Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Luce Dossat, René Gauthier, Georges le Nezet, Ginette Mison, Serge Parpay, Raymond Torrent. Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans-Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse Brest, Caen et Clermont-Ferrand

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Centre National des Lettres et du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

QUE PEUT APPORTER UN PLOT «SPÉCIAL COLLÈGE» ?

Renvoyer à «Petit x» (IREM de Grenoble) qui fait autorité pour la qualité de ses articles, citer les bulletins Inter IREM «Suivi scientifique des nouveaux programmes» et toutes les publications APMEP qui chaque année depuis trois ans permettent d'amorcer des réflexions sur l'enseignement des 11-15 ans.

Mais il reste une immense place pour tous ceux qui veulent communiquer leurs idées, leurs expériences et PLOT leur donne la parole, la plume, la bille ou le clavier :
COMMUNIQUER pour éviter l'usure des leçons répetées, l'ennui des apprentissages fastidieux, la lassitude face aux difficultés des enfants ;
COMMUNIQUER pour dégager des constantes propres à chaque démarche d'apprentissage, invariantes que l'on ne peut ni éviter, ni minimiser ;
COMMUNIQUER pour dire que le collège est un bon terrain d'expérimentation et de réflexion, que les classes n'y sont pas (encore) trop chargées, que les élèves y sont souvent plus actifs et ouverts que dans les lycées. Une chance souvent ignorée à ne pas manquer ;
COMMUNIQUER pour communiquer que l'on ne peut tout communiquer en un seul numéro, tant l'enseignement, c'est... (participe présent au choix).

N.B. : *Pour ceux qui veulent en savoir plus sur les illustrations : Le chat -P. Geluch - Castermann.*

LES NOUVEAUX PROGRAMMES

Michel CLINARD - Orléans

Un texte d'opinion : un texte pour parler, un texte pour écrire... au Plot.

Il est toujours difficile de percevoir les raisons profondes d'un changement de programme. Il en existe au moins quatre qui peuvent coexister.
1. Autoritarisme des responsables qui imposent des changements dans le but d'établir ou conforter leur pouvoir.
2. Fin psychologique : il s'agit de satisfaire les détracteurs d'un système en reconnaissant le bien-fondé de leurs critiques.
3. Reconstruction sur de nouvelles bases pour supprimer les effets pervers en place : inflation des contenus, exagération du formalisme, mésestimation de l'importance de certains objectifs.
4. Démarche empirique prenant en compte l'ensemble des courants, l'administration, les personnels, les usagers : idées reçues, recherches scientifiques et pédagogiques, expériences d'enseignants, exigences de la société, etc.

Pour les points 1 et 2 les contenus importent peu. Pour 3, les effets des nouveaux programmes, sans références aux anciens, sont peu assurés (cf. réforme des «maths modernes»). Avec le point 4, on est conduit à une situation de compromis qui se caractérisent par des choix mystérieux, des justifications peu rigoureuses, des objectifs généraux pas toujours accessibles ou peu cohérents, des idées qui restent générales pour les instructions, des argumentations souvent pauvres, sans référence aux deux éléments incontournables :
Référence à la structure même du savoir et condition d'appropriation du savoir.

Autrement dit :
Organisation de l'édifice mathématique et développement de la pensée logique.
Ce dernier point 4 paraît bien caractériser les nouveaux programmes qui se mettent en place au collège avec les apports fondamentaux suivants :
— mathématique-outil.
— continuité de l'enseignement : progressivité totale et régulière du cours moyen à la troisième (fractions, proportionnalité, transformations géométriques, initiation aux conjectures et au raisonnement déductif).
— valorisation de la géométrie dans l'espace.
— activités ouvertes et interdépendantes (connaissances exigibles ou non ; rappel d'outils anciens pour la mise en place et l'apprentissage de connaissances nouvelles ; activités de synthèse — on peut se reporter utilement à «Dialectique outil-objet» R. Douady, voir bibliographie).
— prise en compte de l'élève.
— prise en compte de la spécificité du travail de professeur (niveau suffisant pour distinguer l'essentiel de l'accessoire...).
— prise en compte du langage (les éléments de vocabulaire sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non des points de départ : distinction entre pré-requis et objectifs).
— référentiels d'évaluation.
Il y a lieu de renouveler les réserves déjà annoncées :
— programmes concis donc donnant lieu à des «interprétations et des imprécisions»,
— aucune mention faite à des activités structurantes : définitions des notions ; formalisation ; institutionnalisation des savoirs...
Ce dernier point apparaît comme le plus problématique dans la mise en place de ces nouveaux programmes.
● L'absence d'une définition claire de la notion d'activité amène à se réfugier derrière des mots «fourre-tout» et vides de sens comme situation-problème, à suivre servilement le manuel ou à... ignorer et faire comme avant. Cela risque d'autant plus de se produire qu'en 4e commencent (commençaient !) les «choses sérieuses» : formalisme algébrique, démonstration géométrique, et qu'«on n'a plus le temps, comme en 6e-5e, de passer du temps à faire des activités. Il y a un programme à terminer sans perdre de temps».
● Aucune instruction officielle ne pourra éviter de telles réflexions, car il existe un problème de conceptions (le plus souvent

implicites) qu'ont les enseignants des mathématiques et de leur enseignement.
• Enfin, il faut tenir compte des projets Ministériels.
Reprenons ces trois points.

1. Développement des filières scientifiques et 74 % d'une classe d'âge au niveau du bac.
Même s'il faut y voir quelques aspects électoralistes, le projet Monory 1988 pose bien l'enjeu fondamental pour l'avenir d'un pays démocratique économiquement et culturellement avancé. Les mathématiques auront un rôle déterminant à jouer au lycée en particulier, mais le lycée se prépare au collège et donc à l'école primaire.
Pour beaucoup, renforcer les compétences scientifiques c'est élever le niveau des connaissances, accroître leur quantité et les exigences des enseignants (cf. 1ère S et TC actuelles). Une telle pratique développée par les professeurs eux-mêmes ne peut que nuire aux élèves (sentiment d'échec, désintérêt pour les mathématiques) et aux mathématiques, en détournant un grand nombre d'élèves vers les sections B par exemple. Le but de l'école n'est certainement pas de former en fin de TC des étudiants ayant une ou deux années d'avance mathématique sur leurs camarades américains mais, au contraire, de créer un «vivier» pour les sciences: Antoine Prost («Problèmes actuels de l'enseignement») estime qu'en abaissant de 10 % les exigences scientifiques, on pourrait doubler le nombre d'élèves dans les sections scientifiques.
Un autre problème, directement lié au précédent, est que les responsables ne semblent pas réaliser qu'on va manquer d'enseignants. Des expédients existent déjà (40 élèves par classe dans les lycées, enseignements non assurés, reconversions hâtives de professeurs d'autres disciplines vers les mathématiques, par exemple, etc.).
On peut s'attendre à pire: au collège les nouveaux programmes de 4e réduisent le niveau et le nombre des capacités exigibles, ce qui n'est pas forcément très grave si on s'attache à mettre en place de bonnes situations d'apprentissages (activités !?) conduisant à une réelle compréhension durable des notions mathématiques en se dégageant de certains calculs formels «acrobatiques» ou d'un «psittacisme» (comportement du perroquet) qui caractérise les premiers apprentissages de la démonstration en géométrie.
Quatre heures sont nécessaires pour mettre en place des situations d'apprentissages constructives sans perte de substance mathématique (quand les élèves s'ennuient à construire des figures ou faire des calculs de manière répétée sans que ces «activités» permettent de construire des concepts mathématiques comme réponse à une situation-problème).
S'il s'agit de faire «comme avant» avec des objectifs réduits, est-ce se faire l'«avocat du diable» que de dire: 3 heures de cours peuvent suffire avec 1 heure de travaux dirigés, quand les moyens de l'établissement le permettent (c'est-à-dire avant qu'un professeur certifié ait été muté autoritairement au lycée). Est-ce se montrer alarmiste que de rappeler quelques pratiques déjà testées en 5e-6e ?
Ainsi le bon fonctionnement des nouveaux programmes au collège peut se heurter d'une manière contradictoire, en apparence, au développement des filières scientifiques; il peut aussi se heurter aux conceptions implicites des enseignements sur les mathématiques, ce qui nous conduit au point suivant.

2. L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement.
(Epistémologie: théorie de la connaissance, de son objet, de ses méthodes; l'histoire de la construction et de l'évolution d'un concept est du domaine de l'épistémologie, par exemple l'épistémologie des nombres relatifs).
2.1. Chez beaucoup d'enseignants prédomine une **Mathématique formaliste** (liée en partie à leur formation bourbakiste), ils exigent de l'élève, dès ses premiers travaux, rigueur de pensée et du langage, en oubliant que, chez le mathématicien, la forme rigoureuse ne vient qu'après un long processus d'essais, d'approximations et de rectifications. Ainsi, dans une démarche axiomatique rigoureuse, la donnée d'une définition au début du cours peut fort bien se révéler sans intérêt pédagogique, voire catastrophique:
— si l'élève comprend la définition qui condense les propriétés fondamentales de l'objet mathématique, c'est qu'il connaît déjà l'essentiel;
— si l'élève, faute d'activités préalables, ne comprend pas la définition, il est averti dès le départ qu'il ne comprend rien et que ce n'est pas la peine d'essayer.
«Faire des mathématiques», c'est donc les fabriquer, construire les notions et savoir-faire. Ce point de vue constructiviste, sous-jacent dans les nouveaux programmes, s'oppose à une autre conception, implicite, présente chez les enseignants et qui renforce le point de vue précédent:

2.2. Mathématique platonicienne.
D'après Bernard Charlot (voir bibliographie), la conception la plus courante postule que la mathématique n'a pas à être produite mais à être **découverte.** «Les êtres mathématiques existent déjà, dans le ciel des idées». Le rôle du mathématicien n'est pas de créer, d'inventer les vérités mathématiques mais de les découvrir, les dévoiler. Une fois celles-ci dévoilées, le professeur

fera partager à l'élève cette vision. Les concepts mathématiques sont donnés (donnés à voir) et non pas construits. Dès lors, il y a les élèves qui voient et ceux pour qui tout reste obscur. On essaye d'expliquer ces différences par les **dons génétiques** ou **des handicaps familiaux ou socio-culturels.**
La réforme des «maths modernes» a renforcé ces deux conceptions, mais c'est en fait l'épistémologie implicite de beaucoup d'enseignants qui a trouvé un terrain favorable dans les nouveaux programmes de 1970 car la commission Lichnerowicz avait tout au contraire mis en place une convergence étonnante (et mal perçue) entre les structures-mères de Bourbaki et l'épistémologie génétique de Piaget, base des apprentissages constructivistes.

BOURBAKI 1930

— Les ensembles ordonnés (rôle des relations d'ordre).
— Les algèbres (rôle des lois de composition).
— Les structures topologiques.

PIAGET 1955

— Groupement de classe (rôle de l'algébrique).
— Groupement de relations (rôle de l'ordre).
— Géométrie spontanée (rôle des éléments topologiques).

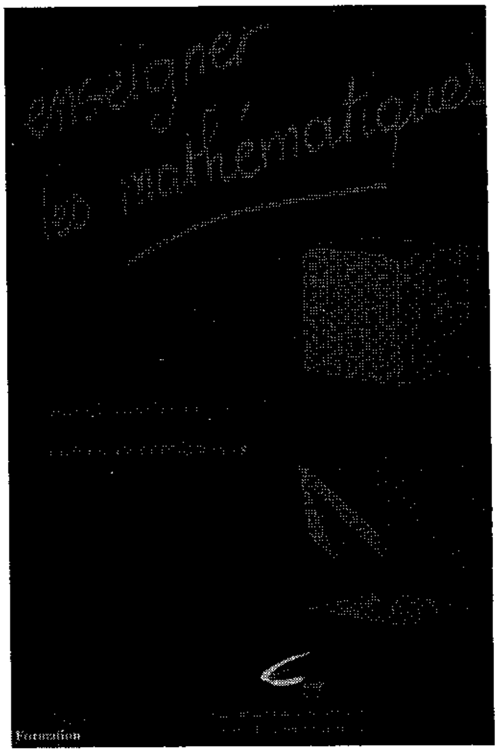
On va du stade des «opérations concrètes» au stade de la «pensée formelle».

On retrouve les deux points incontournables de l'introduction :
— les structures du savoir mathématique,
— les structures opératoires de l'intelligence mises en place pour acquérir le savoir.

2.3. Mathématique constructive.
Il apparaît donc fondamental, pour que la mise en place des nouveaux programmes ait quelques chances d'aboutir à un progrès dans l'enseignement des mathématiques, que les enseignants aient des conceptions épistémologiques des mathématiques qui soient constructivistes (et conscientes).
Les concepts mathématiques ne sont pas un bien culturel transmis comme un don ou un capital social, mais le résultat d'un **travail** de la pensée, l'activité mathématique n'est pas regard mais création, production, fabrication.
Cela pose la nécessité d'accompagner ces nouveaux programmes, d'actions de formation continue pour permettre aux enseignants de mûrir et construire des démarches nouvelles, comme en particulier :

3. Situation-problème.
Le point de départ de l'activité mathématique est le problème, l'élève n'aura pas à appliquer des algorithmes tout faits ou à répéter ce qu'il a appris, mais il aura à faire des essais, élaborer des hypothèses qu'il faudra tester.
Le problème doit conduire au concept mathématique dont l'apprentissage est visé par l'enseignant. Ce concept peut être un outil qui est apparu nécessaire au travers de la situation d'action ou de formulation comme réponse optimale au problème posé, ce peut être aussi la conséquence d'une situation de validation (le concept est alors engendré par la nécessité de prouver).
Le rôle fondamental du problème a été mis en évidence par Guy Brousseau qui insiste sur le soin qu'il faut apporter pour le transmettre aux élèves, pour qu'ils se l'approprient ; c'est la **dévolution** du problème, phase importante de l'activité. A la fin de l'apprentissage, le professeur doit donner un statut social au concept, à la connaissance, au savoir-faire mis en place par les élèves, c'est **l'institutionnalisation :** définition et formulation conformes aux programmes, etc.
Étudier des situations pratiques dépasse le cadre de cet article. Insistons seulement sur deux faits :
— il ne faut pas confondre pédagogie «active» et pédagogie «concrète» c'est l'activité intellectuelle de l'élève qui construit ses connaissances qui est fondamentale :
— il ne faut pas assimiler une situation-problème à une situation de jeu ou à une situation utilitaire (en dehors des mathématiques dans un cadre «concret»), ces situations correspondent à des idées dominantes dans l'enseignement des mathématiques.
La notion de jeu et d'utilité sont duales et s'excluent :
— parler de jeu, c'est centrer l'apprentissage sur l'activité elle-même en tenant le résultat comme négligeable, or une situation-problème doit conduire à une nouvelle connaissance mathématique ;
— parler d'utilité, c'est occulter l'activité pour insister sur la seule valeur du résultat, la plupart du temps, en dehors du monde mathématique ; or ces résultats ne peuvent tirer leur sens que de l'activité qui les a créés.
Dans une situation problème, il est fondamental que l'élève construise ses outils mathématiques, même mal formulés ; cette construction lui permet d'avoir une image positive de lui-même face aux mathématiques et à l'école.
On constate donc, qu'au-delà des points de détails des contenus de programmes, l'apprentissage des mathématiques repose sur une épistémologie implicite qui définit l'homme face au savoir, à la culture, aux

enjeux économiques à venir.
Il semble nécessaire de développer une réflexion autour des trois points précédents car déjà certains annoncent l'échec de ces nouveaux programmes (la notion d'échec est d'ailleurs à relativiser car, si on se refère aux analyses d'Yves Chevallard, les programmes apparaissent comme une **régulation** de la transposition didactique, c'est-à-dire de la transformation du savoir savant des mathématiciens au savoir enseigné dans les classes : les cours, les exercices, les situations d'apprentissage sont les fruits de la transposition et des lois de fonctionnement didactiques).
Il y aura échec de ces nouveaux programmes, s'il n'y a pas d'évolution dans les pratiques de classe ; les changements ne peuvent pas venir de l'administration centrale et de ses instructions mais de la périphérie, c'est-à-dire des enseignants eux-mêmes, porteurs d'innovations dans la continuité de leurs actions car il faut respecter les travaux mis en place et les compétences existantes.
Pour faciliter la mise en place d'une réflexion didactique visant une bonne compréhension des nouveaux programmes et les changements nécessaires pour leurs applications, en plus d'une bonne formation initiale (voir encadré) participer à des actions de formation continue apparaît comme un passage obligé : c'est possible avec les stages groupés d'établissements des MAFPEN, c'est facile avec les actions proposées par les IREM. ■



BIBLIOGRAPHIE

APERY Roger : Mathématiques constructives dans «Penser les mathématiques». Seuil Sciences n° 29, 1982.

BROUSSEAU Guy : Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques. RDM 7.2, 1986, Ed. La Pensée Sauvage.

BODIN Antoine : Réflexions sur l'actualisation des programmes. APMEP 351, décembre 85.

CHARLOT Bernard : — Histoire de la réforme des Maths Modernes.
APMEP 352, fév. 86.
— Qu'est-ce que faire des maths ?
APMEP 359, juin 87.

CHEVALLARD Yves : Les programmes et la transposition didactique.
APMEP 352, fév. 86.

CORNU Bernard : Recherche et formation. Pourquoi ? Pour qui ?
APMEP 362, fév. 88.

DOUADY Régine : Dialectique outil-objet.
RDM 7.2. 1986, Ed. La Pensée Sauvage.

LONDEIX Hervé : Fondements théoriques et expérimentaux de la didactique des Maths.
Centre Formation IDEN PEN, Paris 1986.

ROUCHE Nicolas : Pourquoi les maths ?
APMEP 362, fév. 88.

Cet ouvrage collectif dirigé par l'Inspection Régionale de l'Académie d'Orléans-Tours propose, à travers une grande diversité de thèmes, des documents de travail et une réflexion sur tous les aspects du métier d'enseignant de mathématiques en collèges et lycées.

Cet ouvrage sert de support à la formation des stagiaires de mathématiques.

C'est la première fois que des «autorités» font, sous forme de publication non officielle, une réflexion sur leur pratique de formation des maîtres en ne se contentant pas de généralités et en en faisant profiter les débutants... et les autres.

A PROPOS DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Josette FAGES - René METREGISTE - Toulouse

Une séance d'animation avec des stagiaires

Quelques réflexions d'ordre général

Animateurs à l'IREM de Toulouse, nous nous sommes demandés, eu égard à notre propre expérience, quelle serait l'attitude de nos stagiaires face à la résolution de problèmes où «intervenaient» les transformations.
Nous avons «réétudié» les programmes de 1985, les commentaires à ces programmes et les instructions officielles de 1985 pour l'école élémentaire.
Comme le rappelle Henri Bareil **(1)** «En géométrie, les configurations fondamentales sont étudiées en étroite liaison avec les transformations isométriques échelonnées sur 4 ans. Et, celles-ci ne sont pas du tout conçues comme des transformations structurant le plan ou l'espace, mais, selon le cas, sous la forme :
— de l'action sur une figure,
— de l'invariance d'une figure sous leur action (axes de symétrie...).
Il est également précisé que toute notion vue antérieurement sera réinvestie les années suivantes pour permettre une véritable appropriation des notions et concepts.
A ce stade de réflexion, il nous fallait trouver des problèmes à résoudre et nous avons délibérément puisé dans la richesse IREM. Beaucoup d'enseignants méconnaissent par trop les productions Irems.
Ce choix nous a paru judicieux...
Dans le déroulement de nos ateliers, nous avons distingué plusieurs étapes conformément à celles définies dans la brochure de l'Irem de Poitiers : «Pour apprendre à démontrer» **(2)**.
1. Familiarisation : aspect concret.
2. Construction de figures.
3. Connaissance des propriétés de la transformation (invariants).
4. Démonstrations, trois niveaux :
a) Traduction de la définition en langage de géométrie des figures,
b) Utilisation des propriétés des transformations,
c) Utilisation d'une transformation pour résoudre un problème.
Tout d'abord quelques problèmes de construction ont retenu notre attention. (un exemple) (2).
«Construire le symétrique d'un point B par rapport à une droite D connaissant déjà le symétrique A' d'un autre point A (faire la construction en utilisant seulement la règle et le compas). Les cas où (AB) est orthogonal ou parallèle à (D) sont intéressants à étudier.
Excellent exercice qui met en œuvre l'esseniel des propriétés de la symétrie orthogonale, à partir de tracés où seule la règle intervient...

Puis, pour éveiller la curiosité de nos stagiaires et susciter l'utilisation des transformations, nous avons choisi un problème où plusieurs solutions étaient possibles. L'énoncé donné, (voir le problème abordé), les stagiaires ont travaillé en groupes. La propriété de Pythagore et la résolution par les angles ont prévalu et la transformation visée n'a jamais été utilisée.
Après discussion et après avoir épuisé toutes les solutions possibles, nous avons présenté le problème suivant la classification de Jean Marion et Jean-Louis Ovaert **(3)** qui nous paraît très pertinente pour initier et familiariser les élèves à la démonstration.

CARRÉ, MILIEU ET PERPENDICULAIRE — FICHE 1

Le problème abordé

On considère un carré (*A,B,C,D*) de côté a. Soit I le milieu du segment [DC] ; J le milieu du segment [CB] et K le milieu du segment [CJ].
Démontre que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (DJ).

La configuration

ABCD est un carré.

Propriété à démontrer

Les droites (AI) et (DJ) sont perpendiculaires.

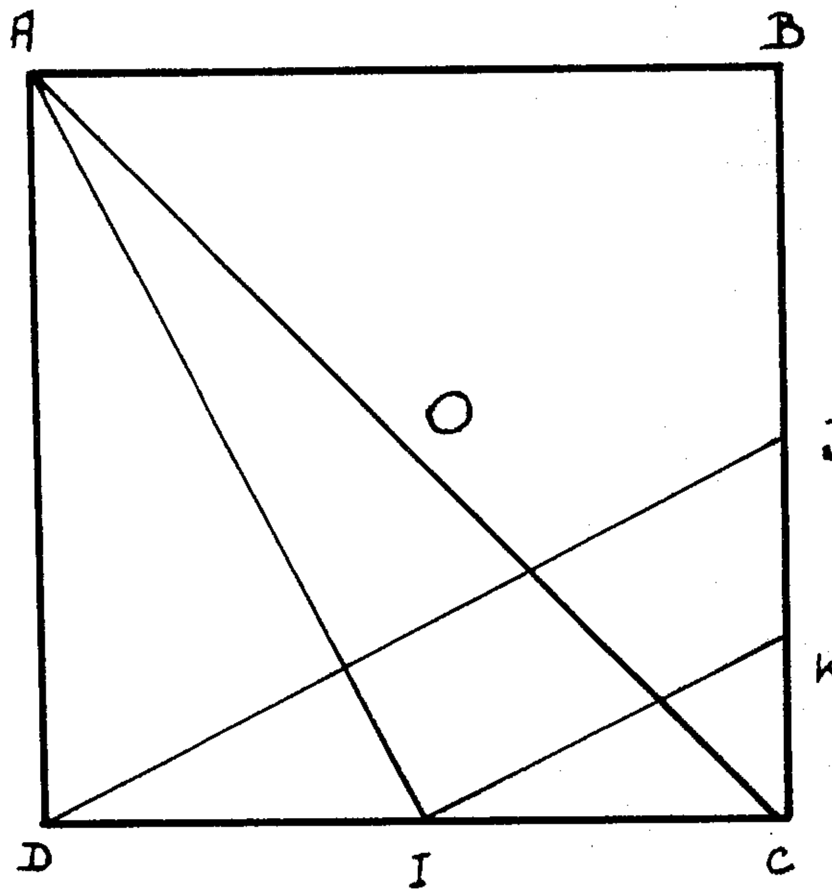
Points de méthode

On désignera par O le centre du carré.
Pour démontrer que (AI) est perpendiculaire à (DJ), on a les choix suivants :

- établir que le triangle AIK est rectangle **1 2.**
- montrer que les angles DAI et CDJ sont égaux **1 3.**
- Choisir le repère (D, DC, DA) et utiliser la condition nécessaire et suffisante :
$xx' + yy' = 0$ **1 4.**
- Utiliser une transformation (rotation) **1 5.**
- Utiliser les équations des deux droites (DJ) et (AI) **1 4.**

Directions de recherche

Les points de méthode suggèrent l'utilisation de :
1. configurations.
2. la réciproque du théorème de Pythagore.
3. rapports trigonométriques et angles.
4. l'outil vectoriel et analytique.
5. transformations.

