecteurs représentés par :
 — (origine, point signalant une profession)
 — (origine, point signalant une cause de décès).

Si l'angle est aigu, c'est qu'il y a attraction : la catégorie socio-professionnelle considérée est sur-représentée parmi les causes de décès (exemple : suicide et agriculteurs).
 Si l'angle est obtus, il y a répulsion (suicides et employés du secteur privé).
 Si l'angle est droit, il y a indépendance : parmi les décès dus aux lésions vasculaires, les employés du secteur public sont représentés proportionnellement à leur effectif dans la population active...

Pour ceux qui veulent connaître les détails, voir l'autre fascicule «Langage des Chiffres», toujours au CRDP de Grenoble (ou bien lire l'Analyse factorielle de P. Cibois, collection Que sais-je).

COMMENTAIRES DE LA FICHE.

— La fiche est donnée avec des consignes très ouvertes : «Il ne s'agit pas ici de discuter de la répartition du budget de la ville (ici du temps du maire Dubedout), mais de la façon de représenter graphiquement ces chiffres».

— Cette fiche permet de mettre en œuvre les notions suivantes :

- Aire d'un triangle,
- Aire d'un quadrilatère par décomposition en deux triangles,
- Notion de fonction donnée par une correspondance numérique (pourcentages → aires) (pourcentages → angles)
- Proportionnalité.
- Découverte de la notion de croissance, dont la proportionnalité n'est qu'un cas particulier,
- Notion de contre-exemple.
- Rôle d'un graphique. Impact visuel.
- Construction d'un camembert circulaire et étude de proportionnalité dans le cercle.

— Ce travail a lieu par groupes de trois ou quatre, la classe étant partagée en deux. Durée 1 h 30.

3. Une histoire de bouchons...

● Certains d'entre vous se sont aventurés dans la recherche suivante, dont je redonne le texte ici.

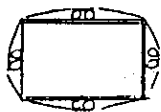
RECHERCHE :

A propos de l'encadrement d'un tableau...

Lorsque l'on veut «serrer» le tour d'un cadre pendant que la colle sèche, on procède de la manière suivante :

On place une ficelle autour du cadre. On glisse 8 bouchons comme l'indique la figure, ce qui est toujours possible car justement on a du mal à bien tendre la ficelle. Puis on écarte les bouchons vers les coins. Expliquer pourquoi cela tend la ficelle...

(On pourra faire une étude avec des bouchons de 1 cm de rayon, et un cadre de 20 sur 30, par ex.)

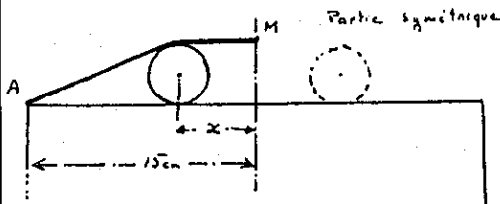


● Vers la fin de l'heure, je suis allée voir leurs trouvailles. TROIS pistes différentes ont été choisies, et elles sont toutes les trois intéressantes !

Alors je vous les soumets, avec encore de quoi chercher, pour que vous profitiez tous des idées de chacun...

...UN DÉMARRAGE COMMUN POUR TOUS.

Vous avez restreint votre étude à un seul côté, et même, parfois à un demi côté. Deux choix étaient possibles pour la variable, nous allons nous accorder sur un choix, mais l'autre est aussi bon.

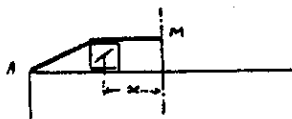


NOTATION : longueur AM en fonction de x : $L(x)$

...ET SI ON MODIFIAIT UN PEU LE PROBLÈME POSÉ ?

Piste suivie par Philippe.

Gênés par les cercles, ces élèves ont décidé de remplacer les bouchons par des petits bouts de bois à section carrée (2 cm de côté).



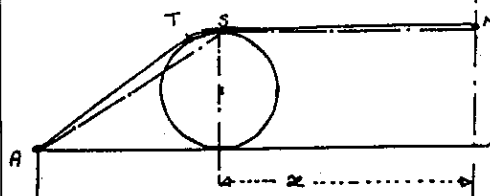
Clarifions donc le contrat scolaire.

— L'idée de chercher un problème «voisin» est une idée souvent fructueuse et effectivement utilisée par des mathématiciens professionnels. MAIS... ne faites cela QUE dans une recherche. Soyez bien conscient que, dans un devoir «traditionnel», on vous demande de répondre à LA question posée par le prof., et pas à une autre ! (Ceci-dit, cette année, il ne vous sera jamais interdit de proposer AUSSI une question voisine qui vous serait venue à l'esprit).

