



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Michel Clinard, Jacqueline Collet,
Roger Crépin, Luce Dossat,
René Gauthier, Georges le Nezet,
Ginette Mison, Serge Parpay,
Raymond Torrent.

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**
Techniques Graphiques du Futur

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest, Caen et Clermont-Ferrand
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du
Centre National des Lettres

SOMMAIRE

Éditorial.....	1
Les horizons mathématiques. Wolfgang Ebenhoh-RFA	3
Point de vue : l'exposition au Deutsches Museum. Joachim Fischer-Munich	11
Sexistes, les mathématiques ? Verena Aebischer-Nanterre	13
Le crible de Sundaran. J.P. Schuppisser-G. Charrière-Lausanne	15
A l'occasion d'une «classe-Villette». Collège de la Grange aux Belles	17
Graphes et stratégies. René Gauthier-Lyon	25
Les quatre couleurs. Jean-François Canet-Avignon	31
Jeu de coloriage. Jean Lefort-Wintzenheim	32
Penta-dodéca. Ginette Mison-Lyon	33
Hepta-doïcosa. Michel Crillon-Chéry	35
A-Plot-Strophe : L'enlèvement d'Hortense. Chronique de l'Ouli «PLOT»	36
Contrôle optimal. Jacques Lubczanski-Paris	39
Mathématiques et ordinateurs. Parish-Partner-Whitaker	41
Tournois et Rallyes Mathématiques du Limousin 1988.....	44

ÉDITORIAL

Rentrée 88 !!!



Une année qui s'annonce fertile en innovations : dans la Région Centre

— les programmes de collège qui vont s'articuler avec ceux du lycée, ce qui fera un **dossier spécial collèges** pour le premier numéro 89 du Plot,

— l'exposition «Horizons Mathématiques» qui continue à démultiplier son parcours, dix exemplaires existent actuellement et une suite est en préparation pour le début 89, «**l'Esprit Informatique** tout est calcul».

— le Plot qui étend son audience et accueille de nouvelles régionales de l'association Apmep : Toulouse et l'île de la Réunion, cherchant et proposant une articulation équilibrée entre le Bulletin Vert, Tangente, l'Ouvert et le Petit Vert.

En attendant, avant le numéro spécial «**Images et mathématiques**», voici une suite au numéro 40 «**des maths autrement**» qui continue à parcourir les mathématiques et leurs applications en liaison avec ce qui se fait autour de l'exposition «Horizons Mathématiques» et dans les classes.

ACTUALITÉS Dès janvier 89, une nouvelle version de l'exposition «Horizons Mathématiques» orientée «calculs et algorithmiques» :
«**L'ESPRIT INFOR-MATH-IQUE**»
Inauguration le 4 janvier à La Roche sur Yon.

Faites abonner vos élèves à...



A PARTIR DU
1er NOVEMBRE
FAITES LE
36 15
TANGENTE

BULLETIN D'ABONNEMENT
à découper ou à reproduire.
(Tarifs valables jusqu'au 31-12-88)

NOM : [] Prénom : []

adresse : _____

Code Postal : [] Bureau Distributeur : _____

Pour les enseignants et élèves, indiquez votre qualité : enseignant élève et les noms et adresse de votre établissement : _____

Je souhaite m'abonner pour 1 an (6 numéros)	France	140 F
	Etranger	185 F
2 ans (12 numéros)	France	240 F
	Etranger	330 F

Anciens numéros : 25 F pièce. N°1 N°3 N°4 N°5 Le N°2 est épuisé.

J'ADRESSE CE BULLETIN AVEC MON REGLEMENT A L'ORDRE DE " EDITIONS ARCHIMEDE " à :
TANGENTE - 76, BLD DE MAGENTA 75010 PARIS

TARIF SPECIAL
DEUX ANS

Liste des correspondants APMEP du PLOT.