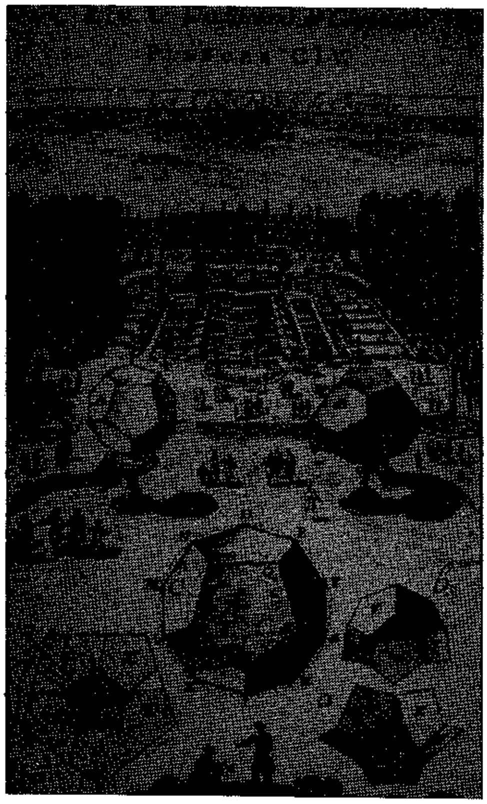


Quelques réflexions d'ordre didactique pour terminer

Que faut-il entendre par figure, configuration ?
Deux rôles peuvent être attribués aux figures en géométrie :
1. elles illustrent les situations données.
2. elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal.

En géométrie du plan, la figure est l'objet d'étude premier, et c'est à partir d'elle que la notion de configuration se construit pour dépasser la figure et pallier ses insuffisances : particularités, limite spatiale,... et c'est à ce moment que naît le besoin de déduction, de démonstration **(4).**
Ensuite, nous avons abordé une série d'exercices accessibles aux élèves qui ont donné lieu à de nombreuses discussions (comme modification d'un énoncé...).
Dans ces exercices, il s'agit d'utiliser uniquement les définitions préconisées par les programmes et les propriétés des symétries*.
Là aussi les stagiaires n'ont pas toujours utilisé les propriétés des transformations. Le conditionnement est réel. Le «réflexe transformation» n'est pas évident.

Il a semblé important de résoudre suffisamment de problèmes afin de se servir judicieusement des transformations pour la simplicité qu'elles apportent dans certaines démonstrations et se convaincre qu'il s'agit en l'occurrence de «véritables» démonstrations.
Au niveau des élèves que faut-il comprendre à travers programmes et commentaires...? Nous pensons comme les auteurs de la brochure de l'Irem de Poitiers **(5)** que «les transformations peuvent éventuellement intervenir dans des activités de recherche, pour trouver des constructions, mais en aucun cas dans des démonstrations utilisant l'aspect ponctuel des transformations, comme :



— démontrer qu'un point est image d'un autre par une transformation,
— utiliser des points comme intersections d'ensembles transformés».
C'est bien, nous semble-t-il, ce que préconisent les commentaires officiels des programmes...
Notre regret, celui de tous :
Au moment où les instructions officielles affirment que l'élève doit être partie prenante dans son éducation mathématique,
au moment où les instructions officielles prônent que «les élèves doivent **enfin** apprendre à travailler par eux-mêmes, afin d'accéder à l'autonomie et à la responsabilité...», demandent de faire une large place à l'activité de l'élève et à sa propre capacité d'apprendre **(6)** au moment où... **les heures d'enseignement en mathématiques sont réduites.**

Ci-après une nouvelle fiche-exercice pouvant conduire à une analyse du même type. D'autres fiches suivront dans les prochains Plot (une bonne raison de vous réabonner au Plot pour plusieurs années !!!).

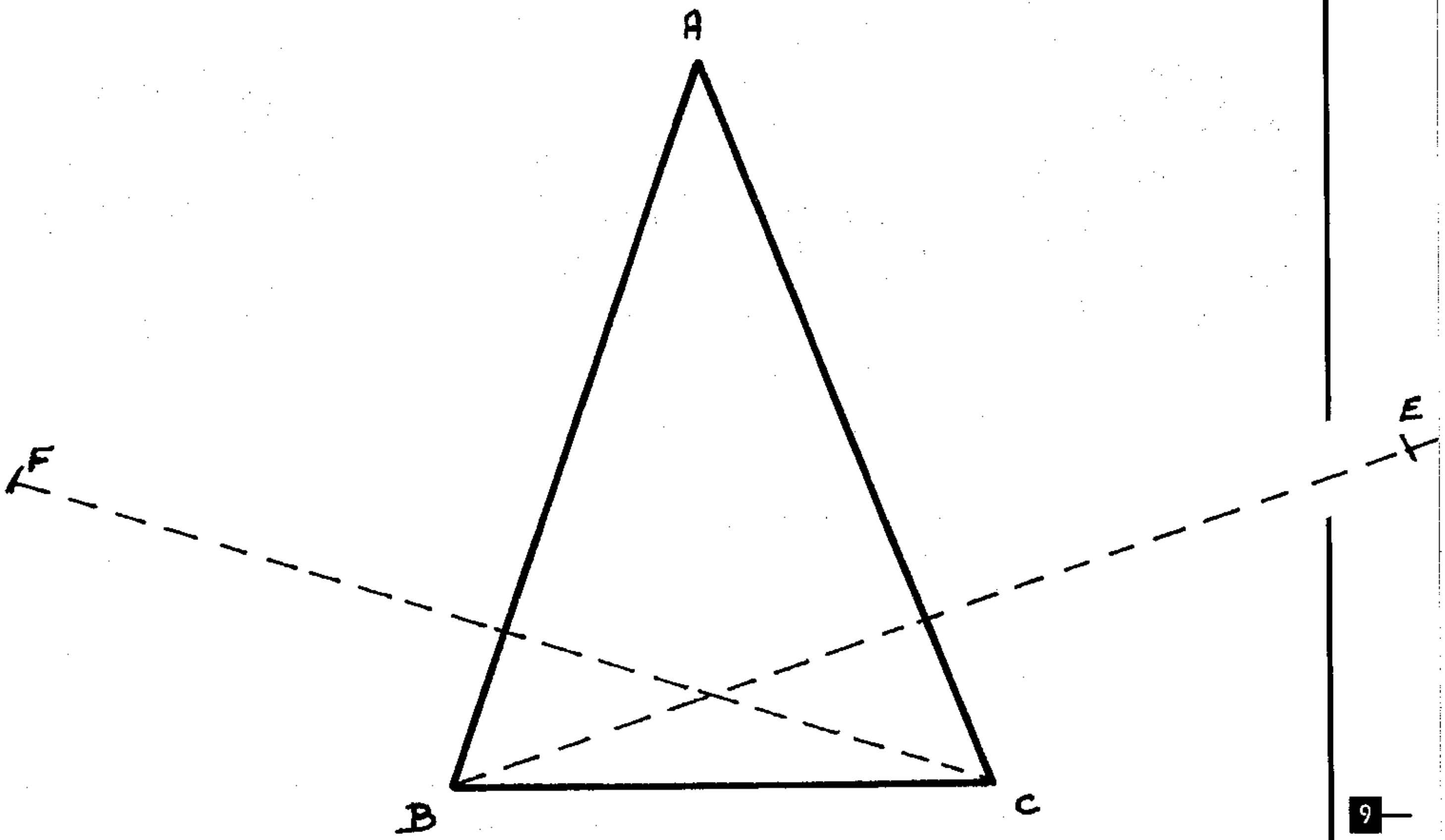
*Toutes les transformations ont été abordées.

SYMÉTRIE ORTHOGONALE (construction et propriétés) — FICHE 2

Le problème abordé

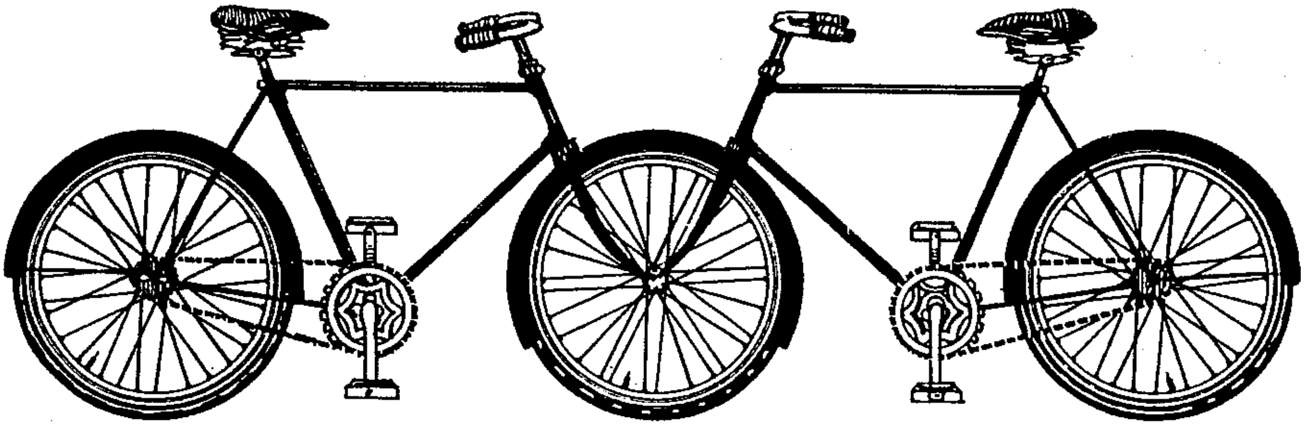
Soit ABC un triangle isocèle où $AB = AC$. Soient E le symétrique de B dans la symétrie orthogonale d'axe (AC) et F le symétrique de C dans la symétrie orthogonale d'axe (AB).
a) Montrer que $AE = AF$.
b) Montrer que B, C, E, F sont éléments d'un même cercle.

La configuration

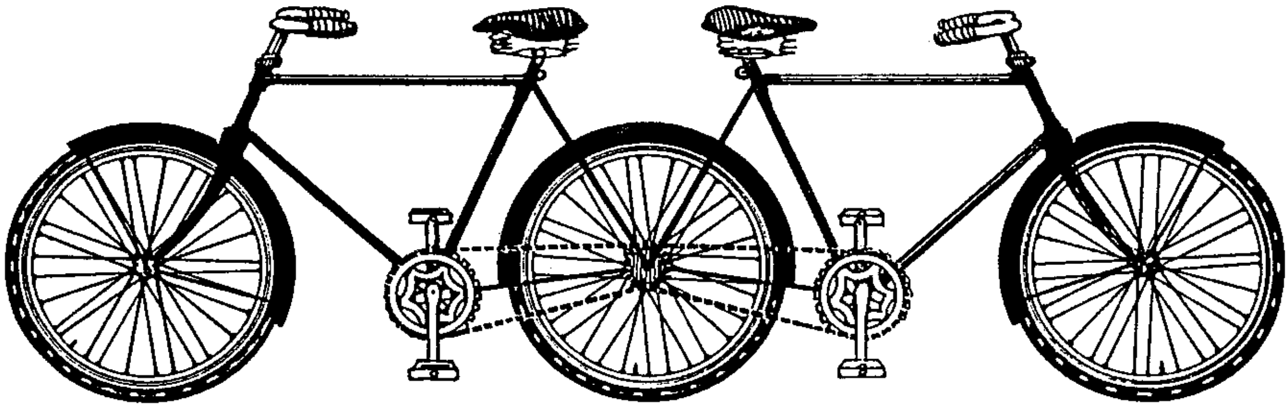


Propriétés à démontrer
$AE = AF$
B, C, E, F sont des points d'un même cercle.

Points de méthode et direction de recherche.
Propriétés de la symétrie orthogonale,
Points invariants,
Caractérisation des éléments d'un cercle.



TANDEM CONVERGENT. Modèle pour fiancés.



TANDEM DIVERGENT. Modèle pour couple en instance de divorce.

Extrait du «catalogue des objets introuvables» éd. Ballard. Paris.
Un livre à réflexions pour tout lecteur du PLOT.

Illustration Symétrie orthogonale.
Quel est le modèle qui illustre le mieux la proposition mathématique : «la symétrie axiale est un retournement» ?

à suivre...

BIBLIOGRAPHIE

(1) Attendus et intentions des nouvelles propositions de programmes en France («Petit x» n° 13) Henri Bareil.

(2) Pour apprendre à démontrer Géométrie de 4e. Juin 1983. IREM de Poitiers. Dominique Grand, Jean-Paul Guichard.

(3) Objectifs de l'enseignement de la géométrie au lycée. Jean Marion, Jean-Louis Ovaert. Irem de Marseille, mars 1984.

(4) Enseignement de la géométrie. Bulletin inter-Irem n° 23, page 35, article de Didier Bessot.

Voir également l'article de Claude Burgaud, Irem de Basse-Normandie (Irem de Rennes) sur les transformations page 52.

(5) Géométrie de 4e fascicule 1.
Initiation à la démonstration (compte-rendu d'expérimentation des programmes de 4e).
Irem de Poitiers (ouvrage indispensable).

(6) Collèges, programmes et instructions, page 21 et suivante. Éditeurs CNDP -Livre de poche.

ÉVALUATION : QUOI DE NEUF ?

Joëlle JAN-PROVOST et André GAGNEUX - Bourges

TEST : Évaluer l'évaluation

Dans une classe de troisième, on donne l'exercice suivant :

Passant ! Ci-gît Diophante
Les chiffres diront la durée de sa vie.
Sa douce enfance en fait le sixième.
Un douzième de sa vie a passé et son menton s'est couvert de duvet.
Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfant.
Cinq ans ont passé ; la naissance d'un fils l'a rendu heureux.
Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois plus courte que celle de son père.
Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre ans après la mort de son fils.
Dis passant, quel âge avait atteint Diophante lorsque la mort l'a enlevé ?

Il est noté sur 5. Voici la réponse d'un élve, quelle est votre note ?

x l'âge de Diophante

$x = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7}$

$x = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7}$

$x = \frac{14}{84} + \frac{7}{84} + \frac{12}{84}$

$x = \frac{33}{84}$ → longueur de sa vie

Il est resté 33 ans sans enfant
à 33 + 5 = 38 il a eu son
enfant. Son fils a une vie
deux fois plus courte que son
père, c'est à dire $\frac{84}{2} = 42$.
donc 38 + 42 = 80
4 ans après la mort de son
fils, il meurt, soit 80 + 4 = 84 ans.

Nouvelles formes d'évaluation

Deux articles sont nécessaires pour rendre compte de l'importance et de la richesse de cette communication :
1. un constat (ci-dessous)
2. une pratique (prochain PLOT).

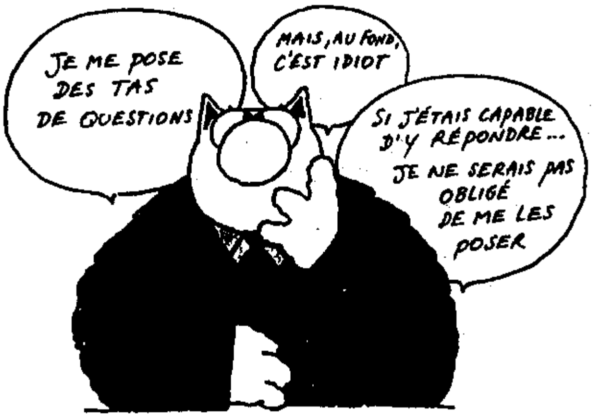
Un constat

André de Peretti a défini les conditions de la pédagogie différenciée qui est du ressort de l'institution. Ce sont les textes officiels qui doivent permettre une différenciation.
Nous pouvons montrer que des pas très importants ont été faits, et les illustrer par deux exemples. Dans la circulaire de rentrée des collèges, nous pouvons lire :
«Tous les élèves pris tels qu'ils sont en 6e doivent parvenir en 3e pour continuer des études en cycle long. Il est donc nécessaire d'instituer des parcours différenciés et un suivi différencié des élèves».
Nous savons d'autre part que les programmes des classes de collège sont accompagnés de commentaires et d'une écriture précise des compétences exigibles à chaque niveau. Dans une autre présentation très proche, il en est de même des programmes des classes de lycée.
Voilà donc une volonté clairement définie pour que de nouvelles formes d'évaluation, c'est-à-dire de recueil de l'état des connaissances d'un élève, soient mises en place.

Quelle est la situation actuelle de l'évaluation ?

L'évaluation n'est pas seulement la notation ; mais la pratique habituelle de l'enseignant consiste à noter les travaux de ses élèves. Il se sent un peu obligé à noter en pensant que ceux-ci se motivent alors davantage. Les professeurs déclarent souvent que ce sont les élèves eux-mêmes qui réclament des notes. Avant de pouvoir aborder d'autres formes d'évaluation il nous pa-

raît indispensable de commencer par la question clef de la notation.
La note a deux fonctions, une fonction pédagogique et une fonction sociale. Commençons par étudier la fonction pédagogique qui doit permettre d'instaurer un dialogue entre l'enseignant et l'élève.



Quelle fonction pédagogique joue la note pour l'enseignant ?

Envisageons le cas de la notation traditionnelle, qui quantifie l'évaluation sommative des travaux effectués par les élèves ; pour cela imaginons un «contrôle» de mathématiques en classe de quatrième construit pour tester les connaissances des élèves sur les deux thèmes suivants : volume et aire de la sphère d'une part et opérations sur les fractions d'autre part.
Sur le carnet de notes du professeur, dans la colonne correspondant à ce contrôle, figurent plusieurs 10 (nous envisageons ici le cas habituel de la notation sur 20).
Comment cette note est-elle obtenue ? La simple lecture sur le carnet ne permet plus de le savoir, surtout plusieurs mois après.
Imaginons la situation où le barème choisi attribue le même nombre de points aux deux thèmes du contrôle.
— Plusieurs élèves ont obtenu cette note de 10 en réussissant parfaitement les opérations sur les fractions et en échouant aux items sur la sphère.
— d'autres élèves obtiennent 10 en réussissant les items concernant la sphère et en échouant aux items sur les fractions.
— d'autres élèves «grapillent» quelques points d'un côté et quelques points de l'autre, ils obtiennent aussi 10/20.
Nous sommes obligés de conclure que ces notes identiques recouvrent des réalités très différentes. Au moment de la correction le professeur visualise bien toutes ces différences, il consigne même ces remarques sur les copies des élèves. Puis, dans la majorité des cas, il ouvre son carnet et recopie les notes obtenues.

LE «BULLETIN»

Etudions plus avant les effets de cette pratique habituelle. Nous sommes à la fin du trimestre et chaque professeur doit synthétiser les résultats obtenus par ses élèves sur le «bulletin trimestriel». Le professeur, que nous évoquions à l'instant, ouvre son carnet de notes. Pour chaque élève il possède une série de notes qui va souvent donner lieu au calcul d'une moyenne. Mais cette note finale, quelle information contient-elle réellement ? Bien sûr, elle positionne l'élève par rapport à ses camarades, elle entraîne un jugement de valeur sur les résultats obtenus : mauvais, passable, moyen, bon, très bon, mais est-ce suffisant ? Nous voyons alors la situation du professeur qui lit ses notes et en déduit des jugements sur les résultats des élèves alors que ce sont les résultats obtenus qui devraient permettre de définir une note.

Le professeur avait à l'origine beaucoup de renseignements. Il avait tout en main pour pouvoir travailler efficacement, corriger les erreurs, faire des groupements d'élèves, proposer un nouveau test. Il ne faut pas oublier que les compétences exigibles sont à atteindre en fin d'année, il est donc normal que certains élèves ne sachent pas en décembre ce que nous devons attendre d'eux en juin. Il faut donc reproposer d'autres contrôles sommatifs testant les mêmes compétences exigibles à des niveaux d'atteinte comparables pour les élèves n'ayant pas réussi la première fois.
Ce professeur a passé beaucoup de temps à effectuer la correction des copies et il n'en reste plus rien. Aucune trace, seulement un vague souvenir. Deux mois après le contrôle, il est bien difficile de se remémorer (pour la centaine d'élèves dont nous avons la charge) ce que représente la note, quelles connaissances et quelles erreurs elle traduit. Quel travail long et fastidieux pour rien !
Comment le professeur peut-il travailler avec si peu de renseignements ? Quel dialogue va-t-il instaurer avec ses élèves et comment va-t-il renseigner les parents qu'il rencontre ?
Quelle fonction pédagogique joue cette note traditionnelle auprès de l'élève ?

DOMINIQUE : 15 sur 20

Il a reçu sa copie. Il a 15. Le professeur a mis des appréciations mais l'élève a une bonne note alors tout va bien. Il va se satisfaire de cette note. Alors que 15, cela veut dire qu'il y a une connaissance qui n'est pas installée, et qui ne va peut-être pas s'installer. C'est le calcul de l'aire de la sphère, c'est le produit des fractions, et voilà une

lacune. L'enfant va continuer à vivre sa scolarité et on ne lui aura pas permis de repérer ses lacunes et ses erreurs, et d'y remédier. On devient laxiste en abandonnant l'exigence de l'acquisition de toutes les compétences exigibles d'un niveau donné. Nous cherchions à mettre en lumière le rôle pédagogique de la note pour les professeurs et les élèves, nous pouvons affirmer que les pratiques traditionnelles de notation des travaux d'élèves ne conduisent guère au dialogue et à la remédiation des erreurs. Quant à la fonction sociale de transmission, de support de l'information, nous voyons déjà qu'il n'en est rien pour l'élève, il n'en sera rien non plus pour les parents : l'enseignant ne fixant pas les références de l'élaboration de sa note.

Un exemple simple est l'histoire de l'enfant qui revient avec son bulletin et qui dialogue avec son père.
— 12 en Sciences Humaines, c'est bien.
— Non, car tout le monde a plus de 10.
— 12 en Français, tu peux faire mieux, alors !
— Non, c'est la meilleure note.

C'est aussi l'histoire du pilote d'avion. Il travaille pour la meilleure compagnie, celle qui n'embauche que de très bons pilotes. Ces derniers ont l'habitude de communiquer à leurs passagers la note qu'ils ont obtenue à l'examen final. Vous êtes dans l'avion, et le pilote vous annonce qu'il a eu 16/20 à cet examen et que l'on va procéder à l'atterrissage. Un passager curieux lui demande : «Où avez-vous perdu les quatre points?» Le pilote lui répond alors qu'il les a perdu lors des manœuvres d'atterrissage !

MOYENNE : 9,735 !