...ET SI ON SE CONTENTAIT D'UN «A PEU PRÈS» ?

Piste suivie par Colin et Éric.

Certains ont décidé de «couper un peu le bouchon», c'est-à-dire de simplifier le cheminement de la ficelle.



Au lieu de suivre le chemin RÉEL «ATSM», ils prennent ASM. Pour le moment, ils ont trouvé la longueur de ASM (que nous noterons L') en fonction de x , par un calcul voisin de celui du groupe 1.

S'ils arrivent à montrer que $L'(x)$ est croissante, auront-ils répondu à la question posée par la recherche ? Pourquoi ?

Ce groupe utilise ici une méthode très employée aussi par les mathématiciens et que vous utiliserez aussi au lycée : trouver une fonction plus petite (ou plus grande), travailler sur cette nouvelle fonction pour en déduire des résultats sur celle qui nous intéressait. (on appelle cela «encadrer» une fonction. Ou encore trouver une «minoration» ou une «majoration»).

Oui mais... cette méthode n'est efficace qu'à deux conditions :

— que les renseignements que l'on peut trouver pour la nouvelle fonction se TRANSFÈRENT à celle qu'on devait étudier ! sinon on travaillerait pour rien sur la nouvelle fonction !

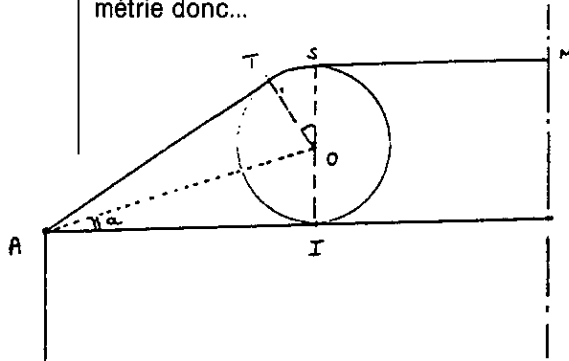
— et aussi que la nouvelle fonction soit l'étude plus simple que celle qu'on avait, sinon cela ne vaut pas la peine !

Que faut-il penser du nouveau chemin ASM proposé par Éric et Colin ? J'attends vos idées !

**...LA PISTE DES MINUTIEUX !
OU DES INTRANSIGEANTS !**

Piste suivie par Florence, Frédéric, William. Ceux-là ont décidé de s'en tenir au chemin réel ATSM et donc de le regarder de près. De ce fait, cela va les conduire à retrouver ou à découvrir des propriétés du cercle et de ses tangentes, propriétés utiles à connaître.

— Comment évaluer la longueur de AT ? Frédéric a trouvé une piste : le cercle et ses deux tangentes AT et AI ont un axe de symétrie donc...



Spécial futur S : on entre dans les subtilités de l'analyse.

Nous allons poursuivre la piste 2 ouverte par Colin et Éric, les «coupeurs de bouchons».

Rappelons qu'ils proposent d'étudier la longueur ASM au lieu de ATSM.

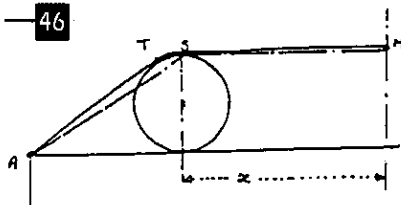
$$L(ASM) = x + \sqrt{(15-x)^2 + 2^2}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 30x + 229}$$

En programmant cette fonction, on peut conjecturer qu'elle croît sur l'intervalle [0,12] par exemple.

Il semble que l'idée d'Éric et Colin ait été : «Puisque la longueur de ASM est inférieure à celle de ATM, si ASM croît, alors, nécessairement ATSM croît aussi». Cela est-il vrai ?

Si p est une fonction inférieure à f sur un intervalle donnée, c'est-à-dire si pour tout x de l'intervalle
 $p(x) < f(x)$,
ET si p est croissante, c'est-à-dire si...
peut-on en déduire que f est aussi croissante ?



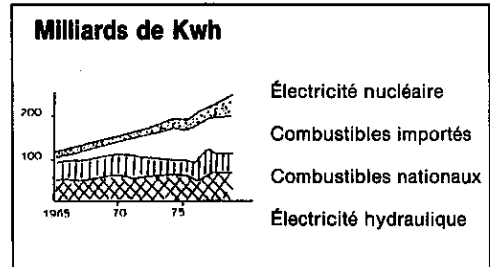
**CONCLUSION A RETENIR A PROPOS
DES «MAJORATIONS»
OU «MINORATIONS»**

Remplacer une fonction par une fonction plus petite est une bonne méthode à une double condition :
 — que l'information extraite de la plus petite... serve à quelque chose pour la plus grande !
 — que la fonction de remplacement (ici la plus petite) soit d'une étude facile... (sinon, ce n'est pas la peine !)