POITIERS : IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers (Serge Parpay)
LIMOGES : IREM - 123, rue Albert Thomas - 87060 Limoges (Roger Crépin)
NANTES : IREM - 38, bd Michelet - BP 1044 - 44037 Nantes (Raymond Torrent)
RENNES : Collège La Harpe - BP 1325 - 35016 Rennes (Georges Le Nezet)
ROUEN : IREM - BP 27 - 76130 - Mont-Saint-Aignan (Jacqueline Collet)
BREST : IREM - Université - 6, avenue Le Gorgen - 28283 Brest (André Treguer)
CAEN : IREM - IUT - Boulevard Maréchal Juin - 14000 Caen (Francis Conynck)
ORLEANS-TOURS : Université - 45067 Orléans Cedex 2 (Madeleine Schlienger)
CLERMONT-FERRAND : IREM - BP 45 - 63170 Aubière (Luce Dossat)
TOULOUSE : Université - 118, rte Narbonne - 31062 Toulouse cdx (R. Métrégiste)
LA REUNION : École Normale Bellepierre - 97487 St-Denis Cedex (D. Tournès)
COTE D'IVOIRE : Daniel Boutté - BP 927 - Abidjan 06
TOGO : Gérard Dubos - BP 91 - Lomé
MAURITANIE : Pierre Latourette - BP 203 - Nouakchott
CAMEROUN : Thierry Murgier - BP 1303 - Yaoundé
CONGO : Jean-Claude Leclercq - BP 2175 - Brazzaville
GUINÉE : Pierre Schraen - Mission Française - Conakry
MADAGASCAR : Claude Viale - BP 3422 Tananarive

LES HORIZONS MATHÉMATIQUES

Wolfgang EBENHOH - RFA

Du haut de la tour



avec le titre «Horizons Mathématiques», il n'est pas fait seulement allusion à l'horizon historique et scientifique —la mathématique est à la fois une science très ancienne et très moderne— mais aussi à nos horizons personnels, aux horizons de notre compréhension mathématique.

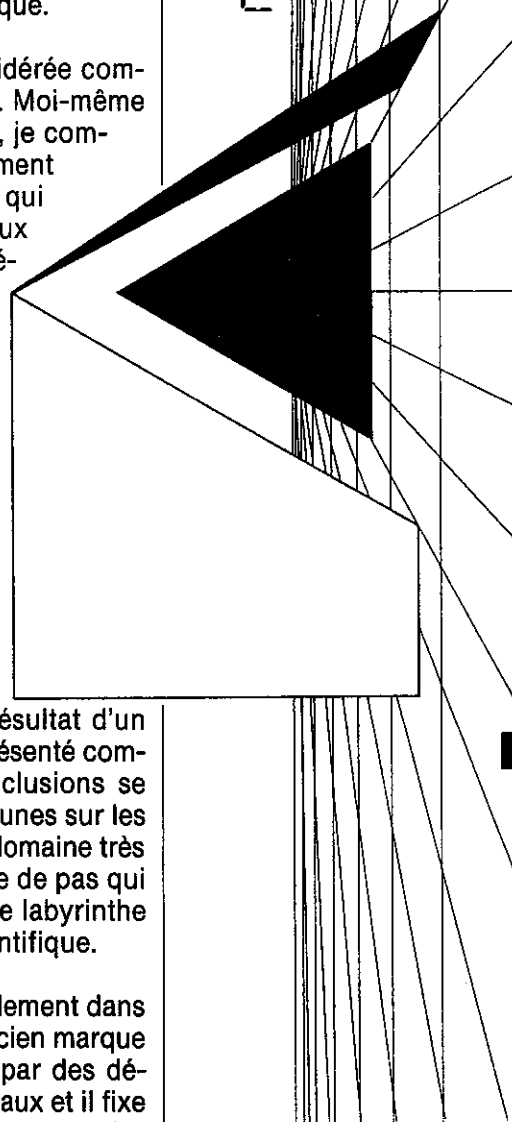
La mathématique est considérée comme difficile et inaccessible. Moi-même en tant que mathématicien, je comprends souvent plus facilement des exposés d'une matière qui n'est pas la mienne que ceux faits par un collègue mathématicien sur sa spécialité.