Mais revenons au professeur face aux bulletins de fin de trimestre. Sur ces bulletins figurent pour chaque matière une note unique qui est généralement la moyenne de toutes les notes obtenues durant le trimestre. Ainsi à partir de notes qui ne transportent guère d'information, l'élève obtient une autre note à partir de laquelle lui-même, ses parents et ses professeurs établissent un constat global d'échec et de réussite. Montrons que la notion de moyenne procède de l'évaluation par l'échec. En effet, supposons qu'un élève obtienne deux zéros consécutifs à deux contrôles portant sur le même sujet et constitués d'exercices de niveaux comparables. Dans le courant de l'année nous lui proposons un autre test sommatif pour vérifier si les connaissances sur ce même sujet se sont installées. Il obtient alors la note maximum de 20. Calculons la moyenne de cet élève : il a 7 sur 20 (quelques-uns diraient même 6.66 !). Il n'a pas su la première fois, il n'a pas su la deuxième fois mais il a su parfaitement la troisième fois, or il a 7 ! Quel salaire pour un travail !
Notre exemple est idéal pourtant, car dans la réalité, lorsque nous effectuons la moyenne nous mélangeons des notions qui n'ont aucun lien entre elles.
Vous imaginez deux échecs au permis de conduire, et enfin vous l'obtenez la troisième fois. Mais l'examinateur ne vous en donne que le tiers, car il a fait la moyenne ! Il n'y aurait pas de record du monde si l'on effectuait la moyenne des performances des athlètes.
L'échelle de notes est un repérage. Elle n'est pas munie d'une structure additive, on ne peut pas faire de division, ni de moyenne. Ce n'est pas à nous, scientifiques, de succomber aux charmes du résultat chiffré, à la magie du nombre.

Théorie et pratique

Sur quelles théories pouvons-nous nous appuyer pour changer quelque chose de cette description bien décourageante de nos pratiques d'évaluation.
— La théorie de l'analyse systémique :
A la grande hétérogénéité des élèves, il faut répondre par une aussi grande variété d'approches pédagogiques, d'outils didactiques, de formes de groupement, de formes de certification et d'évaluation.
— Piaget nous a appris qu'il existait des stades dont l'enchaînement incontournable nous obligeait à accompagner l'apprentissage sur de longues périodes.
Claude Pair écrit que, puisqu'il n'y a pas d'urgence en fin de sixième au niveau de

l'orientation, nous pourrions nous dispenser de mettre des élèves en situation d'échecs sur une évaluation sommative.
— Les didacticiens sont à la recherche de leçons clés permettant de destabiliser les modèles peu performants, pour les remplacer par d'autres favorisant l'intégration, l'appropriation des connaissances nouvelles. L'enseignement par activités riches doit réaliser la construction de nouveaux modèles qui permettent la résolution de problèmes de plus en plus complexes. Nous savons que les concepts mathématiques ne seront jamais simples et qu'il faut du temps pour leur appropriation.
Nous pouvons ici rappeler la différence faite entre complexe et compliqué. Est compliquée une tâche difficile qui peut se décomposer en mini-tâches élémentaires simples. Lorsqu'un travail est compliqué, il est souvent long, pénible ; mais avec de la constance, de l'application, on le réalise, on va jusqu'au bout de ce qui est demandé. Un travail complexe ne se décompose pas, l'analyse d'un texte, la recherche d'une démonstration, le choix d'outils pour réaliser la tâche seront toujours difficiles. Le processus intellectuel mis en place sera toujours de niveau élevé.

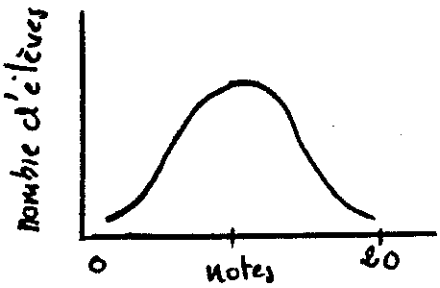
Formative-Sommative

— Les spécialistes de l'évaluation font la distinction entre l'évaluation sommative et l'évaluation formative.
Il y a une vingtaine d'années coexistaient deux formes d'évaluation. L'une accompagnait l'apprentissage d'un certain nombre de contrôles notés, et l'autre était la composition trimestrielle. Cette composition était considérée comme un bilan des notions étudiées durant le trimestre. Les contrôles notés ne donnaient pas lieu au calcul d'une moyenne, seule la note de composition était retranscrite sur le bulletin trimestriel. Ces contrôles permettaient à l'enseignant de moduler son appréciation, de porter un jugement sur la régularité du travail, sur les efforts, sur la participation et sur la rédaction des devoirs à la maison. Nous ne dirons pas que les contrôles procédaient d'une véritable évaluation formative. Ils avaient pourtant, pour les élèves, un avantage certain : celui de ne pas les faire vivre dans l'angoisse permanente des devoirs notés irrémédiablement. Les échecs répétés étaient mieux pris en compte par les élèves qui savaient qu'ils retrouveraient des questions analogues dans la composition trimestrielle. La note de la composition était suffisamment loin de l'apprentissage pour refléter l'appropriation des connaissances.
Interrogeons-nous plus avant sur l'évolution du système d'évaluation en vigueur actuellement. Au système décrit précédemment on a substitué le contrôle continu des connaissances qui est apparu comme une méthode d'évaluation évitant et compensant l'échec possible du jour de la composition. Avec la multiplication des tests nous avons multiplié les compositions par 3, 4 ou 5. Toutes les notes sont comptées, nous n'avons fait que de l'évaluation sommative. Nous n'avons pas pour autant vu naître une véritable évaluation formative ; il existe aujourd'hui une série de notes «bilan» qui permet un calcul de moyenne dont nous avons montré précédemment que ni l'enseignant, ni l'élève, ni ses parents ne pouvaient vraiment en déduire des affirmations précises sur l'état des connaissances de l'apprenant. Une évaluation de type uniquement sommatif pour des classes hétérogènes ne peut raisonnablement aider à une politique de lutte contre l'échec scolaire.
Quel rôle important joue donc une évaluation de type formatif ? Pour l'élève en difficulté elle dédramatise la situation en ne le mettant pas en échec de façon permanente. L'enseignant qui propose un test formatif n'a pas pour intention de tirer des conclusions définitives sur l'état d'acquisition des connaissances des élèves. Il sait que l'enfant peut se trouver dans une période où il est en train de détruire un modèle pour en structurer un autre et qu'il doit se garder de conclusions hâtives. Le test formatif permet de repérer les erreurs, les incompréhensions, il permet aussi de dire à l'enfant ce qu'il sait faire. Toutes ces données précises, communiquées à l'élève, permettent à l'enseignant de spiraler son enseignement de façon à réaborder autrement des notions encore peu assimilées.

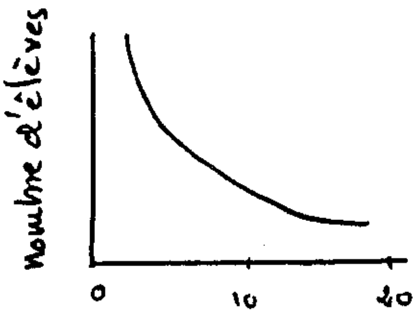
Ah ! les belles courbes

Avec la réalisation du collège unique et l'objectif des 80 % d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat, se pose la compatibilité de cette ambition avec des formes de contrôle héritées d'une tradition sélective.
Lorsque l'on teste beaucoup de notions à la fois et lorsque cela concerne un grand nombre d'élèves, on obtient une courbe de Gauss centrée autour de la moyenne (qui n'est pas 10, contrairement à ce que croient les élèves !).
En effet, au baccalauréat, dans presque toutes les disciplines, (sauf les mathématiques et les sciences physiques) l'élève dispose de documents qu'il doit analyser. Il doit ensuite, produire une synthèse sous forme d'une dissertation. Cela se passe en Français, en Philosophie, en Langues vi-

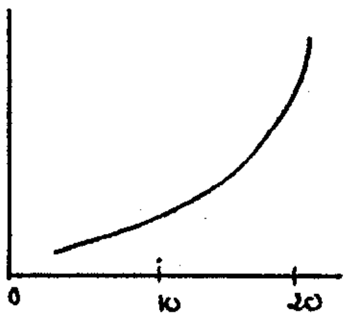
Test d'intelligence générale : le bac.
Courbe de Gauss.



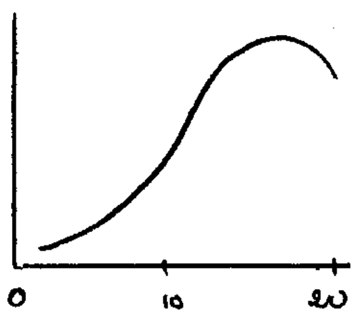
Courbe de concours en I.



Courbe d'apprentissage en J.



Courbe proposée par nous
pour le brevet des collèges.



Il est légitime, lorsqu'on recueille les résultats du baccalauréat d'obtenir une courbe de Gauss, car le bac a deux fonctions. C'est à la fois un examen de fin de cycle et une ouverture vers l'enseignement supérieur.

vantes, en Histoire et en Géographie et même en Sciences-Naturelles. Est-ce bien utile ? Il serait possible de tester d'une part les connaissances, les savoir-faire, disciplines par disciplines, puis d'autre part, dans un petit nombre de matières choisies par l'élève on évaluerait les qualités d'expression, d'analyse, de synthèse et d'exposition.
La fonction d'obtention de l'examen est donnée par la partie croissante de la courbe qui se retrouve dans la courbe d'apprentissage dite courbe en J.

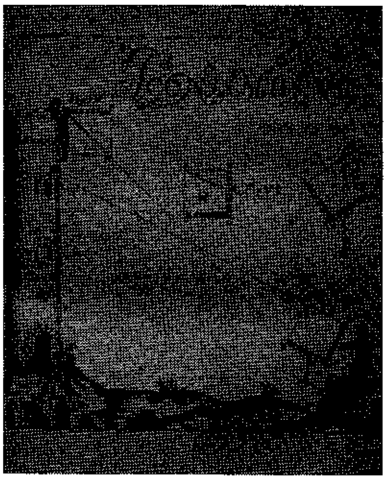
La courbe de l'élite

La fonction de tri de l'élite, est donnée par la partie décroissante de la courbe, qui se retrouve dans la courbe des concours, dite courbe en I. Ce rôle permet d'attribuer les mentions et de révéler les élèves qui iront dans telles ou telles classes préparatoires aux grandes écoles.
Mais nous n'avons pas dans notre pratique journalière à effectuer ce tri, à mettre en échec des élèves sur des contrôles de type concours. Dans un concours il est légitime de sélectionner, il n'est pas légitime de sélectionner en sixième, pas plus d'ailleurs qu'en troisième. Si l'on en croit les textes officiels la première classe d'orientation est la classe de seconde. Seul un choix de méthode et de stratégie pédagogique justifie une orientation en quatrième technologique.

L'élève apprend quelque chose, il est normal qu'ayant appris il sache, et que nous ayons ainsi une courbe d'apprentissage en J. Nous sommes enseignants, nous souhaitons donc qu'il y ait beaucoup d'élèves qui aient compris les concepts que nous leur enseignons. La mise en place d'une pédagogie différenciée a pour but que tous les élèves apprennent et réussissent pour toutes les compétences exigibles. C'est notre contrat avec la société que d'obtenir une courbe en J.

Pour le Brevet qui ne donne pas de mention mais qui certifie une fin de cycle, il paraît logique de retrouver une telle courbe d'apprentissage avec une partie (actuellement un tiers des points) de réinvestissement des connaissances dans les questions dites enchaînées.

Imaginez que vous ayez à choisir pour vos enfants une auto-école. Prendriez-vous celle où il y a peu de candidats qui réussissent le permis, mais où ceux qui l'ont obtenu seront conducteurs de Formule 1 ! Ou choisirez-vous celle où beaucoup de candidats réussissent. Le choix est simple, vous connaissez la réponse.



Tu sais ou tu ne sais pas (pas encore)

Lorsqu'on pose des questions difficiles, on est réduit, lors de la correction, à faire des aménagements de barème, à pratiquer la docimologie, en fait on ne voit plus rien et l'on accorde des demi-points pour un mot, un soupçon d'idée. On ne peut plus déterminer ce que sait un élève, on ne sait plus évaluer une copie. Ceci est d'autant plus vrai pour la copie d'un élève moyen. Ce n'est pas en notant sur 25 que l'on rétablit une évaluation sérieuse.
De la même façon, nous rencontrons souvent des évaluations du type suivant :
l'élève doit écrire le résultat des opérations suivantes :

$(3/4) \times (5/7) =$ $\qquad$ $(3/4) \times (-8/5) =$ $\qquad$ $(3/4) \times (5/4) =$

Chaque réponse vaut un point.
Un élève (parmi beaucoup d'autres) répond correctement aux deux premières opérations ; il se trompe à la troisième et répond 15/4. La note qu'il obtient à cette question est donc de 2 points sur 3. Or l'élève montre qu'il ne maîtrise pas cette application. Il n'est pas nécessaire de faire appel à beaucoup de connaissances didactiques pour penser que l'objectif «savoir multiplier les fractions» n'est pas atteint puisque l'élève a été déstabilisé par le dénominateur commun. Donc il ne mérite pas 2 points mais 0 point et l'apprentissage de cette notion est à reprendre.
La notation traditionnelle est donc plus laxiste que celle que nous proposons.
Mais on peut aussi, sur cette question, considérer que les deux premières opérations (avec des dénominateurs différents) sont bien réussies car elles représentent une application directe de la règle.
La troisième opération (avec des dénominateurs identiques) nécessite un repérage, une analyse de ce «distract» pour ne pas confondre l'addition et la multiplication de deux fractions. La nécessité de cette analyse explique sans doute les erreurs plus fréquentes sur ce type de réponse.
Les items proposés ne sont pas de même niveau, le processus intellectuel mis en œuvre pour réaliser la tâche demandée est plus élevé dans les deux premiers items que dans le troisième. L'enseignant, au lieu de mettre deux tiers des points à cette question, doit plutôt dire à l'élève : «tu sais appliquer la règle dans le premier cas (dénominateurs différents) mais pour atteindre l'objectif «savoir multiplier deux fractions» tu dois aussi maîtriser l'autre cas». Sinon l'élève risque de se contenter des deux tiers des points qu'il a obtenus sans pour cela faire l'analyse de son erreur. ■

(A suivre bientôt : **Une pratique**).

EVALUER L'ÉVALUATION

RÉSULTATS

Votre note est :

0 : vous êtes dur **ou** vous avez un compte à régler avec cet élève **ou** vous n'avez pas cherché la solution d'un problème depuis longtemps.

1-2 : vous aviez un contrat net et précis avec la classe : utiliser une modélisation algébrique conduisant à une équation à résoudre.
L'élève est donc hors sujet.
NB : et si le contrat était implicite ?

3-4 : vous avez donné ce problème à la suite d'un travail sur les fractions **ou** comme un «problème-ouvert» pour lequel vous examinez toutes les solutions avec intérêt.

5 : vous avez mal lu **ou** vous êtes généreux voire magnanime **ou** vous accordez trop d'importance aux conditions de vie difficiles de cet enfant.

Quelques commentaires : l'élève en question n'est pas considéré comme un «bon élève» en mathématiques, en particulier il utilise mal les techniques calculatoires formelles de l'algèbre qui s'apparentent d'ailleurs souvent à des «recettes» pour beaucoup d'élèves ; à défaut cet élève pense : chaque étape de la démarche correspond à un **calcul chargé de sens** pour la situation (ce qui n'est pas le cas avec la résolution des équations, le sens se limitant à la validité des opérations algébriques).
Il montre, aux maladresses de rédaction près, que 33/84 est une fraction de la vie de Diophante. Dire alors que sa vie est de 84 ans (un multiple ne peut convenir) apparaît très pertinent dans la mesure où cette affirmation s'accompagne d'une vérification.
Sans doute faut-il remarquer que
33/84 = 11/28 et qu'il faut examiner 28 et 56 comme autres possibilités. On pourrait aussi insister sur les implicites de l'énoncé qui laisse penser que le temps se compte en nombre **entier** d'années, qu'il faut ajouter x/7 (Diophante jeune homme) et 5 (couple sans enfant), une lecture précise du texte conduirait à l'interprétation x/7 = 5 (voir le texte exact p. 95 : Histoire des Mathématiques. J.P. Collette - Tome 1. Vuibert).
Pour les problèmes d'énoncés, voir «Lecture d'énoncés et consignes» J.M. Zakhartchouk CRDP Amiens et «Lecture et compréhension de textes» R. Duval - Irem de Strasbourg, brochure S 124-1986.
D'autre part, les gens cultivés savent (ou se doutent) que Diophante fut un vieillard respecté, par la suite considéré comme le premier algébriste.
Toutes ces choses sont à prendre en compte si on veut se dégager de l'exercice formel pour résoudre :

$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x.$

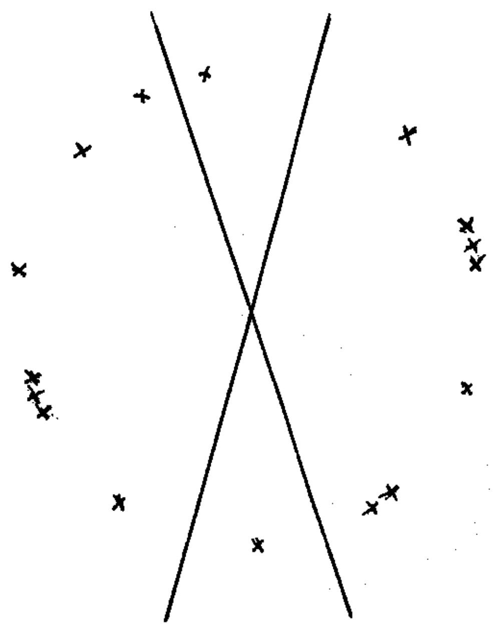
LES GRANDES ENQUÊTES DU PLOT :

Pliage au Collège

Gustave CHOQUET respectueusement mis en cause

Art Kline de l'agence DDT (1) rapporte pour vous :

L'objet du délit est la **symétrie axiale,** connue aussi sous les faux noms de symétrie orthogonale ou réflexion. Elle a fui la quatrième pour se mettre au service d'une classe rivale : la sixième. Le gang des nouveaux programmes n'est pas étranger à cette réorganisation très hiérarchisée des isométries : de la **symétrie axiale** en 6e, on passe à la **symétrie centrale** en 5e (composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires), puis à la **translation** (composition de deux symétries axiales d'axes parallèles ou utilisation du parallélogramme, figure invariante par symétrie centrale).



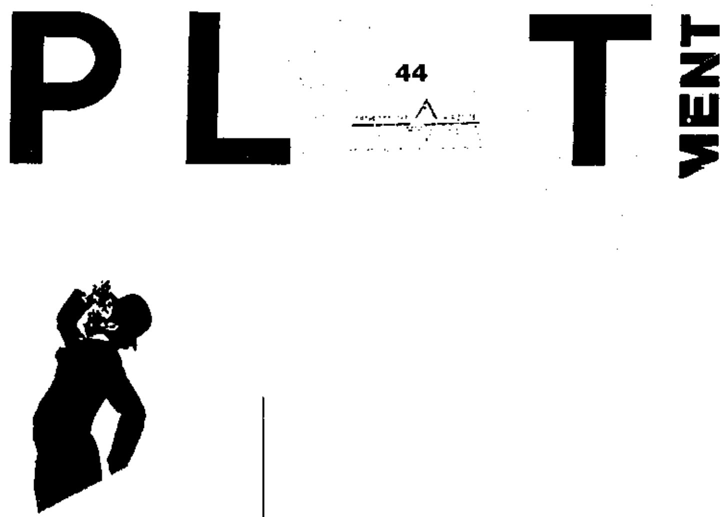
Pièce à conviction n° 1 : l'observation doit conduire à une formulation puis à une démonstration.

(1) Détective Didactique Temporaire.

Enfin, les **rotations,** nouvelles venues au collège, fières de leurs jeunes et sémillantes rondeurs, toutefois un peu égocentriques... (centre O, angle α). Elles peuvent apparaître aussi comme composition de deux symétries axiales (les axes se coupent en O et forment un angle $\alpha/2$). On peut mettre en évidence leurs origines par quelques manipulations expérimentales simples (voir pièce à conviction n° 1).

```
POUR P :L
LC FPOS :L BC CROIX
FIN

POUR D :A
BC FCAP :A AV 200 RE 400 LC ORIGINE
FIN

POUR DEP
FEN ME 1 CT DONNE "1 HASARD 85
DONNE "2 95 + HASARD 80
FCC 1 D :1 FCC 2 D :2
TAPE [COORDONNEES DU POINT DE DEPART :]
DONNE "L LL
VT FCC 0 P :L SYM 1
FIN

POUR SYM :N
TAPE [SYMETRIE OU FIN ( S OU F ) :]
DONNE "REP LISCAR VT
SI :REP = "S [PSYM SYM 1 + RESTE :N 2] [SI NON EGAL?
:REP "F [SYM :N] [VT TAPE [AUTRE EXEMPLE ( O OU N ) :]
DONNE "R LISCAR SI :R = "O [DEP] [ME 25 EC "SALUT]]]
FIN

POUR CROIX
FCAP 0 REPETE 4 [AV 2 RE 2 TD 90]
FIN

POUR PSYM
DONNE "T ( COS CHOSE :N ) / SIN CHOSE :N
DONNE "B SOMME DER :L DIV PREM :L :T
DONNE "COEF ( 2 * :B * :T ) / ( 1 + PROD :T :T )
DONNE "CI DIFF :COEF PREM :L
DONNE "DI DIFF :COEF * :T DER :L
DONNE "L LISTE :CI :DI
FCC :N P :L
FIN
```

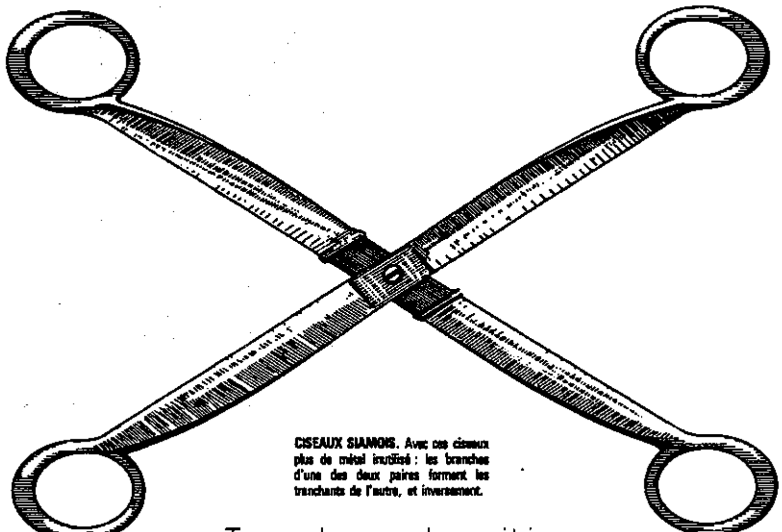
Un examen des manuels, des pratiques de classe conduit au constat suivant : deux méthodes sont plus particulièrement utilisées avec les enfants de 6e pour introduire la symétrie axiale : travail sur figures symétriques ou pliage de la feuille de papier (voir pièces à conviction 2).