N.B. : Une élève particulièrement tenace a prolongé, seule et très en détail, le travail pour voir ce qui se passe quand la ficelle «décolle du coin»...

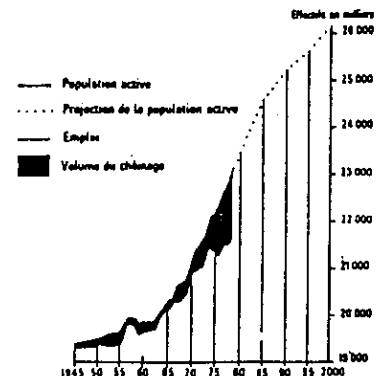
**4. Représentation graphique
d'une somme de deux
fonctions**

**1. ÉVOLUTION DE LA PRODUCTION
D'ÉLECTRICITÉ EN FRANCE**



- Est-ce que la production d'électricité nucléaire a augmenté de 1965 à 1972 ?
- Qu'est-ce qui a augmenté entre les années 65 et 79 ?

2. LE CHOMAGE



- Que représente le chômage par rapport à la population active et à l'emploi ? (Rappeler ce que l'on appelle la population active).
- Si l'on sait que la différence entre deux fonctions augmente, que peut-on en dé-

duire sur le sens de variation des fonctions ?

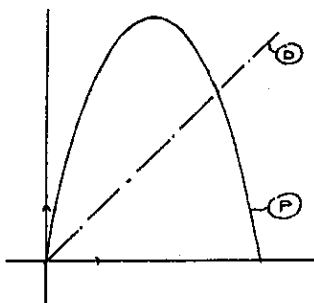
Et si l'on connaît une donnée supplémentaire ?

Ex. la plus grande fonction décroît.

Essayer avec d'autres données.

● Comment verrait-on sur un graphique que le chômage diminue ?

3. Un exercice du bac B donné à Grenoble en 85... (et que bien peu d'élèves ont su faire !)



● Construis graphiquement la somme des deux fonctions représentées ci-dessus.

● Comment sont situés les maximum ? Comment expliquer leur «décalage»

● La courbe (P) est une parabole déduite de $x \rightarrow x^2$ par symétrie et translation. Quelle est son équation ?

Trouver par le calcul la fonction somme.

4. Représente dans un même repère les fonctions connues :

$$x \rightarrow x \text{ et } x \rightarrow 1/x$$

Construire graphiquement la fonction

$$x \rightarrow S(x) = x + 1/x$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

5. On considère la fonction

$$x \rightarrow f(x) = 2x + 1/(x-1)$$

Trouve son «montage» et son programme. Que se passe-t-il quand $x \rightarrow +\infty$?

Que peut-on en déduire pour la représentation graphique ?

6. On considère la fonction

$$x \rightarrow g(x) = x^2 + 1/x$$

Que nous apprend son équation ?

Quelle est la partie «envahissante» et la partie «négligeable» quand $x \rightarrow +\infty$? et quand $x \rightarrow 0$? Quels renseignements cela donne-t-il pour la représentation graphique de f ?

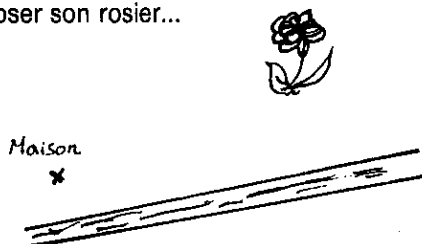
Achever le dessin de f (soit en programmant f , soit par addition graphique).

et, pour sourire... de nous !

5. Le jardinier et les profs de maths...

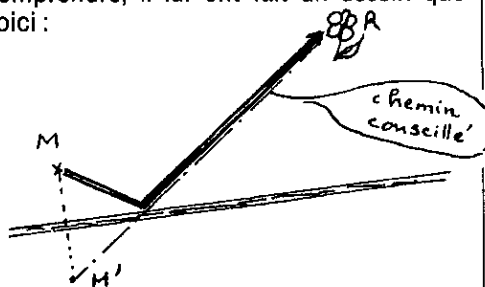
L'autre jour, Alfred, le jardinier du campus de Mont S'-Aignan, s'est arrêté : il entendait parler d'arrosage de rosier, et cela venait d'un grand amphithéâtre bourré de profs de math.

Il paraît qu'il y avait une rivière, une maison, un rosier, et un prof un peu fatigué qui souhaitait se fatiguer le moins possible pour arroser son rosier...