Cela vient du fait que le résultat d'un travail mathématique est présenté comme une tour faite de conclusions se disposant logiquement les unes sur les autres et, dans le cas d'un domaine très évolué, il y a grand nombre de pas qui doivent être trouvés dans le labyrinthe logique de la création scientifique.

Afin de se repérer plus facilement dans ce labyrinthe, le mathématicien marque les bifurcations possibles par des définitions de concepts nouveaux et il fixe les résultats intermédiaires par des théorèmes. Définitions et théorèmes facilitent le travail à celui qui les connaît, ils soutiennent les domaines des spécialistes très «élevés», mais en même temps ils les entourent comme

Se déplaçant dans les centres culturels et s'adressant à tous les publics l'exposition «Horizons mathématiques» oblige les mathématiciens, volontaires, à des exercices de présentation de leur science à des publics comme ceux que l'on trouve dans les inaugurations officielles. En voici un exemple réalisé, avec humour et passion, par un collègue allemand lors du passage de l'exposition à Oldenbourg. (Traduction assurée par Marie-Claude Aubégnny).

MATHEMATISCHE HORIZONTE



d'un rempart. Ainsi, la mathématique apparaît comme une construction monstrueuse de théories compliquées, emboîtées les unes dans les autres, insaisissable de façon définitive et inaccessible en étant bardée de définitions pointues.

Si l'on veut rendre visite au spécialiste en haut de sa tour, c'est une entreprise difficile et audacieuse car aucune voie royale —comme dit Euclide— n'y mène.

Cette image des mathématiques n'est pas totalement fausse mais ne concerne pas la mathématique, c'est pour ainsi dire le revers de la mathématique que l'on pourrait ainsi caractériser. La mathématique a aussi une face tournée vers l'homme qui fait voir de beaux cheminements de pensée clairs et profonds. C'est de ce côté que veut nous conduire l'exposition «Horizons Mathématiques».

D'un seul coup d'œil

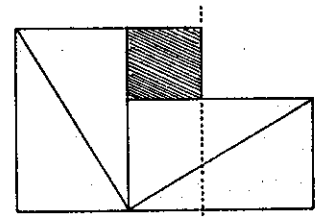
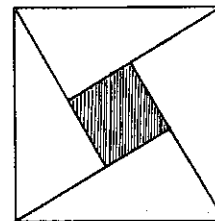
Même celui qui n'est pas mathématicien peut être touché profondément par un résultat mathématique, par un regard dans la clarté absolue. Un de mes amis, biologiste hollandais, arriva un jour chez moi très agité. Il avait trouvé dans un livre sur l'histoire de la pensée humaine une preuve du théorème de Pythagore qui l'avait transporté dans une euphorie intellectuelle et lui avait révélé l'essence de la mathématique.

Ce livre raconte l'histoire ainsi: Pythagore jouait sur une plage de son île avec des carreaux multicolores pris à une poterie proche. En les posant au sol et avec l'aide d'un petit bâton, d'un

seul coup d'œil il fut évident que le carré de l'hypoténuse était égal à la somme des carrés des côtés :

Mon ami le biologiste prit tout d'abord cela pour une révélation au delà des mathématiques.

C'est pourquoi l'exposition «Horizons Mathématiques» est à la fois significative et si nécessaire car, malgré tout son éclat, la face non cachée de la mathématique est peu connue et souvent pas reconnue. Que masque le regard ?



Une partie de la réponse est que les hommes portent en eux pendant presque toute leur vie la caricature de la mathématique que l'école leur a livrée. Wagenschein l'appelle la tragédie du cours de mathématique, il parle du «désespoir dont doit être saisi celui qui connaît aussi bien les mathématiques que les enfants et qui voit devant lui ce que l'on récolte à l'issue de l'enseignement des mathématiques à l'école».