Pièce à conviction n° 2

Trouver les axes de symétrie

Une enquête délicate dans le milieu (des mathématiques) avec l'aide d'indics (APM, IREM...) permet d'exhiber les indices suivants :
«Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation ; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

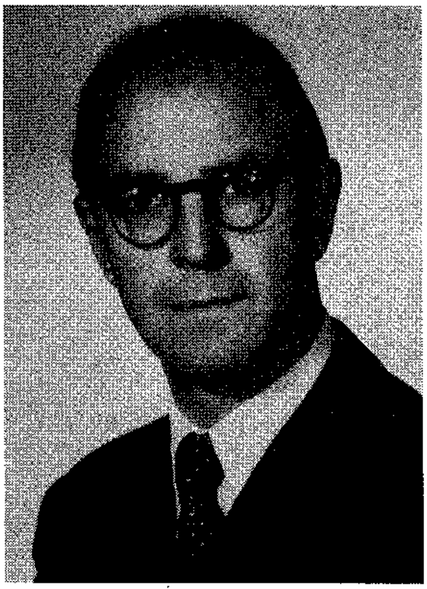


Trouver les axes de symétrie.

Pièce à conviction n° 3

Axiome du pliage (ou de symétrie).

Pour énoncer commodément le dernier axiome, on désignera par $\Pi_1(D)$ et $\Pi_2(D)$ les demi-plans ouverts définis par une droite D, et on appellera *pliage* autour de D toute isométrie i de $D \cup \Pi_1(D)$ sur $D \cup \Pi_2(D)$ telle que pour tout $x \in D$, on ait $i(x) = x$.
Axiome IV'. Pour toute droite D, *il existe au moins un pliage autour de* D.
Nous démontrerons l'unicité du pliage autour de D ; nous ne la postulons pas dans l'axiome IV' parce que sa démonstration est très simple».
Ils mettent directement en cause leur auteur Gustave Choquet.
Nous ne développerons pas plus nos accusations, l'ensemble des pièces à conviction complémentaires sont réunies dans le dossier : «l'enseignement de la géométrie -Hermann-1964».
Bon nombre d'éléments de cette enquête restent encore confidentiels : trop de maîtres et d'enfants sont privés d'informations telles que l'existence d'une axiomatique complète qui structure la géométrie. Il faut aussi révéler que l'objectif de l'enseignement reste, non l'étude des structures, mais la structuration des objets géométriques ; il semble aussi plus important de donner les raisons qui ont amené à fabriquer un concept plutôt que de commencer par définir ce concept.
Découvrez les dessous affriolants de cette affaire avec un autre dossier au nom évocateur : «Groupes et géométrie» (Brigitte Sénéchal - Hermann - 1979).
Bien qu'étranger aux attaques en diffamation, le PLOT n'en divulguera pas plus... sauf peut-être dans les articles.
— à propos des transformations,
— translation en 4ᵉ.



Gustave CHOQUET qui, directement ou indirectement, aurait inspiré les nouveaux programmes de collège en facilitant l'introduction de la symétrie axiale dès la 6ᵉ grâce à l'axiome du pliage dans le cadre d'une axiomatique à base métrique.
(Voir aussi : Les fondements de la géométrie PUF. J. Lelong-Ferrand - 1985).

Bien que très compétent, cet homme n'est pas dangereux.

PROCHAINE GRANDE ENQUÊTE DU PLOT :

Scandale à Tours :
didactique et bachotage
Un collaborateur du Plot accusé
de concomitance.

COURRIER DU PLOT

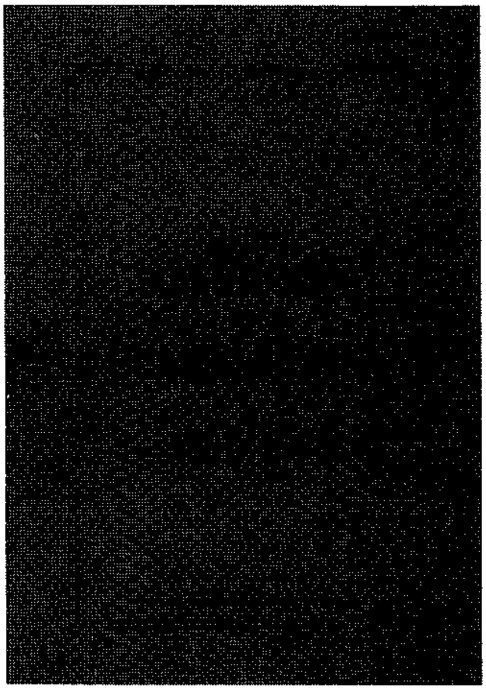
Dominique GRAND - Poitiers

«A propos du suivi scientifique» Plot 42

Cher ⊃ M ⊂
Faisant partie d'une équipe de suivi scientifique (celle de Poitiers) j'ai lu avec intérêt la rubrique A-PLOT-STROPHE que tu as rédigée.
Il me semble que ton article est très (trop) dur en ce qui concerne le travail des équipes du suivi scientifique. Je m'explique :
1. Mettre en parallèle les travaux des équipes du suivi et ceux des didacticiens tels que Audibert ou E. Gallon me semble mal venu. Pour employer un langage sportif : nous ne jouons pas dans la même division.

2. Dans ton article il n'y a aucune prise en compte des moyens qui ont été attribués aux équipes pour effectuer un tel travail : 3 heures pour 4 personnes pour citer l'exemple de Poitiers. Peut-on mettre en face les moyens d'Audibert ?

3. On peut penser ainsi que la commission n'a pas su organiser scientifiquement les travaux. Mais en avait-elle les moyens ? (seulement trois réunions par an et un membre par équipe remboursé).



4. Les travaux de didactique ne sont pas suffisamment pris en compte ? C'est vrai, mais c'est oublier :

— que toutes les académies n'ont pas de didacticiens,
— que ceux qui pourraient faire le lien entre la recherche fondamentale en didactique et la pratique quotidienne voient disparaître leurs moyens (le potentiel de l'IREM de Poitiers a été divisé par deux et beaucoup d'animateurs n'ont plus qu'une ou deux heures IREM en heure supplémentaire) ou ont disparu (cas des directeurs d'études).

5. Tu dis que «les remarques sont anecdotiques». C'est peut-être vrai pour toi. Mais combien de professeurs «lambda» ont appris à observer leurs élèves dans le but de comparer leurs réactions et celles décrites grâce aux travaux des équipes. Apprendre à observer les élèves, n'est-ce pas le b.a.ba de toute didactique ?
Ma conclusion est que si les produits laissent à désirer, ils sont néanmoins remarquables compte tenu des moyens attribués.
Je ne souhaite pas polémiquer dans les colonnes du PLOT, mais simplement nuancer ton jugement.

Si l'article en question (Plot n° 42) a pu être mal ressenti, il ne se voulait ni partisan ni négatif. Cela pose une nouvelle fois le problème de la communication déjà évoqué dans cet article et l'éditorial de ce numéro : communication au sens de l'interprétation d'un message, communication au sens de la promotion des produits et des entreprises (en particulier dans le cadre de l'enseignement et de la didactique : quels professeurs toucher (profil, nombre...) quels contenus, quelles formes donner aux actions... ?), communication au sens de la vulgarisation et du développement de la culture scientifique (journaux, musée, expositions, audio-visuel...).

M. Clinard

ÇA NE TOMBE PAS JUSTE !

Marc BLANCHARD - Rochefort

Mais ça tombe bien !! Après plusieurs années d'absence (Math en Egypte...), un des auteurs du journal, des plus anciens et des plus productifs, nous revient.

20 divisé par 3, «ça ne tombe pas juste». Qui d'entre nous n'a entendu, voire prononcé une phrase analogue ?
Et pourtant ou en effet :

- pour partager 20 dalmatiens entre trois familles adoptives, il est facile d'en donner six à chacune mais que faire des deux qui restent ?
- pour partager 20 mètres de tissu entre trois couturières, parions que cela ne leur poserait pas de grosses difficultés ;
- pour partager 20 gâteaux identiques entre trois enfants, cela peut se faire à l'aide d'un couteau en coupant de façon convenable deux gâteaux.

Alors 20 divisé par 3, cela peut-il tomber juste ?
En fait la division relève de problématiques différentes.

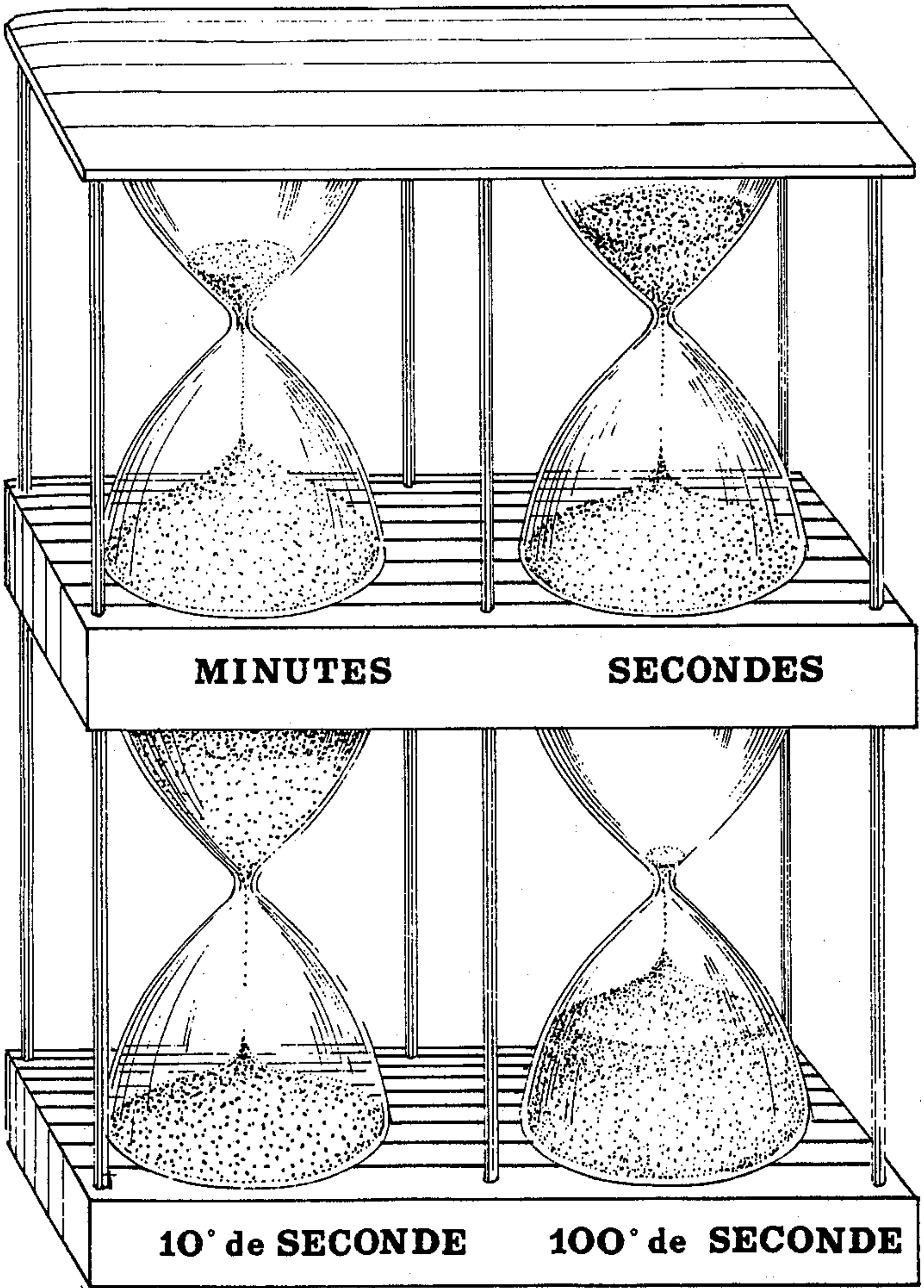
- L'une est totalement discrète et relève du comptage, le partage se fait sur des objets insécables (cas des dalmatiens), il s'agit de la division euclidienne définie dans N^*.
L'égalité fondamentale est
$20 = 6 \times 3 + 2$.
- La seconde est continue et relève de la mesure, le partage se fait indépendamment de la mesure de ce qui est à partager (cas du tissu). La division est définie dans R^{*+} (le plus souvent dans Q^{*+} mais la densité de Q dans R le permet dans la pratique). Dans l'exemple présent, on considère le rationnel 20/3.
Notons qu'ici, avec une autre unité de mesure, la longueur du tissu pourrait être de trois ou de six (etc.) unités et il n'y aurait apparemment plus de problème.
- Dans le dernier aspect de la division, les objets à partager sont sécables (cas des gâteaux) et la division est à la charnière des deux cas précédents.
L'égalité fondamentale est alors celle-ci $20/3 = 6\ 2/3$ (ce qui conventionnellement signifiait en France autrefois et signifie encore dans certains pays 6 + 2/3 car $2/3 \in [0;1[$).

En fait la phrase «ça ne tombe pas juste» est employée par les élèves dans un autre sens, purement calculatoire : la division poursuivie après la virgule ne s'arrête pas car le reste n'est jamais nul. Cette division poursuivie aussi loin que l'on veut (on peut) n'a de sens que s'il s'agit d'un partage dans un cas continu (tissu ou gâteaux) pour lequel 20/3 a une signification physique. Ce qui est à mettre en cause ici est la base de numération choisie, pour nous la base 10.
Nous savons que la fraction irréductible a/b a une écriture décimale finie lorsque b n'est pas divisible par d'autres nombres premiers que 2 ou 5. En base 3, on écrirait
202/10 = 20,2, en base 6 : 32/3 = 10,4,
en base 12 : 18/3 = 6,8. Tout nombre rationnel peut avoir une écriture à virgule finie dans certaines bases de numération mais aucune base de numération ne permet d'écrire tout rationnel avec une écriture à virgule finie. Alors la base 10 ou une autre...
Pour les élèves jusqu'au premier cycle y compris, il est inutile d'entrer dans des considérations de bases de numération de cet ordre, mais il est sans doute très profitable de distinguer les activités de comptage (phénomènes discrets) de celles de mesure (phénomènes continus).
Les rationnels bâtis à partir des entiers (solutions d'équations du type
$bx = a$, $(a,b) \in (Z \times Z^*)$ ne sont pas tous entiers. Il n'est pas toujours possible de les écrire sous forme décimale, d'où la nécessité d'une nouvelle écriture (a/b).
Quant aux nombres irrationnels, il n'est jamais possible de les écrire sous forme décimale ou rationnelle comme leur nom le laisse deviner, d'où la nécessité d'user de nouveaux symboles (radicaux, noms spécifiques, etc.). Pour mieux situer tous ces nombres sur la droite des réels, il est souvent commode de connaître des valeurs approchées (décimales voire rationnelles pour les irrationnels), de les encadrer si on le veut de plus en plus finement, ce que les calculatrices permettent de faire désormais plus facilement qu'auparavant.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Guy Brousseau identifie une douzaine de conceptions différentes de la division chez l'enfant de l'école primaire. (Travaux disponibles à l'Irem de Bordeaux).

LA DIVISION DU TEMPS
Le sable, ça tombe et c'est juste !



SABLIER DE PRÉCISION : Chaque sablier composant cet ensemble est rempli d'un sable d'une finesse différente, donc d'une vitesse différente. Le premier donne les minutes et ainsi de suite jusqu'au 100e de seconde. Recommandé aux chronométrages sportifs.

TÉMOIGNAGE

L'ART D'ACCOMMODER LES RESTES

Les reliefs d'un petit déjeuner montagnard pour faire une bonne leçon

Il y a des jours, comme ça, où l'on a le temps de rêver : imaginez des vacances de Pâques dans un châlet dans une bien belle montagne enneigée, une matinée ensoleillée que les heures ont à peine entamée, un petit déjeuner doux et sucré que l'on vient de terminer, un dernier petit café qu'on déguste à petites lampées quand SOUDAIN...

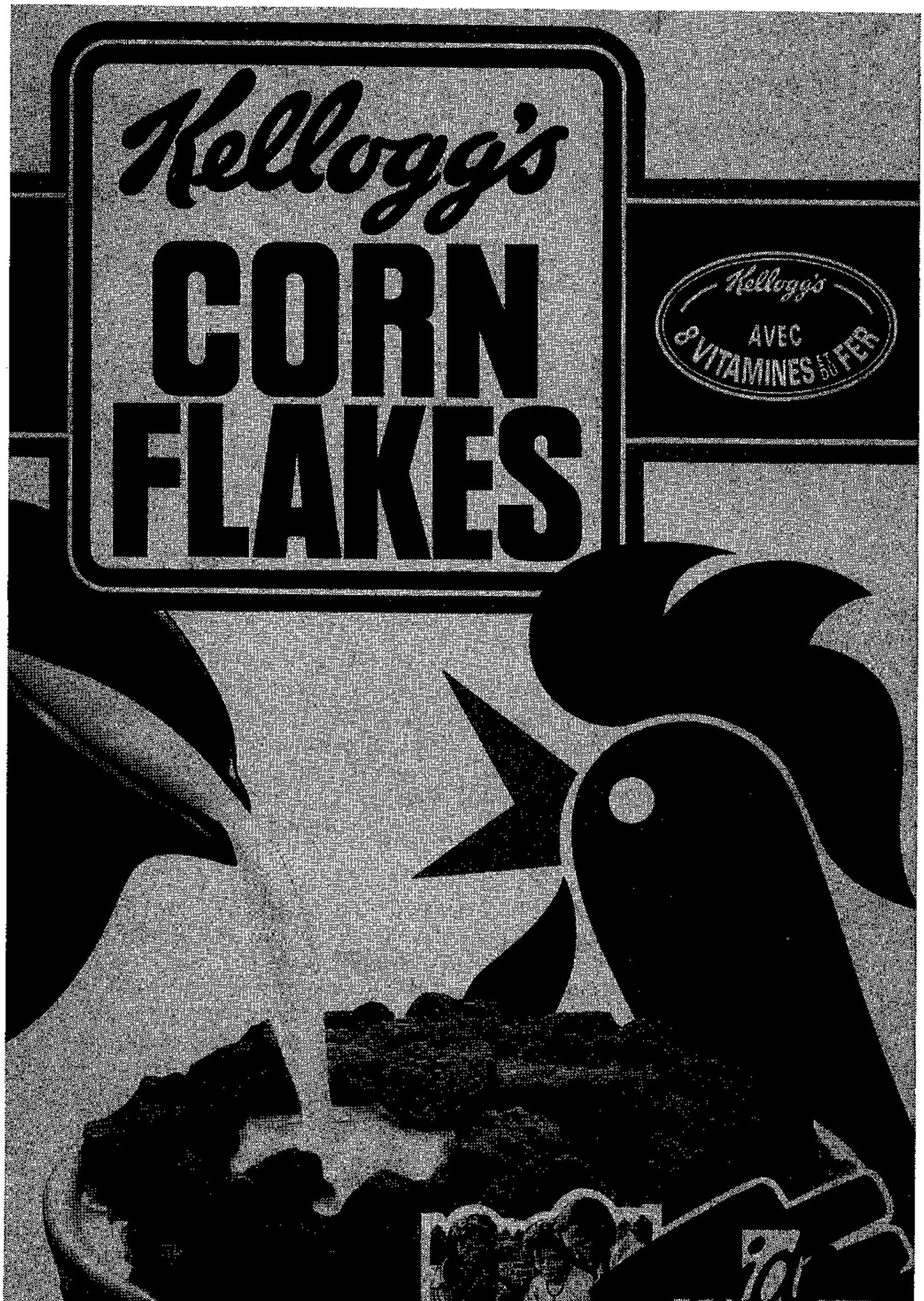
devant vous se dresse la grande boîte de **Corn Flakes,** 375 g, super paquet familial, 10 % gratuit, et tout à côté la petite boîte individuelle de 20 g.
Curieuse coïncidence, heureux hasard ; pourtant il n'y a pas de moyenne boîte ni de Boucle d'or (miel du pays), il n'y a rien à faire du côté de la littérature, d'ailleurs la douce épouse, professeur de français ne réagit pas, somnolant, bordée de douillettes pensées.
Mais le professeur de mathématiques se réveille, la mémoire agitée, la synapse alertée, la myeline aux abois, il imagine son premier cours, celui de 8 à 9, il posera les deux boîtes sur le bureau, regardera les élèves bien en face et dira :
«Vous aimez les Corn Flakes ? oui, non, aucune importance. Qu'avez-vous à dire sur ces deux boîtes ?»
Notre professeur de mathématiques évacuera les problèmes de couleurs, de marques, de gallinacés.
Il sera plus intéressé par les rapports socio-psycho-affectif : la boîte individuelle ou familiale, le moi contre le collectif sans pour autant s'égarer dans le dilemme individu/démocratie.
Il écartera les arguments nutritifs (très importants qu'il laissera à son collègue biologiste) et pratiques (quand on est seul les petites boîtes permettent des pétales céréaliers et journaliers toujours délicatement croustillants à souhait (slogan à vendre).
Il favorisera sans doute «le bon réflexe» (avec ou sans coq) les élèves l'y aideront car en classe de mathématiques un contrat didactique implicite fait qu'on parle plus facilement de nombres et de formes géométriques que des mérites énergétiques des Corn Flakes comparés aux avantages diététiques du Müesli.
Bref, on parlera prix, masse, volume, on dressera peut-être un tableau après mesures :

Masse	Longueur	Largeur	Hauteur
375	19	7	30
20	7	4	10,3
g	cm	cm	cm

On liera masse et volume ; on reliera masse et prix ; on comparera ; on calculera :
— à partir de la petite boîte, **trouver la hauteur d'une boîte de 375 g. dont les dimensions de base restent 19 cm et 7 cm.**
On trouve 40,7 cm ; grosses différences à interpréter : astuce d'emballeur pour mieux séduire le consommateur ou réalité mathématique compliquée...

— en effet, ça pourrait se compliquer : **trouver les dimensions d'une boîte de 375 g, dimensions proportionnelles à celles de la boîte de 20 g.**
Difficulté de lecture de l'énoncé, (notre professeur de mathématique peut sans doute l'améliorer, mais, rappelez-vous, il sirote son café paresseusement et vous laisse ce soin), assimilation du concept de proportionnalité, trilinéarité du volume, calcul du rapport des volumes (le même que celui des masses), racine cubique pour avoir le rapport des longueurs (donc inversion de la fonction cube, problème toujours actuel des inversions des opérations, des implications des démarches...), calcul des longueurs...
D'une manière générale, apparaît le double problème de la stratégie globale (enchaînement des démarches et calculs) et des stratégies locales intermédiaires, chacun des aspects privilégiés occultant l'autre.
Un beau, un vrai problème de math, et non une application toute bête d'un algorithme

imposé ; il peut conduire à des débats de classe : comparaison de stratégies, arguments contradictoires, contre-exemples...
Un exercice à bien préparer pour qu'il ne soit pas indigeste.
Mais que fait notre professeur de mathématiques, goûteur de café ?
Il ne regarde plus la montagne aux versants scintillants de neige, il a posé sa tasse, il relit les travaux de Gérard Vergnaud sur la proportionalité : l'enfant, la mathématique et la réalité (Lang éditeur) ou de Gérard Vergnaud et André Rouchier : Volumes au Collège (Publication Irem d'Orléans). Un prof de math ne serait-il jamais en vacances ?



NB : Plot n'est pas sponsorisé par Kellogg's, mais il souhaite favoriser et créer des liens entre mathématiques, enseignement et entreprises.