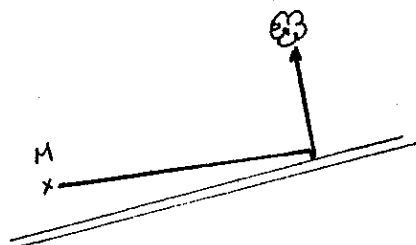


Alfred était content de voir un prof se poser des questions du même genre que les siennes, alors, l'après-midi, il est allé voir un petit groupe pour leur demander pourquoi ça leur semblait une question cette histoire d'arrosage, vu que lui, il le faisait sans y penser...

Alors les profs, heureux de trouver un élève naïf lui ont parlé de symétrie, de chemin le plus court, et comme il ne semblait pas bien comprendre, il lui ont fait un dessin que voici :



Mais Alfred, s'il se pose moins de questions que les profs de maths, en tous cas, il préfère ses réponses à lui, parce que porter un arrosoir il sait ce que c'est ! Et il sait bien qu'un arrosoir plein c'est plus lourd qu'un arrosoir vide, alors sa solution, il vous l'envoie sur un petit papier pour que vous ne vous fatigiez pas trop :



Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1990

Nom et prénom ou établissement _____
 Adresse complète _____
 Code postal et ville _____

Pour les 4 numéros de :
 1983 1988
 1984 1989
 1985 1990
 1986 1991
 1987 1992

École élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre payé par chèque
 désire facture
 nouvel abonné

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Supplément avion	Total à payer
Pour un an	100 F	80 F	+ 40 F	[]
Par année supplémentaire	+ 80 F	+ 60 F	+ 40 F	

Co-abonnement : Si vous vous abonnez en même temps à PLOT et à :

	Tangente	Jeune Archimède	Tangente & J.A.	Suppl. Avion	TOTAL
Pour un an	200 F	120 F	240 F	+ 80 F	[]
Par année supplémentaire	160 F	100 F	200 F		

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 90 -

Nom : _____

Adresse : _____

Facture

* Plot n° 39 ou Géométrie dédétiste (Rouen)

RÉDUCTIONS 10% pour les abonnés au Plot pour plus de 600 F d'achat

Prix unitaire	Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40 F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique		
40 F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*		
40 F	Papiers accrochés		
40 F	Pliages et mathématiques		
40 F	Pavages et symétries		
80 F	Dossiers «Spécial II» (300 p Adcs)		
40 F	Les Dossiers «Ludi-Math» (Poitiers)	n° 3	n° 4
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique		
Affiches pour la classe : Format minimum 40 + 60 cm.			
10 F	1. Horizons Mathématique.	2. L'esprit informatique.	
10 F	3. Surfaces minimales.	4. Polyèdres dans l'espace.	
10 F	5. Pavage hyperbolique.	6. Pavage hyperbolique 2).	
20 F	7. Triangles 1 (20 F).	8. Triangles 2 (20 F).	
30 F	Pour envoi des affiches roulées dans un tube (en option)		
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur. n° 1 à 14	(n° 4 ou 5 : 20 F)	
80 F	Pochettes de diapositives n° 2 à 6 (n° 1 : 100 F)	n° 2	
80 F	Géode de Raoul Raba en kit (cf. Plot n° 39)		
sous-total			
-10 % pour les abonnés au PLOT -10 % pour plus de 600 F d'achat			
Frais d'envoi forfaitaire			15 F
TOTAL à Payer			[]

Règlement à envoyer à l'AMPEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

SOMMAIRE DU PLOT N° 49

- **Queneau, mathématicien.** J.L. Corcea, Tours.
- **Une expo au collège : Pythagore de Samos.** Serge Ducloux, Chécy.
- **Les mathématiciens de la Révolution.** André Deledicq, Paris.
- **Les dodos font la paire.** Darche-Lefort - Leeds.
- **L'axiome du choix vu en BD** par Cécile Morillon, Issoire.
- **Les mathématiques à Madagascar.** Claude Viale, Tananarive.
- **Structure de groupe sur une courbe.** Claude Viale, Tananarive.
- **Itération au collège.** Claude Landré - Orléans

- **Les mathématiques au Togo :**
 - **Ménélaüs** par Claude Vautard.
 - **Olympiades togolaises.**
 - **Les complexes vus sans complexes** par les élèves de l'ENS D'Atakpamé.
- **Des frises en classe de CM.** Joël Sauvaget, Raymond Torrent, La Roche/Yon.
- **des frises au lycée et après.** Michel Soufflet, Nouakchott.
- **L'esprit informatique : une nouvelle expo «prête à finir».** R. Torrent.
- **Un compte-rendu sur le congrès international de l'ICME à Leeds : popularisation des Mathématiques.**

et toujours les rubriques du PLOT.