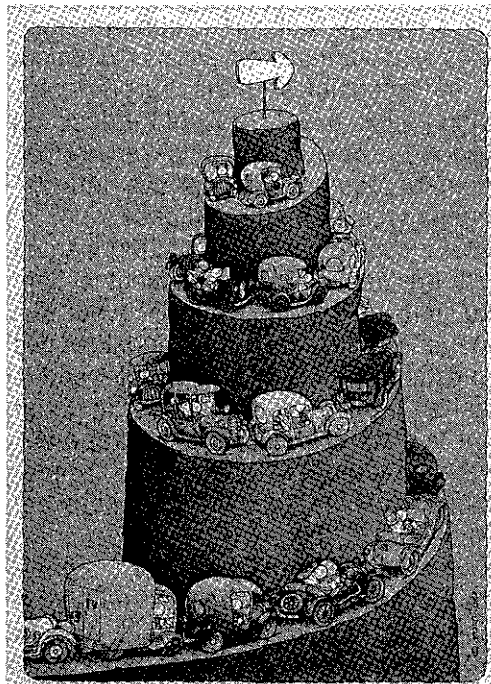
Wagenschein se garde bien de désigner les enseignants comme coupables, il les considère eux aussi comme des victimes. Il cherche davantage les causes dans notre époque actuelle, mais aussi dans la nature de la mathématique qui en rend l'enseignement abusif et dégénéral. Ce sont ces trois caractéristiques :

1. la construction en tour des mathématiques
2. la possibilité d'automatiser la pensée mathématique
3. la possibilité d'application des mathématiques.

4



La construction en tour des mathématiques rend en fait beaucoup de ses parties accessibles uniquement par des échelles raides, et, si le cours de mathématiques suit ces échelles, il est nécessairement ennuyeux. A chaque échelon que l'on manque, la chute menace, l'entrée n'est possible que par le bas.



Auto-math-ismes

La possibilité d'automatiser la pensée mathématique par des procédés préfabriqués a fait justement des mathématiques de ces dix dernières années la science la plus moderne, une révolution immense de la pensée commençait alors. La pensée n'est pas rendue superflue par l'ordinateur, mais le penseur reçoit seulement de nouvelles aides, comme le voyageur en a reçu dans l'ère moderne avec les chemins de fer et l'aviation.

Schopenhauer a tout à fait raison quand il dit : «que la plus inférieure des activités de l'esprit c'est l'activité arithmétique, ce qui est confirmé par le fait qu'elle est la seule à pouvoir être effectuée par des machines». Ce faisant il ne blesse pas le mathématicien dont la performance est justement d'avoir élaboré certaines pensées si définitivement que les répétitions de ces pensées peuvent être maintenant transmises à des machines.

Des recettes toutes faites ne sont pas seulement faciles à donner aux ma-

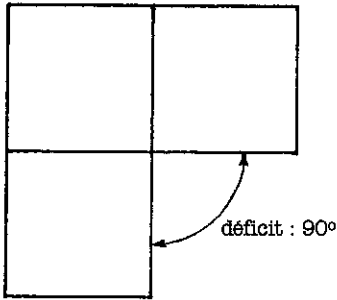
chines mais aussi aux élèves. Il est même amusant de les maîtriser quand, par exemple, des équations quadratiques ont des solutions entières. De plus, l'assimilation des recettes est facilement contrôlable et rend possible une évaluation irréfutable.

Quelle tentation pour un professeur de mathématiques qui est sous la pression des programmes, des parents et des collègues et qui voudrait en plus faire vivre aux enfants une situation de réussite !