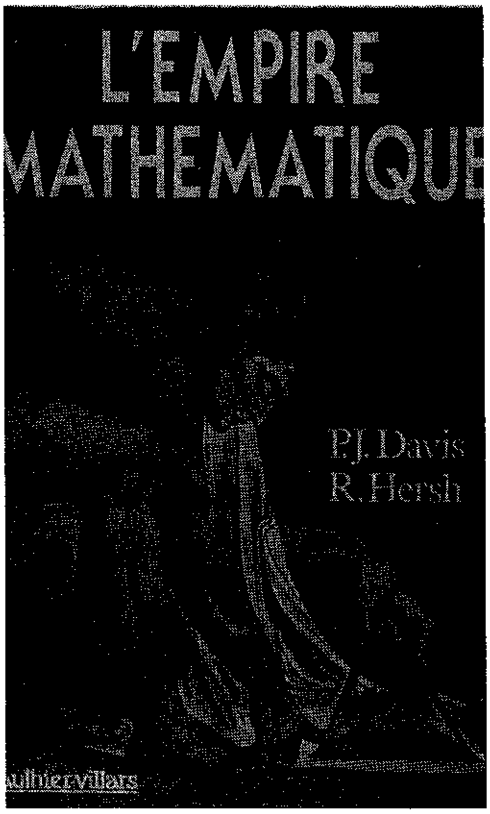
Pour aller plus loin dans l'alimentaire, voir aussi la pochette de diapositives de l'Irem de Poitiers : Proportionnalité, cf. bon de commande et Plot 45.

1. L'empire Mathématique : Davis et Hersh -Gauthier-Villars - Mai 1988, 240 F.
2. Le Pays des possibles : Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel. **J. Bouveresse** - Editions de Minuit - septembre 1988, 148 F.
3. La machine Univers : Pierre Lévy -Edition de la découverte - janvier 1987, 89 F.

Ces trois livres —le dernier pouvant être considéré comme un trait d'union entre les deux premiers— permettent une réflexion sur les mathématiques, leur utilité, leur légitimité.

L'empire mathématique

fait suite à l'**Univers mathématique** publié en 1985 et qui avait connu un certain succès. Les auteurs avaient alors une «approche interne» des mathématiques : qu'est-ce que faire des maths ? Avec ce nouveau livre l'approche est plus «externe», tournée vers les mathématiques appliquées, vers une «mathématisation du Monde», reprenant pour cela une partie du **Discours de la Méthode** de René DESCARTES pour illustrer l'idée que toutes les questions intellectuelles pourraient et devraient être unifiées grâce aux Mathématiques. Cette référence justifie d'ailleurs le titre américain : «Descartes'Dream» titre raccoleur et trompeur car Descartes n'apparaît que dans le chapitre d'introduction, car ce sont surtout les rapports actuels entre mathématique et informatique qui sont développés.



En bref, un beau livre plaisant et facile à lire, qu'on peut aborder comme une récréation après une longue correction de copies fastidieuse. Toutefois, il laisse un peu insatisfait : études souvent superficielles, compilation un peu artificielle de travaux divers. On sent qu'il fallait faire une suite après le succès de l'«Univers mathématique», les auteurs sont d'ailleurs très transparents sur ce point, espérons seulement que de livre en livre, de l'«Univers» à l'«Empire», nous ne serons pas conduit à quelque «Concession mathématique» dans une lointaine discipline.

Le pays des possibles

Le livre de Jacques Bouveresse est plus difficile à étudier car il oblige à réfléchir sur le sens d'une démarche mathématique.
Il est riche d'enseignements pour qui souhaite prendre le temps de s'interroger sur les mathématiques et leur fonctionnement :
- La démonstration peut-elle modifier le sens de la proposition à démontrer ?
- Le concept de démonstration peut-il être un concept vague ?
- Le mathématicien classique a-t-il tort de croire à la validité universelle du tiers exclus ?

Bouveresse est philosophe et ses réflexions s'organisent autour des travaux d'un autre philosophe, Wittgenstein (début du siècle), et font suite à «la force de la règle : Wittgenstein et l'invention de la nécessité (1987, même éditeur»). Loi, règle, symbolisme,

L'EMPIRE DES MATHEMATIQUES

TABLE DES MATIÈRES

formalisme, les langages et le rôle de leur grammaire (en particulier les mathématiques) y sont évoqués. Pour mieux se situer on peut aussi se référer à **Penser les mathématiques** et **Hermès I communication** de Michel Serre (Points 171 et Points 529).

La conclusion est d'un accès plus immédiat (car on échappe aux références Wittgensteiniennes). Les réflexions sur le théorème des 4 couleurs et la démonstration de Appel-Haken permettent de bien distinguer les **propositions** mathématiques **«a-priori»** (liées aux règles, calculs, formels, grammaires...) des **propositions «a-posteriori»** plus empiriques : la démonstration du théorème des 4 couleurs, utilisant largement l'ordinateur, est de ce dernier type et est donc encore contestée par de nombreux mathématiciens. Wittgenstein conteste explicitement que l'on puisse opposer la certitude des propositions mathématiques à l'incertitude des propositions empiriques (des sciences de la nature par exemple) et annonce déjà les démonstrations automatiques de l'intelligence artificielle, qui devraient modifier le concept de démonstration : les preuves proposées ne sont plus contrôlables ou exécutables par le mathématicien (et donc non reproductibles) ; on peut toutefois agir sur les algorithmes et leur solidité.

La machine univers

Nous sommes alors conduit au troisième livre qui amène à penser l'informatique en termes anthropologiques et philosophiques : c'est le lien entre les deux livres précédents. L'aspect anthropologique permet de lier les activités de l'homme les plus diverses à la machine et aux démarches sous-jacentes, en particulier le rôle du calcul au travers des simulations numériques et la mise en algorithmes (ce qui risque d'ailleurs d'effacer des parties essentielles du réel et de la culture non réductibles aux calculs).
Le lien philosophique apparaît avec le chapitre **«l'Invention du calcul»** qui renvoie à... **Wittgenstein** et permet de réfléchir sur le développement d'un nouveau courant scientifique et la nécessité pour l'homme de se définir d'une nouvelle façon par rapport à cette pensée scientifique.
Trois livres qui forceront le lecteur du Plot à avoir une nouvelle vision de son enseignement des mathématiques : des exercices techniques deviendront dérisoires, d'autres jugés hâtivement triviaux prendront une nouvelle dimension pour les idées fondamentales qu'ils véhiculent, idées réellement formatrices pour les élèves quand elles sont explicitées (dans ses travaux didactiques sur l'algèbre, Yves Chevallard fait aussi référence à Wittgenstein).

M.C.

LA MACHINE UNIVERS

TABLE

AU RYTHME DES ALGORITHMES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

Une démarche s'appuyant sur les langages récursifs

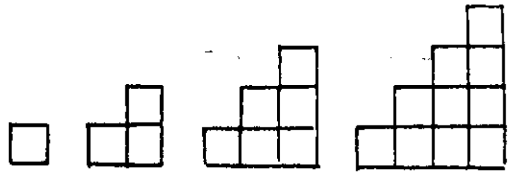
Traditionnellement, on essaye de ramener les démarche s de dénombrement liées à l'addition des termes «particuliers» à une seule formule algébrique, par exemple :

$1 + 2 + 3 + ... + n = n (n + 1)/2$ ou

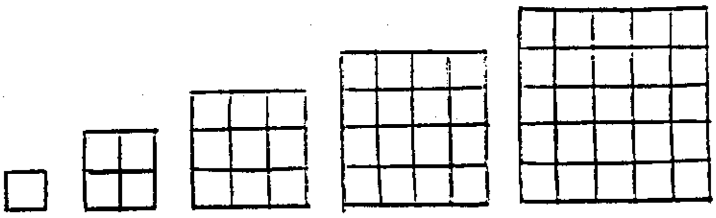
$1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = n \times n.$

Les théories des suites et des séries confirment ce point de vue.
La recherche de formules «résumé» demande quelque intuition, une certaine pratique et se termine souvent par une récurrence, démarche peu facile à mettre en place au collège. Il faut alors se contenter de donner les formules et de les faire vérifier : un bon entraînement au calcul, mais les démarches de preuve ou de recherche un peu méthodique sont occultées.
On peut développer un autre point de vue : **dénombrer au niveau n, c'est trouver la transformation f(n) qui fait passer du niveau n-1 au niveau n : $d(n) = d(n-1) + f(n)$.**

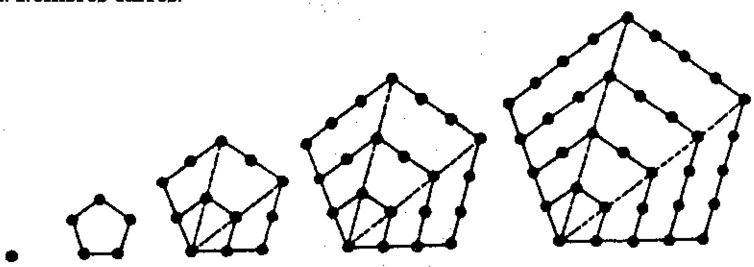
On se ramène alors au problème au niveau n-1, puis au niveau n-2, etc. il suffit de connaître un niveau de départ pour connaître les suivants : par exemple d(1) ou d(5) ou...
Ce point de vue théorique ne serait d'aucune utilité et ramenerait la somme des n premiers naturels à : $s(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$ si...
on n'avait pas des langages qui permettent la récursivité comme Pascal, Prolog, Lisp ou plus modestement Logo. Avec ces démarches déclaratives, on se débarrasse de toute la partie «procédure de calcul», prise en charge par la machine pour se contenter de «déclarer» les relations algébriques ou numériques qui décrivent le calcul à effectuer.
Cela est bien pratique dans une démarche expérimentale privilégiant l'observation et la description des relations, ainsi avec les nombres polygonaux (voir Pour la Science janvier 1987 n° 111) :



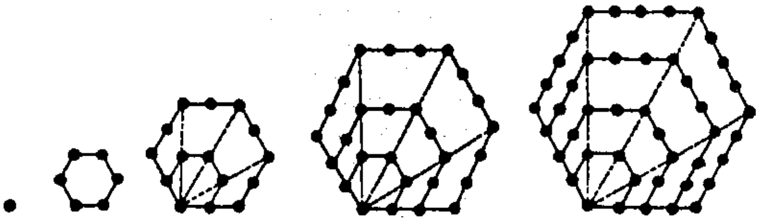
I. Nombres triangulaires.



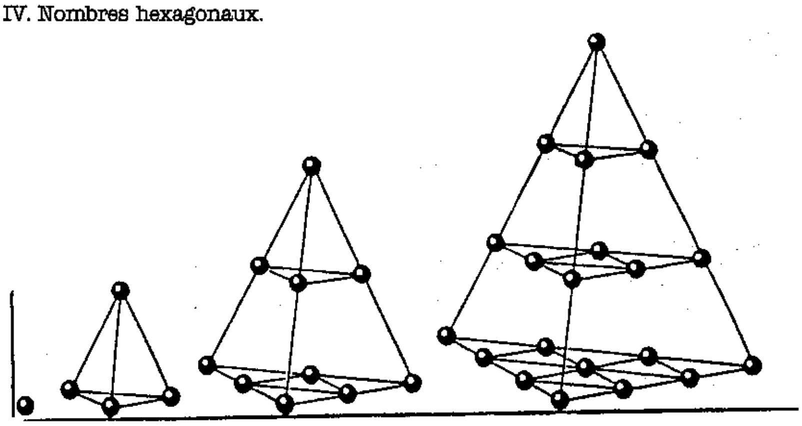
II. Nombres carrés.



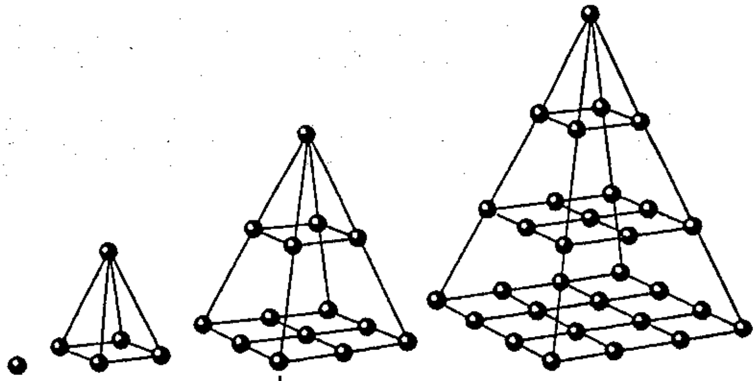
III. Nombres pentagonaux.



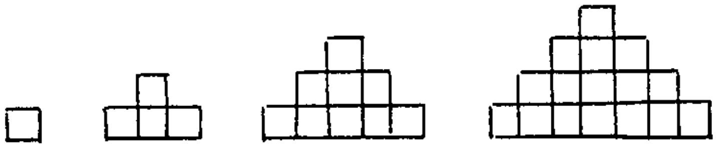
IV. Nombres hexagonaux.



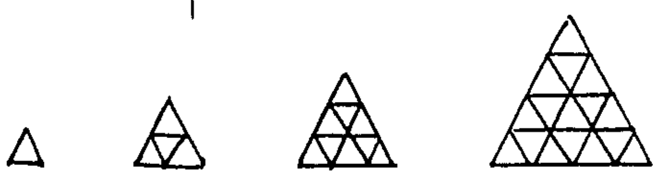
V. Nombres tétraèdriques.



VI. Nombres pyramidaux.



VII. Dénombrer les carrés élémentaires, les côtés élémentaires.



VIII. Dénombrer les triangles élémentaires, les côtés élémentaires.

pour les triangulaires :
$d(n) = d(n-1) + n$
pour les carrés :
$d(n) = d(n-1) + 2(n-1) + 1$
pour les pentagonaux :
$d(n) = d(n-1) + 3(n-1) + 1$
pour les hexagonaux :
$d(n) = d(n-1) + 4(n-1) + 1$
pour les p-polygonaux :
$d(n) = d(n-1) + \ldots (n-1) + 1$
pour les pyramidaux :
$d(n) = d(n-1) + n \times n$
pour les tétraédriques :
$d(n) = d(n-1) + s(n)$

```
POUR MM :N
SI :N = 1 [RENDS :A] [RENDS SOMME MM :N - 1 EXEC :B]
FIN

POUR VOIR :N
EC " EC PH [NIVEAU :] :N
EC PH [NOMBRE D'ELEMENTS :] MM :N
EC "
FIN

POUR PROGRAMME
EC " FCT 1 TAPE [- NOMBRE D'ELEMENTS DU PREMIER NIVEAU :]
DONNE "A PREM LL
FCT 3 TAPE PH [- NOMBRE D'ELEMENTS A AJOUTER AU NIVEAU ( N-1 )] "
DONNE "B LL
EC " FCT 2
EC [ON OBTIENT :]
FCT 1 EC PH [D ( 1 ) =] :A
FCT 3 EC PH [D ( :N ) = D ( :N - 1 ) +] :B
EC " FCT 6 TAPE [D'ACCORD ? ( O OU N ) :]
DONNE "REP PREM LL FCT 2
SI :REP = "N [VT PROGRAMME] [EC " EC "]
FIN
```

Ce dernier exemple montre qu'il peut y avoir plusieurs calculs «déclaratifs» dans une même opération de dénombrement. Ces démarches sous-entendent que les lois de formation des éléments dénombrables sont toujours les mêmes (hypothèse d'induction).

Utilisation de l'ordinateur pour dénombrer

Objectifs : faire émerger une démarche récursive en mettant en évidence des relations entre deux niveaux de calcul (n-1 et n), donner du sens aux écritures algébriques,
calculer avec une machine.

Consigne : Pour chaque suite de figures de la fiche, vous devez compléter le tableau page suivante.

Vous chercherez les programmes de calcul nécessaires pour utiliser l'ordinateur quand vous ne pourrez pas faire les calculs «à la main» ; vous pourrez obtenir une aide en utilisant la procédure PROGRAMME.

PREREQUIS : formulation algébrique ; quelques exemples traités avec toute la classe ; utilisation de l'ordinateur comme outil ; syntaxe Logo.

DURÉE : deux séances de 55 min.

DÉROULEMENT DE LA CLASSE : travail «papier-crayon» par groupe de deux pour la recherche des formules récursives durant une demi-heure ;
travail sur machine le reste de la séance (entrée des programmes, vérification, réponses pour n = 50 et
d(n) = 5000).

Les figures jointes constituent une suite de problèmes qui peuvent être traités sur ce modèle. Une expérience faite en sixième montre que cette démarche est bien reçue des élèves : «pour faire un mur de n rangées de briques, il suffit de cimenter une rangée sur un mur existant de n-1 rangées de briques» (bon sens élémentaire, essayez de faire autrement !).

Après une recherche «papier-crayon» les élèves sont invités à utiliser l'ordinateur pour faire les calculs ; aucune connaissance en Logo n'est nécessaire (en dehors de la syntaxe élémentaire ; ils ont seulement à «déclarer» le nombre de départ et la formule de passage f(n) grâce aux procédures de gestion introduites par l'enseignant.

FIGURE N°

niveau	1	2	3	4	5	10	50		n-1	n
nombre								5000	d(n-1)	d(n)
passage	|	|	|	|	|				|	|

A la soupe!

Petit x n° 18
Spécial LOGO est servi*
à la tortue?

***Périodique de l'Irem de Grenoble.**

L'AVANTAGE DU DÉCLARATIF: Les élèves peuvent recopier ces formules qui à elles seules, constituent des programmes de calcul, et cela dès la classe de sixième (on peut comparer cette démarche à celles mises en place avec une utilisation raisonnée des calculettes, les élèves n'ont pas à connaître les algorithmes de calcul, les relations entre les nombres ou les objets à calculer sont suffisantes —et nécessaires—).
On peut aussi utilement se référer aux travaux de R. DOUADY : dialectique outil-objet et changement de cadres (travaux IREM Paris-Sud —cahier de didactique— et revue de didactique des Mathématiques 7-2. 1986 La pensée sauvage éditeur).
Il ne s'agit pas d'étudier ces procédures récursives en tant qu'objet, mais de les utiliser comme simple outil. On peut aussi changer de cadre de travail en appliquant ces démarches à la géométrie (construction de carrés emboîtés par exemple).
Enfin, la mise en place de ces démarches déclaratives permet d'accorder une importance particulière aux écritures algébriques tant pour développer leur syntaxe que pour mettre en évidence leur rôle monstratif. Un moyen de donner du sens à l'algèbre.
Pour ceux qui ont lu jusque là, une petite gourmandise pour finir:

QUAND ON RETROUVE LES SOLIDES DE PLATON.
Empruntons à l'«Algèbre» d'Euler les problèmes suivants:

1. Trouver les nombres triangulaires qui soient en même temps des carrés.
2. Trouver les nombres triangulaires qui soient en même temps des pentagonaux.

Voici une bonne recherche au collège qui rentabilise les modes de calculs récursifs établis précédemment. Pour trouver, les élèves seront conduits à s'organiser, à faire des essais méthodiques, à prendre des notes... On peut évidemment utiliser des méthodes algébriques donnant toutes les solutions, mais elles sont d'un haut niveau car attachées à la résolution de l'équation de Fermat $x^2 - Ay^2 = 0$ (voir Arithmétique et théorie des nombres chapitre VI J. Itard, Que sais-je? 1093).

Il est particulièrement intéressant d'associer la plus petite solution non triviale du premier problème aux 8 triangles et 6 carrés qui forment l'octaèdre et le cube, deux solides réguliers de Platon que l'on sait être duaux.
Agréable n'est-ce pas? Reprenez un de ces petits plaisirs avec le couple (20,12) solution du second problème, on retrouve l'icosaèdre et le dodécaèdre, polyèdres réguliers duaux également.
Il reste à interpréter les valeurs 36 et 210, les autres couples solutions.
Vos idées sont bienvenues.

M.C.

niveau	triangulaire	1	8	49	288	20
n du	carré	1	6	35	204	
nombre	pentagonal	1				12
Valeurs des nombres égaux		1	36	1225	41616	210

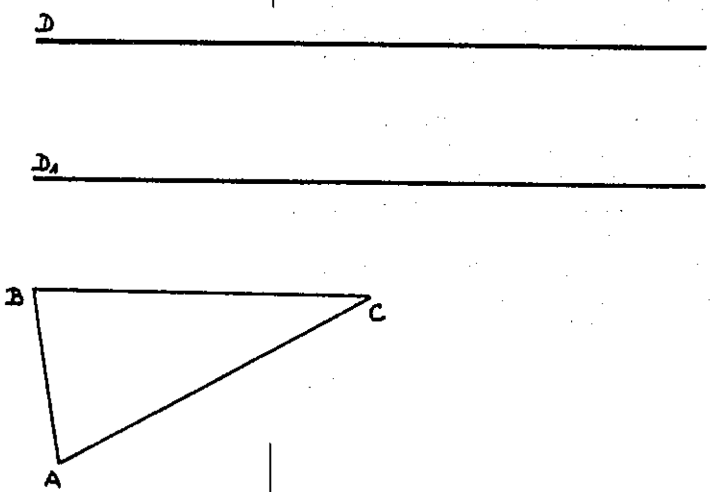
TRANSLATION EN QUATRIÈME

Gérard CHAUVAT - Tours

Voici le scénario d'une leçon expérimentale qui a conduit à une suite d'observations dans le cadre des travaux de l'atelier didactique de l'IREM d'Orléans-Tours.

Ceci n'est pas une observation didactique

Etape 1 : première tâche :
Dispositif : travail individuel.
Matériel : feuille n° 1.
Durée : Jusqu'à ce que la quasi-totalité des élèves aient réussi la tâche.
Consigne : Voici une feuille sur laquelle vous avez un triangle ABC et deux droites (D_1) et (D_2) parallèles.



On demande :
1. de tracer le triangle $A_1B_1C_1$ symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (D_2) ;
2. de tracer le triangle $A_2B_2C_2$ symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par rapport à la droite (D_2) ;
3. de dire si la transformation qui associe le triangle $A_2B_2C_2$ au triangle ABC est une symétrie par rapport à une droite,
si oui, indiquer l'axe de symétrie...
si non, dire pourquoi...

Etape 2 : mise en commun des résultats :
Dispositif : toute la classe.
Consigne : On constate qu'il ne s'agit pas d'une symétrie par rapport à une droite ; on demande à quelques élèves d'en fournir une raison que l'on fait confirmer par la classe.
Durée : pas plus de 5 minutes.

Remarque : à la fin de ces étapes, tous les élèves doivent maîtriser la construction des deux symétriques dans le cas de figure de la feuille n° 1 (qui sera conservé par la suite) et avoir acquis la conviction que «la composée des deux symétries en question n'est pas, en général, une symétrie par rapport à une droite».

Etape 3 : notation
Dispositif : toute la classe.
Consigne : Dans toute la suite de cette leçon nous allons utiliser la même notation : partant d'un point donné, désigné par une lettre majuscule —par exemple M— nous désignerons par M_1 (indice 1) son symétrique par rapport à (D_1) et par M_2 (indice 2) le symétrique de ce point M_1 par rapport à (D_2).

Etape 4 : deuxième tâche
Dispositif : travail individuel.
Matériel : feuille n° 2.
Consigne : Pour mieux connaître cette transformation, nous allons recommencer le travail de la feuille n° 1 pour les 9 points tracés sur la feuille n° 2 que je vais vous distribuer maintenant.

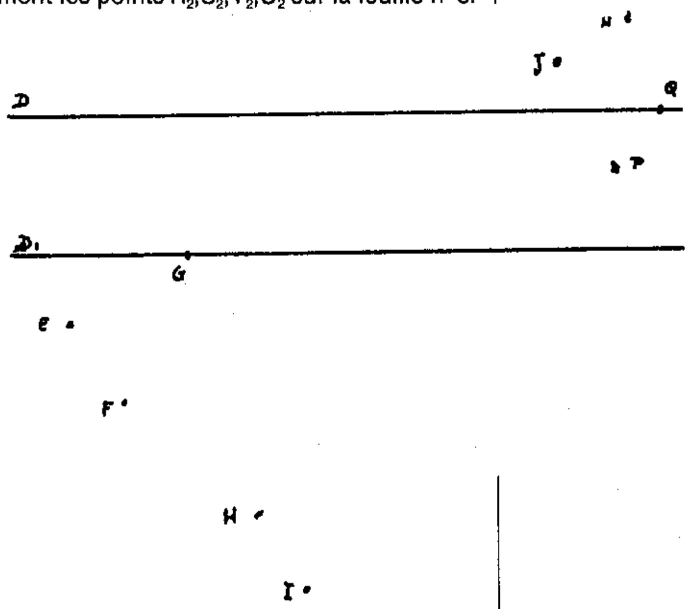
Pour chacun d'entre eux vous devez construire :
- le symétrique par rapport à (D_1) (d'indice 1)
- puis le symétrique par rapport à (D_2) de ce dernier point (d'indice 2).

Vous entourerez les points pour lesquels ceci ne serait pas possible et vous direz pourquoi.

Etape 5 : correction
Dispositif : toute la classe.
Consigne : on demande aux élèves le nom des points qui posent problème et pourquoi ;
N_2 est en dehors de la feuille.
I_1 est en dehors de la feuille (mais I_2 est dedans).

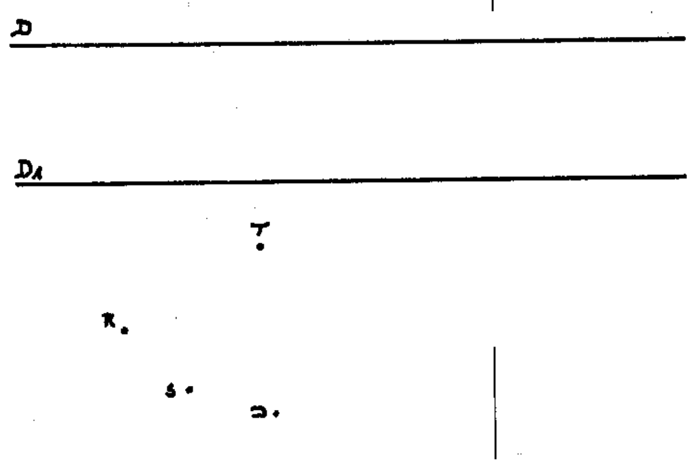
Etape 6 : troisième tâche
Dispositif : travail individuel.
Matériel : feuille n° 2.
Consigne : Lorsque cela est possible (par exemple pour les points E,F...), je voudrais que vous inventiez un procédé pour construire directement les transformés n° 2 (indice 2), sans construire les transformés n° 1 (indice 1). Cela nous permettra d'aller plus vite et d'éviter les problèmes qui surgissent lorsque le point d'indice 1 est hors de la feuille.

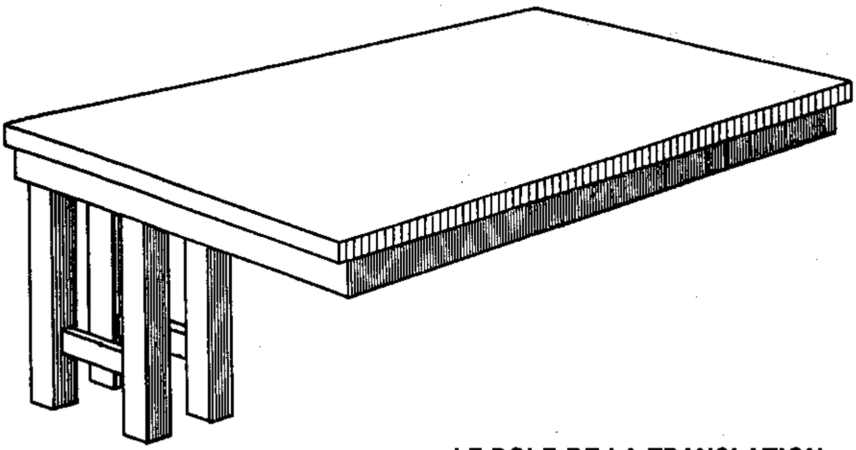
Chaque groupe doit, à l'aide des propriétés trouvées par tous les membres du groupe, mettre au point une méthode pour construire directement les points transformés d'indice 2.
Chacun d'entre vous, ensuite, pourra utiliser cette méthode pour construire effectivement les points R_2, S_2, T_2, U_2 sur la feuille n° 3.



Pour vous aider à trouver un procédé, vous allez tracer, en rouge par exemple, tous les segments qui joignent un point de la feuille n° 2 qui ne pose pas problème (non entouré) et son transformé d'indice 2 et vous noterez toutes les propriétés de ces segments qui vous paraissent utiles pour obtenir le point d'indice 2 directement.
Durée : jusqu'à ce que tous les élèves aient tracé les segments «rouges» et la quasi-totalité note des propriétés.

Etape 7 : quatrième tâche
Dispositif : groupes de 4 élèves.
Matériel : feuilles n° 2 et n° 3.
Consigne : Sur la feuille n° 3, que je vais vous distribuer maintenant, se trouvent 4 points : RSTU.





LE ROLE DE LA TRANSLATION DANS LA VIE PRATIQUE

Fiche résumé-élève

Vecteur

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}}$

Contient trois informations
- Longueurs : AB = EF
- Directions : (AB) // (EF)
- Sens suivant cette direction

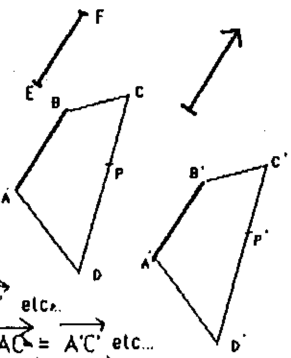
qui sont aussi contenues dans :

" ABFE est un parallélogramme "

Attention à l'ordre : en parcourant le parallélogramme dans un sens, on parcourt la même direction dans ses deux sens opposés

Tout comme la longueur (écart de compas, transportable dans tout le plan ou l'espace), le vecteur n'a pas de place précise, mais, il contient, en plus de la longueur, le choix d'une direction orientée.

On parcourt la direction commune des deux droites (AB) et (EF) dans le même sens pour aller de A vers B et pour aller de E vers F



Translation

La translation conserve tous les vecteurs d'une figure.

et c'est la seule transformation dans ce cas

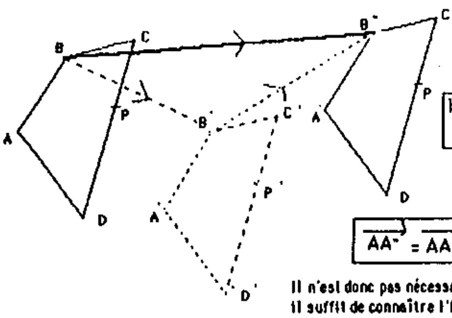
par la translation, la figure
- n'est ni déformée ni agrandie ou réduite
- ne tourne pas
- n'est pas retournée
- seule sa place change.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$ etc.
mais aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ etc...
et $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A'P'}$ etc...

Une translation est définie par un vecteur : le vecteur de cette translation.

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{PP'}$ etc...

La notion mathématique de translation "gomme" le chemin suivi pour aller de la figure de départ à celle d'arrivée
C'est ce que traduit la **Relation de Chasles**
qui efface l'étape intermédiaire.



Tout vecteur de la figure est conservé par chacune des deux tranlations

la composée des deux translations est encore une translation
son vecteur est la somme des vecteurs des deux translations

$\boxed{\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}}$ ou $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{D'D''}$

Il n'est donc pas nécessaire de construire la fig' pour obtenir la fig" il suffit de connaître l'image d'un point par chacune des translations pour avoir le vecteur de la translation qui résulte des deux autres.

Fiche résumé-élève

Quand un professeur a utilisé une situation d'apprentissage pour laquelle les élèves ont agi, formulé, validé, il lui reste à mettre en place l'**institutionnalisation** des notions, des méthodes apparues. On doit y retrouver les savoirs et savoir-faire officiels des programmes mais aussi l'histoire de la classe, en plus d'éléments fixes apparaîtront des remarques, des développements propres au niveau de la classe, à la personnalité des élèves, aux années.

L'institutionnalisation est donc une phase délicate d'une leçon : il ne s'agit pas de faire un cours magistral sur la notion introduite, et on ne peut confier aux élèves la tâche difficile d'effectuer un résumé même après avoir dégagé avec eux les points importants.

Etienne THEPOT propose des **fiches résumé-évolutives,** elles peuvent être facilement modifiées à partir des suggestions des élèves, d'une classe à l'autre, d'une année à la suivante car elles sont réalisées sur Mac Draw (on pourrait aussi utiliser un PC). L'ordinateur et ses environnements (traitement de textes, tableur, dessins, graphiques...) apparaissent de plus en plus comme un outil nécessaire à la gestion de la classe.

Vous pouvez aussi demander la disquette.

Ecrire E. THEPOT au Plot

A suivre...

UTILISATION DE LA CALCULETTE

TROIS POINTS DE VUE POUR FAIRE VIVRE LES MATHÉMATIQUES

UTILISATION PONCTUELLE

(faire une seule opération)

Ce point de vue est souvent décrié : «les enfants ne sauront plus calculer !». Notre rôle de professeur de mathématiques (et non de calcul) nous amène à introduire une variable didactique liée à la «taille» des nombres, conduisant aux problèmes de la décomposition des nombres et à la recomposition des résultats, aux problèmes d'approximations.

... La calculette, dans son utilisation ponctuelle REPETÉE peut conduire à des apprentissages empiriques : addition, multiplication dans Z, puissance de 10...
Les **lois** constatées par l'expérience dans des situations d'action doivent être formalisées algébriquement, voire conduire à un débat de preuve (qui peut amener des démonstrations quand c'est possible : attention au cas de «moins par moins donne +».
Les lois constatées avec la calculette deviennent alors des **règles du calcul algébrique** qu'il faut institutionnaliser.

ORGANISATION DES CALCULS

Une étude détaillée et analytique du problème est nécessaire. L'enchaînement des opérations peut conduire à un renforcement des notions algébriques, ainsi pour faire *a :b* quand b est à l'affichage amène à (1/b)a, si on ne veut ni utilisation des mémoires, ni recopie (en particulier pour des problèmes d'exactitudes des calculs : il semble important de développer l'idée de faire les calculs avec toutes la précision dont la machine est capable, même si on ne prend à la fin qu'un résultat au centième près).

Le programme de calcul «résumé» est une synthèse de l'étude. Il conduit facilement à une formulation algébrique par généralisation et à un programme (pour certaines calculettes ou pour les ordinateurs) en respectant la structure élémentaire :
— introduction des données
— corps du calcul (boucle éventuellement avec test d'arrêt)
— affichage des résultats.

SYMPATHIQUE RADICAL
Stratégie pour un calcul assez compliqué.

ÉNONCÉ :
A l'aide de la calculatrice, trouver une valeur approchée avec trois décimales du nombre suivant :

$$L = \sqrt{2 - 1/8\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)}$$

Rapport entre le côté du polygone régulier à 17 côtés et le rayon de son cercle circonscrit (cf. travaux de Gauss) (Rallye Loiret 87 : La tentation du 18e point).
Pour plus de précisions voir :
E. THEPOT : calculettes en 6e et 5e : Estimations et stratégies.
Publication IREM Orléans n° 30 mars 1988.

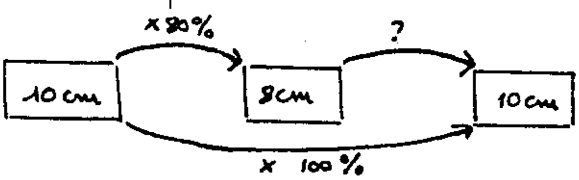
OUTIL DE RECHERCHE

UN EXERCICE DU RALLYE (1988) (Académie Orléans-Tours)

L'art de ne rien faire

Avec une photocopieuse, on réduit de 20 % l'aire d'un carré de 10 cm de côté. On s'aperçoit que la figure est trop petite, mais l'original a été détruit.
De quel pourcentage faut-il agrandir l'aire d carré obtenu pour retrouver le carré initial ?

Ce problème peut amener un blocage calculatoire une fois établi le schéma :



Beaucoup d'élèves recherchent l'opérateur qui fait passer de 8 à 10 ; d'autres s'y refusent et restent bloqués avec la notation «pourcentage» ou la structure du calcul.
On peut aussi jouer sur la variable didactique importante qui est la donnée du côté de départ (sa forme ou son absence).
L'écriture $0{,}8x = 1$, si elle doit leur être donnée, peut paraître artificielle (si on s'adresse à des élèves jeunes ou en difficulté), en revanche une démarche par tâtonnement peut être menée en essayant différentes valeurs pour x et en les consignant dans un tableau.

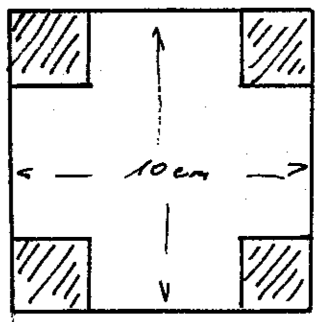
Essai : x	1	2	1,5	1,3	1,2	1,15
0,8x	0,8	1,6	1,2	1,04	0,96	1

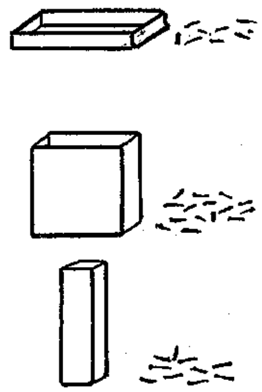
On peut alors revenir à une démarche plus habituelle $x = 1/0.8$, qui prend tout son sens : efficacité et unicité de la solution.
Le premier point de vue de résolution «synthétique» des équations (utilisé par les mathématiciens grecs) peut être repris utilement pour la recherche de solutions pour $x^2 - x - 1 = 0$, par exemple il peut conduire à la mise en évidence des méthodes par balayage et par dichotomie.
Le problème de la boîte à épingles illustre aussi la recherche des solutions de l'équation $x(10-2x)^2 = 50$ et conduit à des problèmes d'optimisation.

LA BOITE A EPINGLES

On veut fabriquer des boîtes pour trombones, punaises, épingles, etc, à partir de plaques de tôle carrées en découpant un carré dans chaque coin et en relevant les bords.

Quelle découpe choisir pour avoir des boîtes à épingles de contenance 50 cm³, 100 cm³, de contenance maximum ?

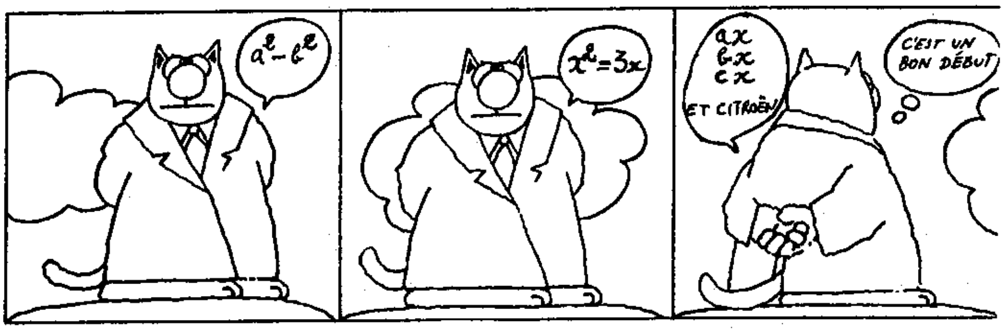




De nombreuses autres situations existent qui amènent les élèves **à ne pas appliquer** plus ou moins automatiquement des méthodes, des algorithmes (voire des recettes) mais au contraire à s'investir dans des démarches de recherche actives s'appuyant sur la dualité *essai/erreur ;* le problème de l'unicité des solutions permettant par la suite une bonne introduction à des méthodes algébriques plus analytiques.
La calculette peut-elle permettre de faire passer l'*élève-praticien* (orienté vers un savoir-faire et l'efficacité pour décider, convaincre) à l'*élève - théoricien* dont la justification de l'activité est celle de la connaissance et de la rigueur ?
Pour plus de précisions, voir :
Etude d'une situation
Compte rendu des activités de l'atelier didactique (1986-87)
IREM d'Orléans septembre 1987.

A LA RECHERCHE DE L'ALGÈBRE

Michel CLINARD - Orléans



LACAN : «Les petites lettres supportent le réel».

Le mot **algèbre** a disparu des programmes de collège, peut-on retrouver l'algèbre dans les «Travaux numériques» ? Réponse affirmative si on s'appuie sur un premier point de vue épistémologique. Deux autres points de vue, linguistique et cognitif, seront esquissés par la suite : trois éléments pour un débat sur l'algèbre, mais par manque de place on ne développera pas les positions des différents chercheurs : ce qui pose problème pour chacun d'eux, la manière de le dire et de l'étudier...

Point de vue épistémologique

C'est Yves CHEVALLARD qui, semble-t-il, analyse le mieux la génèse et l'évolution du rapport à l'algèbre. L'étude du numérique, qui apparaît comme une réalité «quasi-physique» (ce que les figures sont à la géométrie), a besoin de modèle. Ce modèle, outil de formulation, de validation est **l'algèbre** qui va se construire à partir du numérique comme une **écriture** («L'algèbre est de l'écrit qui ne vient pas de l'oral») avec ses caractéristiques informationnelles propres : **l'ostensif** (la notation $2\,p + 1$ est calculatoire mais aussi désignative (monstrative ou ostensive) car on y «voit» un nombre impair quand $p \in N$).
Par la suite l'algèbre devient une **pratique** puis un **objet d'étude** qui se construit alors au détriment du numérique.
La pratique des mutations désignatives est un choix didactique d'Yves Chevallard pour l'introduction de l'algèbre à partir du numérique (cours expérimental de 4e IREM de Marseille) **(3) (4) (5) et (7).**

PROBLÈME

1. Choisir trois entiers relatifs consécutifs a, b et c ; calculer b^2-ac. Que constatez-vous ? A partir de votre observation, et après avoir éventuellement calculé la valeur de l'expression algébrique b^2-ac pour d'autres valeurs entières consécutives a, b et c, formulez une conjecture à propos de cette expression.
2. En donnant à a, b et c des noms bien choisis, démontrez que votre conjecture est vraie.

Point de vue linguistique

L'itérateur Claude LANDRÉ (voir Itération au collège) réitère l'activité suivante dans chacune de ses classes : il écrit au tableau «le chat mange la souris» puis «le chat aboie la souris». Les élèves disent tous que la seconde phrase est incorrecte par manque de sens. Il existe une autre raison d'ordre grammatical : on ne peut remplacer un verbe transitif par un intransitif. Syntaxe et sémantique sont alors en jeu souvent d'une façon dialectique (résolution d'un problème par une mise en équation par exemple).

J. Ph. DROUHARD (Irem Paris-Sud) fait l'hypothèse qu'apprendre à faire de l'algèbre c'est comme apprendre à parler et que l'on peut transposer à l'algèbre les analyses syntaxiques de l'apprentissage du langage naturel : le langage se construit par étapes avec des grammaires successives et des ruptures linguistiques ; il n'y a qu'une seule bonne grammaire (on peut donc mesurer les manques par rapport à une grammaire idéale). Ce travail approfondi sur l'aspect syntaxique de l'algèbre constitue donc un second choix didactique pour l'introduction de l'algèbre.

On peut aussi utilement se reporter aux travaux de Colette Laborde, langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques. Université de Grenoble 1983.

26 POINTS A PRÉCISER

A André Masson.

Ma vie finira par a

Je suis $b - a$

Je demande $cb - a$

je pèse les jours de fête $\frac{d}{cb - a}$

Mes prévisions d'avenir $\frac{de}{cb - a}$

Mon suicide heureux $\frac{de}{(cb - a)f}$

Ma volonté $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}}$

Ma force physique $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h$

Mes instincts sanguinaires $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i$

Les cartes ont mis dans ma poche

$$\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j$$

Elles ont retiré $\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + k$

Il reste $\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl$

Avec mon nez je sens

$$m\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma langue je dis

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma bouche je mange

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o$$

Avec mes yeux je vois

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{p}$$

Avec mes oreilles j'entends

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq}$$

Avec mes mains je gifle

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq + r}$$

Avec mes pieds j'écrase

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{(pq + r)s}$$

Avec mon sexe je fais l'amour

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}}$$

La longueur de mes cheveux

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - u$$

Mon travail du matin

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - uv$$

Mon travail de l'après-midi

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - uv - w$$

Mon sommeil

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - uv - w\right)^x$$

Ma fortune

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - uv - w\right)^x - y$$

Ma date de naissance

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)s}} - uv - w\right)^x - \frac{y}{z}$$

Benjamin PERET
LE GRAND JEU - Gallimard-Poésie.

Exercices : 1. Calculer ma date de naissance pour $a = 1$, $b = 2..$, $z = 26$.

2. Je nais (date de naissance égale 0). Déterminer les valeurs des variables a, b,...z.

Point de vue cognitif

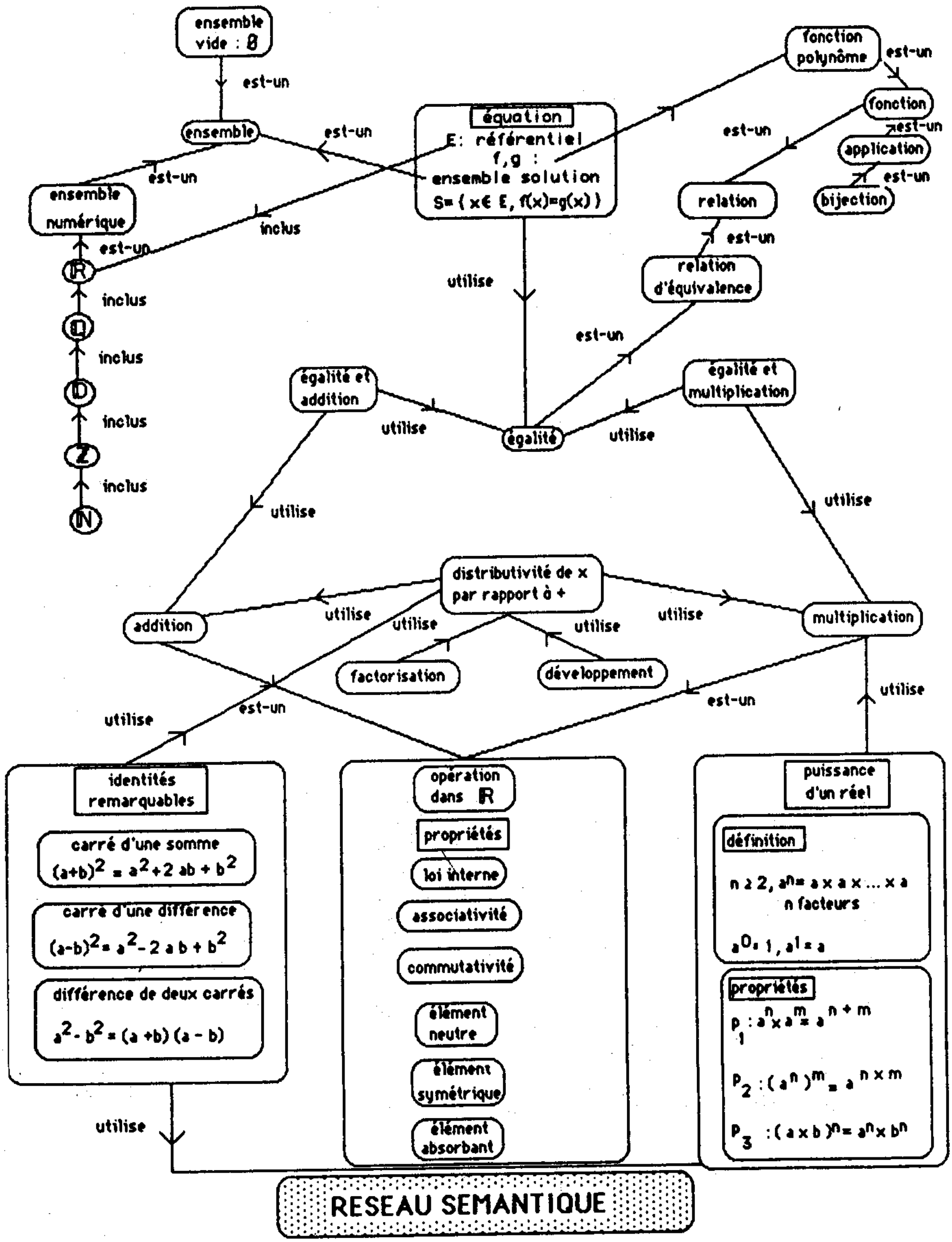
De nombreux travaux américains et anglais font de l'enfant un sujet d'étude dans le cadre de démarches algébriques, ces études sont souvent indépendantes des conditions d'acquisitions du savoir (la classe par exemple). En France, Gérard VERGNAUD introduit une dimension didactique supplémentaire en prenant en compte les interactions sujet/élève.