Le caractère utilitaire des mathématiques fournit un alibi à la transmission des recettes. En fait, la mathématique est un outil fantastique dans notre monde technique et en particulier pour toutes les sciences. Malgré tout je pense —et je le dis en tant qu'utilisateur enthousiaste— que si l'on veut transmettre l'élémentaire, le profond, les belles idées claires des mathématiques, les idées fondamentales qui forment l'homme, qui exercent son esprit et qui sont significatives pour l'histoire de la civilisation, on ne doit pas mettre au premier plan le caractère instrumental des mathématiques.

Cette exposition ne veut pas enseigner les mathématiques, elle n'est ni en concurrence ni en complément de l'école. Mais elle veut démontrer que les mathématiques ont de multiples accès par lesquels on peut arriver à des profondeurs significatives sans faire dix semestres à l'Université. De telles tentatives restent cependant à l'avant-garde pédagogique. A cet égard, la multiplication de jeux mathématiques laisse entrevoir un large intérêt pour la pensée mathématique.

Je voudrais ici mentionner également le succès du tournoi mathématique ainsi que du rallye informatique, tous deux avec d'excellents exercices qui, en fait, ne visent pas seulement à ouvrir l'accès aux mathématiques mais aussi à faire progresser un peu plus les jeunes qui en sont déjà proches. Les exercices doivent pouvoir être résolus avec des connaissances élémentaires et de l'imagination. Un exemple : sur un ballon de football deux hexagones et un pentagone se rencontrent à chaque sommet. Comment peut-on, à partir de ce seul fait, en déduire le nombre total de sommets ?



LE DÉFICIT DU FOOTBALL

▼

Est-ce démontrable ?

Si on fait la comparaison avec le cube, on trouve que le déficit angulaire en chaque sommet multiplié par le nombre de sommets est de 720° . Que se cache-t-il sous cela ? Il appartient à l'essence de la mathématique qu'à partir de concepts facilement compréhensibles se posent des questions facilement compréhensibles, mais surprenantes auxquelles il est souvent difficile de répondre et qui font pénétrer profondément dans le champ des interdépendances en mathématiques.

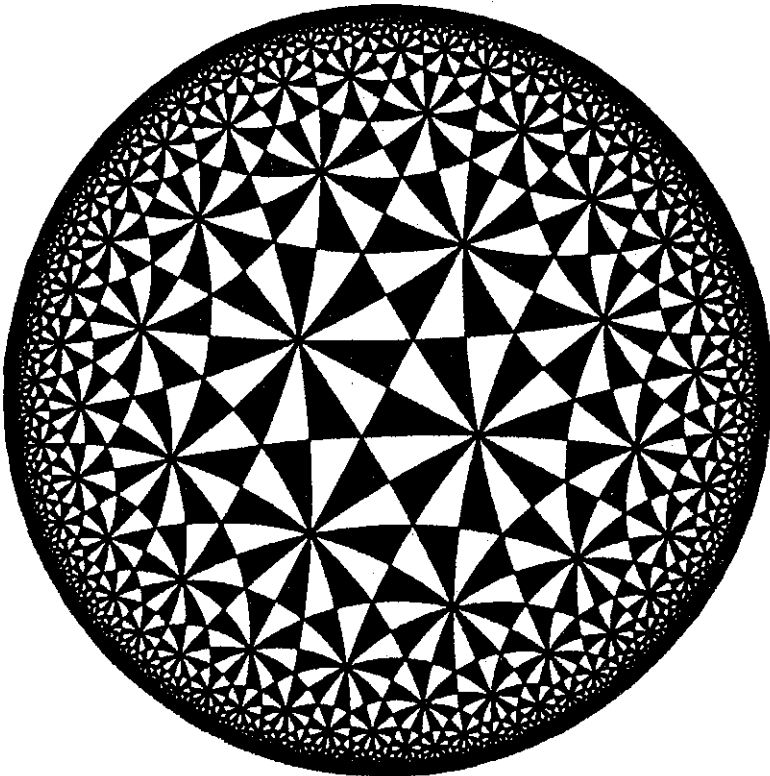
Le succès que cette exposition a eu en d'autres lieux et aura également ici tient au fait qu'elle fait surgir avec des moyens facilement appréhendables des questions séduisantes et qu'elle rend le visiteur **actif** en le mettant dès le début sur la piste qui le conduit à la réponse. Le spectateur se transforme rapidement en chercheur, en chercheur qui trouve.