Nous retiendrons ici les seuls points suivants : **(9).**

- nécessité de distinguer différents types de connaissances (déclaratives, stratégiques, procédurales).
- nécessité de considérer le degré de maîtrise des connaisances (c'est-à-dire l'ensemble des situations dans lesquelles celles-ci peuvent fonctionner).
- nécessité d'expliciter les liens entre connaissances (par exemple concepts et procédures).

D'autres approches «transversales» peuvent être envisagées :

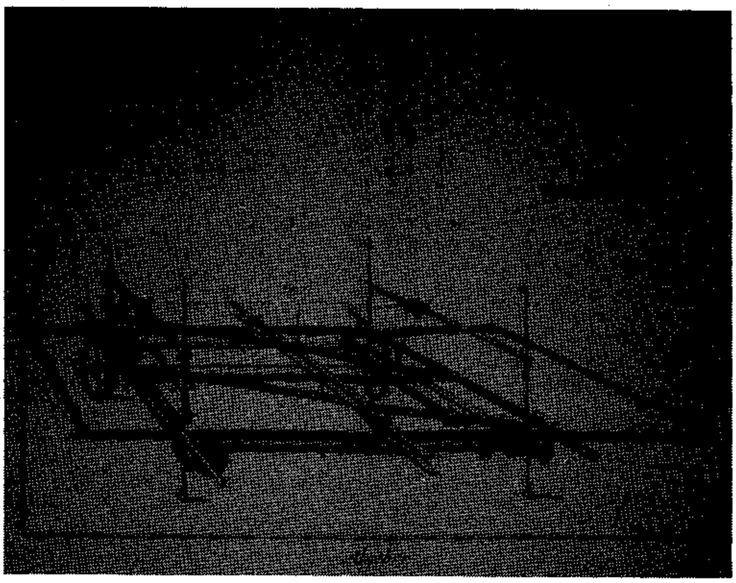
- statut de la lettre (inconnue, paramètre, variable) **(1)**. Pour certains élèves
$y = ax + b$ et $y = x^2 + b$
sont deux expressions de fonction affine ! (faire $a = x$ dans la seconde). Le professeur et l'élève jouent-ils au même jeu, avec les mêmes règles ? Qui est à l'origine des implicites ?
- le calcul relationnel comme base de l'algèbre **(6)** et **(8).**
- les aspects fonctionnels. En référence aux travaux de B. Capponi et P. Clarou de l'IREM de Grenoble on peut distinguer trois classes d'utilisation de l'algèbre : **(2).**


ensemble vide : ∅
est-un
ensemble
est-un
équation
E: référentiel
f,g :
ensemble solution
S= { x∈ E, f(x)=g(x) }
fonction polynôme
est-un
fonction
est-un
application
est-un
bijection
est-un
relation
est-un
relation d'équivalence
est-un
ensemble numérique
est-un
est-un
inclus
R
inclus
Q
inclus
D
inclus
Z
inclus
N
utilise
égalité et addition
utilise
égalité
utilise
égalité et multiplication
utilise
utilise
distributivité de x par rapport à +
utilise
utilise
utilise
utilise
addition
multiplication
factorisation
développement
utilise
est-un
est-un
utilise
identités remarquables
carré d'une somme
(a+b)² = a²+2 ab + b²
carré d'une différence
(a-b)²= a²-2 a b + b²
différence de deux carrés
a²- b² = (a +b) (a - b)
opération dans R
propriétés
loi interne
associativité
commutativité
élément neutre
élément symétrique
élément absorbant
puissance d'un réel
définition
n ≥ 2, aⁿ= a x a x ... x a
n facteurs
a⁰= 1, a¹= a
propriétés
P1 : aⁿ x aᵐ = aⁿ⁺ᵐ
P2 : (aⁿ)ᵐ = aⁿˣᵐ
P3 : (a x b)ⁿ= aⁿx bⁿ
utilise
RESEAU SEMANTIQUE

1. Activités de communication
Désignation d'un nombre lié à un objet ou à une situation dans une formule de calcul numérique (c'est-à-dire décrivant un calcul à faire) ou dans un libellé : formule de périmètre, d'aire, calcul de la valeur, d'une expression, etc.

2. Activités de calcul donnant lieu à un traitement.
Résolution d'équation, développement, factorisation, etc.

3. Activités de modélisation.
Désignation de quantités en relation dans un modèle donné : proportionnalité, etc.
Désignation d'une variable (définie non par sa valeur mais par son appartenance à un ensemble de nombres et par les propriétés de la structure associée à cet ensemble) : fonction, «égalités remarquables», résolution d'équations dont l'existence des solutions n'est pas acquise.
Ces catégories semblent correspondre à des types de réactions et de difficultés différentes selon les élèves et selon les niveaux de classe :
1^er^ exemple : Cycle d'observation et CM2.
La formule $S = (B + b) \times h/2$ permet aux élèves de calculer S sans gros problème en connaissant B,b et h (catégorie 1).
Réciproquement, le calcul de h connaissant B,b et S est bien moins réussi (catégorie 2 : «opérer» sur des lettres pour inverser une formule).



2^e^ exemple :
Catégorie 1 : Calculer la valeur de $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 24$ pour $x = 3$ et $y = 1$ (cycle d'observation).
Catégorie 2 : Montrer que $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 10 = x^2 - 6x + y^2 + 10y + 24$ (4^e^, 3^e^).
Catégorie 3 :
Cercle d'équation
$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 24 = 0$ (second cycle).

RÉFÉRENCES :

☆☆☆☆☆

(1) L. Booth : erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. Petit x n° 5.

(2) P. Clarou - B. Capponi : Éléments pour l'élaboration d'activités de calcul algébrique en 1^er^ cycle. Irem de Grenoble. Petit x n° 5.

(3) Y. Chevallard : Transposition didactique - 1980 - Ed. La pensée Sauvage.

(4) Y. Chevallard : Nombres et lettres.

(5) Y. Chevallard : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au Collège. Petit x n° 5.

(6) F. Conne : Calculs numériques et relationnels. R.D.M. 5.3. 1984.

(7) F. Conne : Jalons à propos de l'algèbre. Interaction didactique n° 3 -1984.

(8) G. Vergnaud. L'enfant, la mathématique et la réalité. Ed. P. Lang 1981.

(9) Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques. La pensée sauvage Ed. 1987.

DESSIN A MAIN LEVÉE ET REPRÉSENTATION MENTALE

Étienne THEPOT - Orléans

Le dessin à main levée peut-il avoir une place spécifique dans l'acquisition d'une notion nouvelle en géométrie ? Il offre en effet un accès assez direct à l'image mentale de l'élève, et permet d'agir sur elle sans être gêné par les parasites dûs à la manipulation des instruments de dessin. Un élève peut très bien avoir une représentation correcte sans pouvoir exécuter une figure très précise, mais à l'inverse il peut s'en remettre à un algorithme de construction, sans pouvoir confirmer son résultat par une représentation mentale bien établie.

L'élève acquiert une mobilité du point de vue qui lui permet de renforcer sa connaissance de la notion étudiée par la confrontation entre trois pôles :

- La perception globale immédiate,
- La où les différentes constructions par étapes (avec des outils plus ou moins opérationnels parmi lesquels il faudra faire un tri),
- L'utilisation de la notion concernée ou de certaines de ses propriétés dans une argumentation.

Il serait peut-être même souhaitable d'évaluer certaines représentations mentales des élèves par des tests papier-crayon-gomme, dans des constructions assez simples (où, en particulier, il n'y a pas à tracer de cercles).

Observons un élève de sixième, traçant une perpendiculaire à une droite donnée.

Parmi ceux qui ne réussissent pas, on peut relever les stratégies suivantes :

— Tracé uniquement à la règle, qui est un tracé main levée que l'élève déguise parce qu'il n'est pas reconnu —«au moins la droite est bien droite»— ce qui donne un caractère illusoire de rigueur, puisque l'angle droit est approximatif.

— Tracé en utilisant un trait de la graduation du double-décimètre ; l'élève s'invente une équerre de fortune, par paresse ou par incompréhension du rôle de l'équerre, comme c'est le cas de celui qui utilise la graduation de l'équerre. Mais celui-là a l'avantage sur le précédent de satisfaire le désir du professeur, tout en sachant qu'il l'abuse ; et cela passe inaperçu une fois sur deux.

— Tracé avec un gabarit de papier plié deux fois, comme on le lui a appris, mais sans que le premier pli revienne sur lui-même. L'élève n'est pas surpris par son résultat, il est habitué à voir ainsi représentés des coins de table. Il y a là confusion entre représentation plane et perspective (convention non perçue), ou mauvaise représentation mentale du quart de plan : deux droites perpendiculaires ne sont pas reconnues comme axes de symétrie l'une de l'autre.

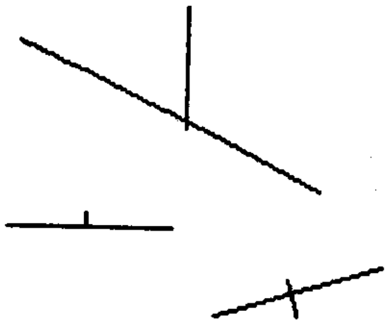
— Pliage de la feuille en quatre, en mettant bien les bords l'un sur l'autre, pour se fabriquer une équerre «qui n'ait pas le sommet de l'angle arrondi» mais, ne plus être capable de fabriquer une telle équerre dans un morceau de papier au contour irrégulier. Ici, il s'agit d'un défaut de perception du secteur angulaire comme surface illimitée débordant le support, l'élève cherche une régularité harmonieuse et équilibrée dans le cadre de la feuille dont il ne peut s'abstraire, (certains plient d'ailleurs suivant les diagonales, satisfaisant ainsi un autre critère de régularité). L'élève s'attache aussi à avoir un sommet «bien pointu», substituant l'image locale de sommet à celle de droites perpendiculaires, ceci serait légitime si la consigne imposait à la perpendiculaire de passer par un point donné de la droite, (à moins que l'élève n'ait l'habitude d'éplucher ses oranges en traçant trois diamètres deux à deux perpendiculaires ??).

D'autres conventions mineures demandent aussi à être explicitées : la perpendiculaire est-elle une droite, un segment ou une demi-droite ayant pour origine le sommet de l'angle droit ? (Pour les hauteurs d'un triangle, on accepte bien une convention ou une autre, suivant le contexte).

Mis à part les deux cas d'utilisation de la graduation, les difficultés relèvent de la représentation mentale qu'a l'élève : de la figure à obtenir, de l'angle ou de l'angle droit ou bien de son impossibilité à imaginer un plan débordant la feuille, ce qui réduit la notion de symétrie à celle de symétrie de la partie visible de la figure (stade qui longtemps ne sera qu'artificiellement dépassé).

Le dessin à main levée permet de travailler de front sur ces représentations.

On constate à cette occasion l'influence des directions privilégiées des bords de la feuille, «verticale et horizontale», qui est à rapprocher des interférences avec les représentations en perspective.



On obtient les tracés suivants :
Les derniers révèlent une peur de s'éloigner de la droite de départ, par maladresse mais aussi à cause de la représentation centrée sur le sommet de l'angle droit.
Pour relativiser le rôle joué par le sommet de l'angle droit, vous pouvez faire tracer à main levée deux droites perpendiculaires sécantes en dehors des limites de la feuille, puis faire vérifier ou corriger à l'équerre.
On remarque aussi que l'équerre induit chez certains l'idée que la perpendiculaire ne traverse pas la droite.
On ne rencontre jamais la perpendiculaire «en-dessous de» la droite, sauf si le contexte l'impose (la perpendiculaire devant passer par un point «en-dessous de» la droite).

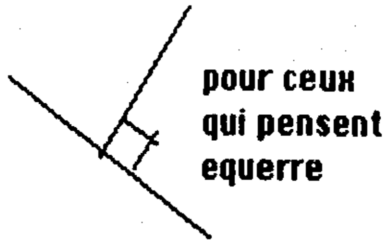
Synthèse et enrichissement de la notion

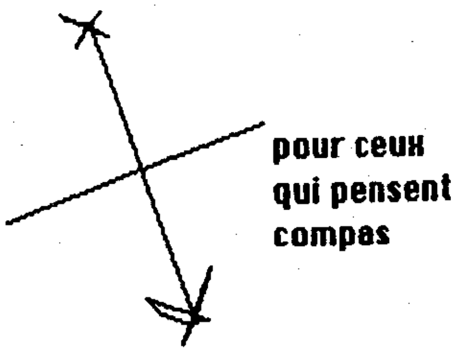
Après l'échange et la discussion des différents tracés, on étudie toutes les possibilités d'obtenir cette perpendiculaire avec précision :
- Les quatre positions de l'équerre,
- Le pliage en quatre épaisseurs,
- Le pliage en deux épaisseurs seulement, répété deux fois.

Sur calque il permet d'obtenir un point d'intersection très net. Il peut être réitéré pour obtenir par exemple un rectangle et ses axes de symétrie, uniquement par pliage.
Ensuite, dans la construction des hauteurs du triangle, le tracé à main levée permet, en ayant une idée assez juste du résultat, de se poser honnêtement la question de leur intersection (même si l'on y répond qu'expérimentalement).

La médiatrice : (médiatrice d'un segment ou de deux points).

Après avoir fait remonter les souvenirs concernant la médiatrice et les avoir séparés des notions de bissectrice, médiane et hauteur, nous disposons à son sujet d'une définition «perpendiculaire passant au milieu» et d'une construction au compas, (avec un seul écart de compas, donc très tributaire de la notion de diagonales du losange).
Dans ces conditions, lors du tracé à main levée, outre les erreurs déjà rencontrées pour la perpendiculaire, on trouve des segments et des demi-droites qui sont induits par le procédé de construction dont l'élève dispose :





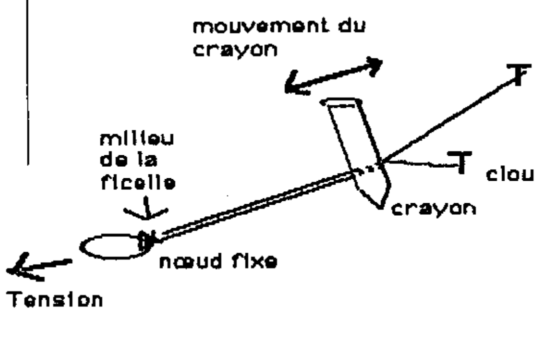
Pour les seconds, il est nécessaire de discuter du rôle des pseudo-arcs de cercle, qu'ils dessineront après coup si on leur demande de laisser leur construction :
«— Les as-tu imaginés avant ou après le tracé de la médiatrice, sont-ils nécessaires, et pourquoi «arrêter» le tracé de la médiatrice ici plutôt que là ?».
Pour élargir la représentation des premiers et aborder les notions d'équidistance d'un point à deux autres et celle de distance d'un point à une droite, tracer la médiatrice sans tracer le segment. Ceci mène à l'idée de pli, de symétrie, d'équilibre ; l'impératif devient celui de ne pas se rapprocher d'un point plus que de l'autre, (on peut renforcer cette idée par l'emploi de couleurs : un point rouge, un point bleu et la médiatrice violette). Le point où la médiatrice traverse le segment devient celui qui est le plus près des extrémités du segment.

La médiatrice perd de sa précision lorsque l'on s'éloigne du segment. Les élèves prétextent qu'ils ont du mal à la faire droite, mais c'est aussi parce que l'équidistance relative reste bonne même si l'on s'écarte un peu plus du tracé exact. On peut le corriger ou plutôt le mettre en évidence en faisant tracer la médiatrice de deux points entre lesquels il y a une tache ou un trou.

L'élève doit maintenant penser : «aussi loin d'un point que de l'autre».

Durant cette phase l'élève investit la notion de ses propres images : passer entre deux monstres aussi dangereux l'un que l'autre etc. (voir l'exercice du Rallye : «L'entrée de Jeanne d'Arc dans Orléans»).

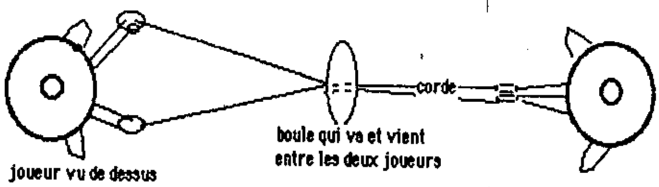
La machine suivante, destinée à tracer la médiatrice peut aider à renforcer l'idée d'équidistance.



TRAVERSÉE DE LA LOIRE

Jeanne désire rejoindre le point 0 en partant de S, à pied sur terre et à la nage dans l'eau. Sachant qu'à cause du courant elle ne peut nager dans l'eau que selon la direction d, tracer sur la feuille n° 12 le trajet le plus court possible.

Ainsi que le jeu suivant, en fixant entre-elles les deux cordes en leur milieu.



La boule ne peut se déplacer que sur la médiatrice de chacune des paires de mains des joueurs.

La synthèse

Elle porte sur les liens entre :

- Le tracé à main levée (et la représentation globale)
- Le pliage et la symétrie par rapport à l'un des deux axes du segment.
- La perpendiculaire passant au milieu.
- L'ensemble de tous les points équidistants des deux extrémités.

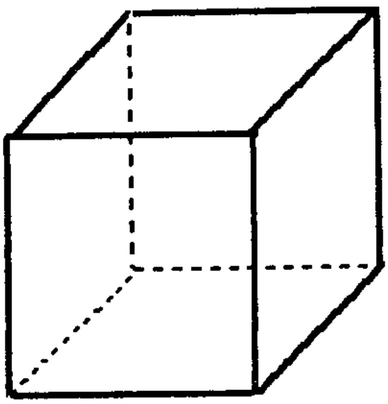
Seule l'idée de pliage, et donc d'axe de symétrie, permet de justifier lors de l'apprentissage, l'équivalence entre les deux définitions et le fait que tous les points équidistants des deux extrémités sont alignés (la trace d'un pli est sans doute l'une des meilleures images mentales de la droite).

L'évolution de cette représentation dans un environnement plus complexe : les médiatrices du triangle.

Les médiatrices redeviennent très courtes, pour pouvoir être isolées avec leurs côtés respectifs, du reste de la figure.
Elles passent «de force» par le sommet opposé si le triangle est presque équilatéral. Il s'agit de deux manifestations de la difficulté à percevoir la médiatrice dans un environnement plus riche sans en déformer la notion.
Dans le cas d'un triangle ayant un angle obtus, très peu d'élèves prennent le risque de décider si elles sont sécantes ; pourtant leur doute est visible et ils ont des arguments pour le dépasser. La principale difficulté est la transitivité de l'égalité des longueurs : de la conjonction de deux des égalités au point commun à deux des médiatrices, ils déduisent difficilement la troisième égalité, par contre il est clair ensuite

que la troisième médiatrice passe aussi par ce point.
Le tracé à main levée permet aussi de valoriser la recherche de la raison pour laquelle le point commun est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle et s'il peut être sur l'un des côtés ; là aussi on détient des éléments de preuve, au moins pour la dernière question, avec les axes de symétrie du rectangle qui se coupent, en son centre, sur la diagonale.
Nous disposons ainsi de deux critères de vérification pour la construction avec instruments : le point commun, et son équidistance des trois sommets qui, vérifiée au compas donne le cercle circonscrit au triangle, et, par retour sur le cas «frontière» du triangle rectangle, on peut institutionnaliser le théorème affirmant que celui-ci est toujours inscrit exactement dans un demi-cercle.

Perspective cavalière d'un parallélépipède



Quelle aide apporte-t-on à un élève de 6[e] lorsque, devant son échec à réaliser une perspective cavalière d'un cube, on le cantonne dans la représentation étriquée des carrés translatés l'un de l'autre, et encore, dans la position la plus classique ; le tout renforcé par un algorithme de construction aussi strict que celui de la division.

Cette représentation est très liée à l'idée de son exécution sur un quadrillage carré (même si le quadrillage n'est pas matérialisé) :

- angle de fuite 45°
- rapport des fuyantes : $\sqrt{2}/2$

Elle fait référence aux notions physiques de verticales et d'horizontales, le quadrillage étant parallèle aux bords d'une feuille rectangulaire.

Dans cette tâche, dès qu'une variable impose une autre représentation, ne serait-ce que le déplacement des pointillés ou la disparition de l'angle droit, l'élève se noie dans des manipulations instrumentales minutieuses, perdant toute vue d'ensemble de son travail et tout contact avec l'idée du résultat à obtenir.
Ceci reste vrai, même s'il sait que des droites parallèles dans l'espace seront représentées par des parallèles sur sa feuille et qu'il dispose d'un procédé de construction fiable pour obtenir des parallèles (isolément, ou en série : hachures).
Il est nécessaire de consacrer une étape du travail à différencier les perspectives auxquelles nous sommes habitués, de donner à l'élève un moyen de tracer des parallèles assez précises, en dessinant loin de lui, sans se cacher ce qu'il fait, avec des traits légers qu'il corrigera par étapes en considérant successivement le parallélisme et les égalités de longueurs dans le parallélogramme.
Ce jeu se retrouve dans le tracé de la perspective du parallélépipède, puisque la seule exigence stricte est que chaque face soit représentée par un parallélogramme.
En exécutant la figure précise avec instruments par-dessus l'ébauche à main levée, l'élève prend conscience de ses erreurs de perception, explicite peu à peu les transports d'une même direction ou d'une même longueur, il anticipe suffisamment pour placer ses instruments de sorte qu'ils lui permettent plusieurs tracés successifs sans déplacer la règle sur laquelle glisse l'équerre, ou sans changer l'écart du compas.
Cette recherche d'un tracé optimal est une preuve du renforcement de l'image mentale.
Le travail avec la règle et l'équerre ne se fonde que sur la conservation du parallélisme, celui avec le compas n'utilise que la conservation des égalités de longueurs alors que le tracé à main levée établit bien les liens entre ses deux caractérisations et la forme de chaque face. (Nous ne sommes pas loin de la notion de vecteur).
Après ce travail certains élèves ne voient toujours pas les défauts de parallélisme entre les fuyantes : confusion entre les deux types de projections, difficulté à conserver une direction distincte de celle d'un bord de la feuille ou pauvreté de la notion de direction. Il y aurait : les verticales, les horizontales et les obliques ? L'explication la plus probable est l'oubli, en cours d'exécution de la tâche, du cadre dans lequel on a convenu de travailler : ombre-perspective cavalière, et de ses lois.

CONCLUSIONS

Le dessin à main levée a déjà révélé son efficacité dans l'étude des transformations de figures planes par symétries et par translations (cf. Petit x et le travail de Colette Laborde).

- Il permet d'expliciter assez fidèlement les représentations mentales des élèves puis de les modifier consciemment, tant pour l'enseignant que pour l'élève,
- Il permet un enrichissement rapide de la notion concernée, de l'acte à l'énoncé des propriétés,
- Il légitime certaines conjectures et sort du raisonnement d'argumentation de type : «On voit que...» il valorise l'idée de propriété et de preuve,
- Il fournit même des critères pour évaluer la qualité d'un tracé où l'on cherche la plus grande précision, et permet de valider un procédé de construction.

On peut aussi se reporter aux articles de Bernard PARZYSZ in Bulletin APM 364 juin 1988 et Plot 45. Décembre 1988. ■

ITÉRATION AU COLLÈGE

Claude LANDRÉ - Olivet

La référence explicite aux algorithmes est une originalité des nouveaux programmes.
Pour introduire au mieux ces nouveaux contenus d'enseignement, des études approfondies sont nécessaires. (Cf. DEA didactique des mathématiques : Bordeaux -1988).
Avec l'itération, trois points de vue sont abordés :
- **place et rôle de l'algorithmique dans les apprentissages mathématiques (voir aussi les rubriques «Au rythme des algorithmes»).**
- **étude théorique de la notion d'itération.**
- **choix didactique pour la construction d'une leçon conduisant au concept d'itération.**

Par la suite (rubrique algorithmique d'un prochain PLOT) une séquence didactique illustrera ces réflexions.

I. Algorithme, mathématiques et programme officiel.

Les programmes officiels de décembre 85 mentionnent pour les quatre niveaux du collège : «l'emploi d'un ordinateur peut accompagner utilement les activités mathématiques, ... son usage permettra également de dégager progressivement les notions de codage et d'algorithme». En particulier, au paragraphe 3-5, on peut lire : «Analyse (et construction) d'algorithme comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur» (Programmes et Instructions - Collège -12/85).

Qu'en est-il dans la réalité ?
Les commentaires des programmes de 6^e-5^e et 4^e ignorent complètement ces lignes très officielles (une faille dans le centralisme de notre administration ? mon propos ne s'engagera pas ici dans ce débat). Du côté des manuels : certains ignorent même le mot ordinateur autant que celui de calculette. D'autres proposent des programmes tout faits, à recopier sur l'ordinateur. Quelques rares auteurs expliquent la signification de certaines instructions.
Quant au programme de 3^e, un paragraphe (le 3-5) est consacré à l'analyse (et construction) d'algorithmes et les commentaires (simple projet au moment de l'écriture de ce texte) soulignent : «Il s'agit d'une simple initiation, par exemples sur des situations telles que croissance d'une population, intérêts composés... mais aucune compétence n'est exigible à ce propos (effectivement la colonne «savoir et savoir-faire exigibles» reste blanche. ndlr).
Les calculatrices ou l'ordinateur pourront-ils être utilisés avec profit ? Prudence dans la forme et le fond, on le constate —alors qu'en général les parties nouvelles font augmenter le volume des commentaires.
Qu'on le déplore ou qu'on s'en réjouisse, les mathématiciens —et donc les mathématiques— utilisent de plus en plus l'outil informatique, lequel modifie les mathématiques, et c'est ce fait de société qui a incité les concepteurs de programmes à vouloir faire dégager les premières notions de codage et d'algorithmes au collège.

II. Quelques questions qui se posent lors de la construction d'une itération.

Dans une tâche de programmation (aboutissement d'une construction d'algorithme) l'élève doit anticiper le rôle du dispositif informatique lors de l'exécution du programme ; il doit donc planifier les actions du processeur qui seront exécutées l'une après l'autre. Il arrive très fréquemment qu'une même séquence d'instructions à l'intérieur du même programme soit exécutée plusieurs fois consécutives (avec ou sans modification des données que doivent traiter ces instructions). C'est ce qu'on appelle une boucle.
Plusieurs cas se présentent alors

LE NOMBRE DE RÉPÉTITIONS EST CONNU

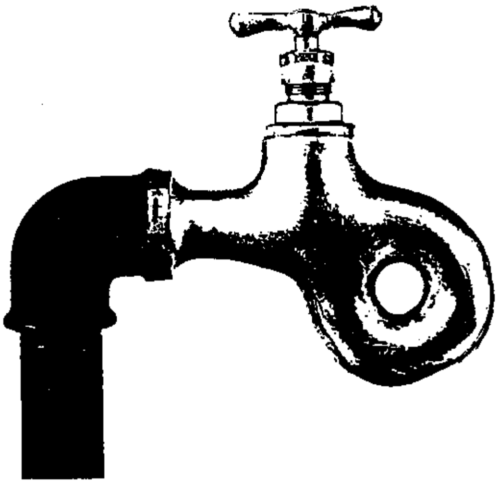
Les répétitions simples :
Les actions s'exécutent plusieurs fois consécutivement et sont exactement les mêmes (avec ou sans variables).

Exemples : Répéter 5 fois : Ecrire «je dois me réabonner au Plot».
Répéter 6 fois : Avance côté Tourne droite 60.

Les répétitions «évoluantes».
Par exemple on veut faire afficher à l'écran cinq phrases identiques mais chacune précédée d'un numéro d'ordre d'apparition à l'écran.

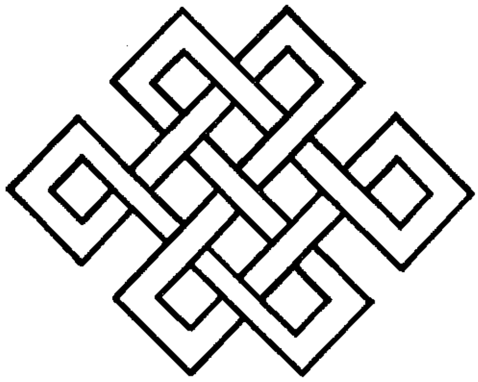
LE NOMBRE D'ITÉRATIONS A EFFECTUER N'EST PAS CONNU

Afin que le programme ne «boucle pas indéfiniment» il va falloir mettre en place un avertisseur de fin d'itération et on obtient une structure du type :



SI (condition) ALORS (itération)
SINON (fin itération)

A chaque itération, la condition évolue et il faut l'évaluer. Une variable (au moins) intervient donc et il faut analyser la manière dont elle contrôle la fin de l'exécution de l'itération (il faut en particulier que la condition prenne la valeur faux pour une certaine valeur de la variable).
La construction d'une itération
— prend en charge plusieurs variables, celles qui assurent le contrôle de la répétition et celles qui permettent d'obtenir le résultat.
— consiste à identifier puis élaborer (et délimiter) le corps de l'itération, c'est-à-dire repérer l'invariant des instructions à répéter (invariant de boucle).
— doit contrôler l'arrêt des répétitions, afin que l'algorithme ne boucle pas indéfiniment. Quelles sont les variables qui assurent ce contrôle ? Pour quelles valeurs de variables et à quel moment l'arrêt a-t-il lieu ? La condition d'arrêt sera en général une expression booléenne construite avec ces variables.
— doit déterminer l'état initial dans lequel se trouvent les variables. Celles qui sont transformées pour traiter le problème et celles qui conditionne l'arrêt.

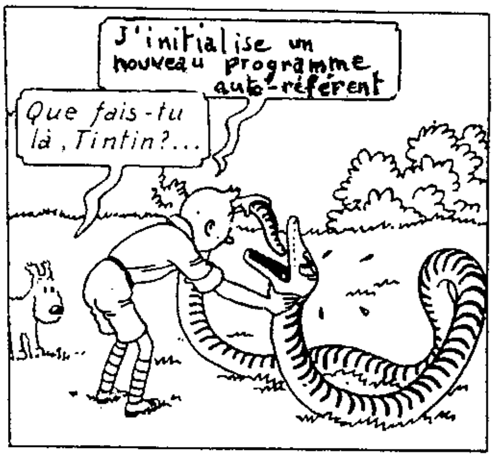


Itération, nœud ou boucle ?

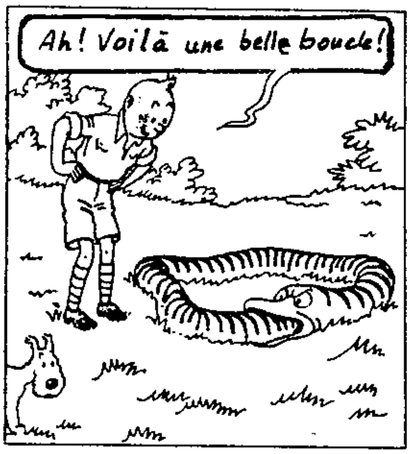
Les publications des différentes équipes de chercheurs en didactique qui travaillent sur l'initiation à la programmation (Rouchier, Sannurçay, Rogalski, Balacheff...) font apparaître plusieurs types de difficultés liées à la notion de variable, à l'affectation, à la position de la condition d'arrêt (par rapport au corps de l'itération), au nombre (connu ou pas) d'itérations à gérer, à l'initialisation des variables (où les erreurs sont plus fréquentes que celles de mise à jour ou de test) et à la mise en place des séquences d'instructions ce qui n'est pas spontané).

III. Quels choix pour construire les leçons ?

Essentiellement des choix de contenu et des choix didactiques. L'itération mathématique n'est pas objet d'enseignement au collège, (ni au lycée - seule l'est la récurrence qui contrôle la stabilité des propriétés quand on passe d'un état de niveau n à un état de niveau n + 1).



Cependant l'itération est utilisée comme **outil** en mathématique et ceci dès la 6e dans certaines activités de plusieurs manuels: outil pour dénombrer (autre point de vue dans «Au rythme des algorithmes»), outil pour approximer (tout le numéro 41 du Plot y est consacré).
Parce que l'itération est un point central dans la programmation, parce qu'elle fait référence à des situations semblables dans leur structure mais différentes dans leur contenu, parce que l'usage de matériels adaptés au traitement d'une de ces situations peut favoriser l'apprentissage d'une autre, il devient nécessaire d'organiser l'enseignement de l'itération au collège, afin



de provoquer des apprentissages par adaptation, créant du sens pour les élèves.
L'itération, outil mathématique, est presque toujours donnée entièrement dans les manuels scolaires.

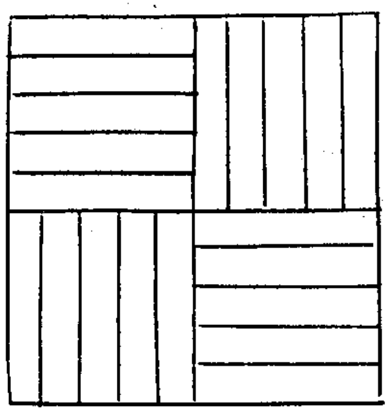
État initial
Corps de l'itération
Condition d'arrêt pour obtenir l'état final.

De même dans les manuels et les revues d'initiation à la programmation, les boucles y sont données toutes faites, dans un langage ou dans un autre, des exemples sont parfois analysés afin de montrer la syntaxe et les effets produits à l'écran. Cela donne l'occasion à J. Arsac dès le début du premier chapitre de son livre «les bases de la programmation» (Ed. Dunod 1983), d'exhiber un programme faux, publié dans une revue ; il constate que ce phénomène n'est pas rare et ajoute «En tout autre discipline, la publication d'un résultat faux serait considéré comme anormale, voire scandaleuse. Il est admis en informatique que l'écriture d'un programme juste est exceptionnelle et donc que l'erreur est normale» et plus loin «Nombre de programmeurs réagiront en poursuivant les essais de ce programme pour en localiser l'erreur. On

ne peut s'en sortir ainsi» et il conclut «Nous avons besoin d'outils et de méthodes pour décrire le fonctionnement d'un programme».
Il est vrai que procéder par essais-erreurs est tentant compte-tenu du feed-back de l'ordinateur mais comme dit Dijkstra «Essayer un programme peut permettre de montrer qu'il contient des erreurs, jamais qu'il est juste». (1972 - Structured programming - Académic Press - Coudres). ■

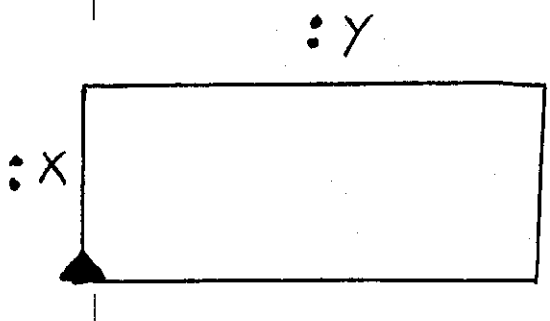
LE CORPS DU PROBLEME LA BOUCLE

Ici, d'un point de vue plus pratique, la question centrale qui se pose lors de l'élaboration d'une itération est la reconnaissance puis la construction du corps de boucle.
Cette construction n'est pas immédiate pour bien des élèves de 4e (qui ont bénéficié de plusieurs heures logo en plus de l'horaire normal de mathématiques même pour une répétition simple.
Par exemple, la mise au point d'une procédure logo qui fait apparaître la figure suivante à l'écran :



quand dans l'espace de travail est disponible la procédure.

Il faut aussi tenir compte du problème de type géométrique : perception globale ou locale des figures (on peut utilement se reporter à la communication de R. DUVAL «Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence (perceptive - opératoire - discursive) Annales de didactique volume 1 1988 - IREM de Strasbourg).



Position initiale et finale de la tortue.
POUR RECTANGLE : X : Y
REPETE 2 [AV : X TD 90 AV : Y TD 90]
FIN

Puisqu'il s'agit de communiquer à l'aide d'un code avec un dispositif informatique, l'objectif des leçons sera de faire élaborer par un groupe un message destiné à un autre groupe, message qui structure une boucle où, dans un cas, le nombre d'itérations est connu, et, dans l'autre cas, le nombre d'itérations est à trouver puisque ce nombre sera la solution du problème.

On supprimera les difficultés, liées aux notions de variables et d'affectation, en éliminant ces notions de la construction des messages.

POINT DE VUE COGNITIF

D'un point de vue cognitif, on se place dans le cadre d'une approche constructiviste de l'acquisition des connaissances en mathématiques, par l'action (résolution de problèmes) et la théorie des rééquilibrations. Dans une interaction constante avec une situation-problème, l'élève «engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles» (Brousseau R.D.M. 4.2.1983). Revue de didactique des mathématiques : La pensée sauvage éditeur).

On prend en compte également les aspects sociaux de l'apprentissage, le rôle des conflits cognitifs (entre interlocuteurs travaillant en groupe) qui facilitent certaines appropriations individuelles : l'existence d'autres points de vue peut amener à prendre de la distance par rapport à sa propre production, à reconsidérer le problème et permettre une réorganisation «englobante», coordonnant à un niveau supérieur les points de vue contradictoires (Doise, Mugny, Penet-Clermont, C. Laborde).

POINT DE VUE DIDACTIQUE

D'un point de vue didactique, on se place dans le cadre de la théorie des situations de G. Brousseau.
«Le professeur doit simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut :

— que les connaissances soient des moyens pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats de façon économique,
— que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et
— que les démonstrations soient des preuves».

(G. Brousseau : «Études de questions d'enseignement»).

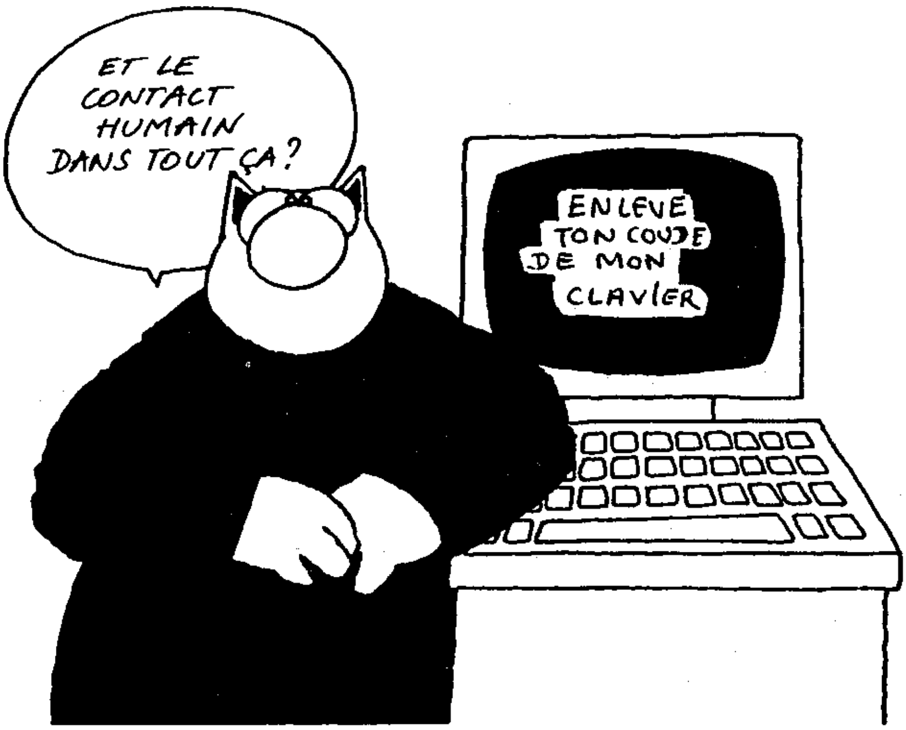
La théorie est fondée sur une analyse des différentes fonctions du savoir :

- le savoir permet la prise de décisions au cours de l'action : une situation d'action fait donc évoluer l'élève vers un changement de point de vue,
- le savoir permet la communication d'informations, une situation de reformulation fait évoluer vers un changement de code, de langage,
- le savoir est un moyen d'établir des preuves ou de rejeter des hypothèses : une situation de preuve fait évoluer l'élève vers un changement de la théorie qui permet de produire des théorèmes,
- le savoir sert de référence culturelle (dans la classe ou la société) : une situation d'institutionnalisation transforme une expérience en savoir exportable.

LA SITUATION PROBLÈME

Le maître fait la dévolution d'un problème aux élèves et la situation provoque les apprentissages ; s'instaure alors entre le maître et les élèves la négociation d'un contrat didactique.

Il faut donc trouver une situation-problème, fondamentale où la solution nécessite l'emploi par les élèves de la connaissance visée, à servir l'itération. La connaissance, encore fragile, est contextualisée, personnalisée par la situation. L'élève améliorera sa connaissance si elle intervient dans plusieurs cadres différents comme outils de résolution : «on peut construire effectivement des connaisances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions» (R. Douady, RDM 7-2-1986). Cela permettra une dépersonnalisation et une décontextualisation en vue d'en faire, ultérieurement, une référence culturelle.
Concrétisation de ces bases théoriques dans un prochain numéro. ■



Apprenez à détourner pédagogiquement les B.D. en lisant :
«Le Chat» Philippe Geluch -Castermann.

PENSEZ A VOUS RÉABONNER

Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1989

Nom et prénom
ou établissement ______________________

Adresse complète ______________________

Code postal et ville ______________________

Pour les 4 numéros de :

1983 ☐	1988 ☐
1984 ☐	1989 ☐
1985 ☐	1990 ☐
1986 ☐	1991 ☐
1987 ☐	1992 ☐

École élémentaire ☐ Collège ☐ Lycée ☐ Supérieur ☐ Autre ☐

payé par chèque ☐

désire facture ☐

nouvel abonné ☐

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Supplément tarif avion
Pour un an	100 F	80 F	+ 40 F
Par année supplémentaire	+ 75 F	+ 60 F	+ 40 F

Total à payer

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 89 -

Nom : ______________________

Adresse : ______________________

____

Facture ☐

RÉDUCTIONS

10 % pour les abonnés au Plot
10 % pour plus de 600 F d'achat

Prix unitaire		Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40 F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique			
40 F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*			
40 F	Aléatoire (PLOT 37)			
40 F	Papiers accrochés			
40 F	Pliages et mathématiques			
40 F	Pavages et symétries			
80 F	Dossiers «Spécial II» (300 p Adcs)			
40 F	Les Dossiers «Ludi-Math» (Poitiers)	n° 3	n° 4	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10 F	Affiches pour la classe : «Horizons Mathématiques»		☐	
10 F	«Polyèdres dans l'espace»		☐	
10 F	60 × 40 cm «l'Univers mathématique»		☐	
20 F	2 pavages hyperboliques à colorier		☐	
40 F	triangles 1 et 2			
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur. n[os] 1 à 14 (4 ou 5) : 20 F			
80 F	Pochettes de diapositives n[os] 2 à 6 (n° 1 : 100 F) n[os]			
80 F	Géode de Raoul Raba en kit (cf. Plot n° 39)			
	+ Frais d'envoi forfaitaire **15 F** **sous-total**			
	-10 % pour les abonnés au PLOT			
	-10 % pour plus de 600 F d'achat			
	TOTAL à Payer			

* Plot n° 39 ☐ ou Géométrie dédéiste (Rouen) ☐

Règlement à envoyer à l'AMPEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Liste des correspondants APMEP du Plot.

POITIERS : IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)
LIMOGES : IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)
NANTES : IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)
RENNES : Collèges La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nezet)
ROUEN : IREM - BP 27 - 76130 - Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)
BREST : IREM - Université - 6, avenue Le Gorgen - 28283 Brest (André Treguer)
CAEN : IREM - IUT - Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen (Francis Conynck)
ORLEANS-TOURS : Université - 45067 Orléans Cedex 2 (Madeleine Schlienger)
CLERMONT-FERRAND : IREM - BP 45 - 63170 Aubière (Luce Dossat)
TOULOUSE : Université - 118, rte Narbonne - 31062 Toulouse cdx (R. Métrégiste)
LA RÉUNION : École Normale Bellepierre - 97487 St-Denis Cedex (D. Tournès)
COTE D'IVOIRE : Daniel Boutté - BP 927 - Abidjan 06
TOGO : Gérard Dubos - BP 91 - Lomé
MAURITANIE : Pierre Latourette - BP 203 - Nouakchott
CAMEROUN : Thierry Murgier - BP 1303 - Yaoundé
CONGO : Jean-Claude Leclercq - BP 2175 - Brazzaville
GUINÉE : Pierre Schraen - Mission Française - Conakry
MADAGASCAR : Claude Viale - BP 3422 Tananarive

SOMMAIRE DU NUMERO 47

Pour vos vacances, un numéro... révolutionnaire !!!
— des portraits inattendus des mathématiciens de l'époque,
— des révolutions mathématiques en France et ailleurs,
— des exemples d'utilisation dans les classes et dans les PAE.
Et toujours, les rubriques du journal :
— Tournois et rallyes des régionales du PLOT,
— A-plot-strophe
— les grandes enquêtes de Ard Clin et,
«l'Esprit Informatique» : premières itinérances.