Souvent la véritable performance intellectuelle dans l'histoire des mathématiques, et ailleurs également, fut de **trouver la bonne question**.

Pour la suite des nombres premiers la preuve pénétrante, apportée par Euclide fait l'admiration des mathématiciens, mais ce qui est le plus admirable est qu'ait été posée la question : «Est-ce que la suite des nombres premiers est infinie ?» Pendant plus de deux mille ans, l'axiome sur les parallèles ne fut jamais mis en doute. C'est pourquoi les questions ne pouvaient être formulées qu'ainsi : «Est-ce démontrable ?», «Comment est-ce démontrable ?» La reformulation : «Qu'est-ce qui se passe si cet axiome sur les parallèles ne se vérifie pas ?» représente une rupture épistémologique. Il est caractéristique que la géométrie non euclidienne apparemment si «non représentable» ait servi de base pour le graphisme de la couverture de la brochure d'accompagnement de cette exposition.

La crise des irrationnels

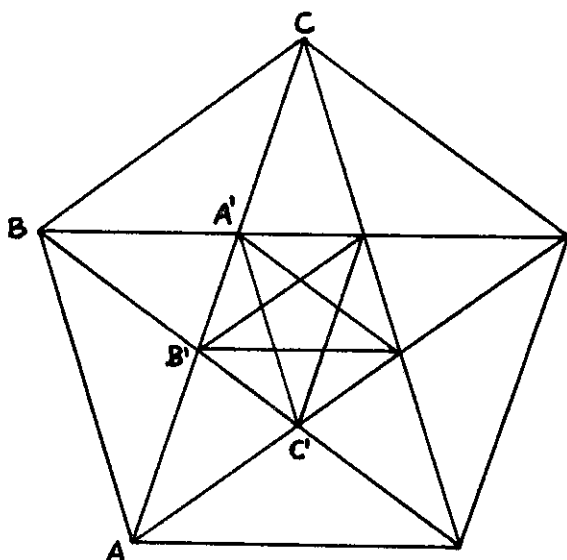
Est-ce que les côtés et les diagonales d'un carré ont une commune mesure, c'est-à-dire est-il possible de les représenter en tant que multiple entier



d'une unité commune ? Cette question, pour nous aujourd'hui inoffensive, est ensuite quasiment impensable si on considère **comme allant de soi** que des choses de même nature possèdent une mesure commune. L'excitation fut grande, lorsque Hipposos montra à l'aide d'une preuve merveilleuse que le processus de recherche d'une unité commune divisant le côté et la diagonale d'un pentagone ne finit jamais. Le processus, s'il s'arrête, permet de trouver l'unité commune. Pour cela on exploite le fait que la différence entre deux grandeurs s'exprime aussi comme multiple de l'unité commune à ces deux grandeurs.

Trouver la bonne question

Ce qui importe, c'est ce qui vaut aussi bien pour la grande que la petite recherche. Pour la compréhension, les bonnes questions sont nécessaires ainsi que du temps pour se confronter soi-même à ces questions. Nous autres mathématiciens intéressés aussi par la pédagogie recevons de cette exposition des incitations précieuses. Nous devrions nous donner davantage de peine pour trouver de telles questions qui permettent à l'individu intéressé d'avoir une démarche de chercheur, ce en quoi



Hipposos prouva que l'unité, dont les multiples entiers sont AB et AC , est aussi l'unité pour $A'B'$ et $A'C'$.

En fait

$$A'C' = AC - AB \text{ et } A'B' = AB - A'C'$$

car

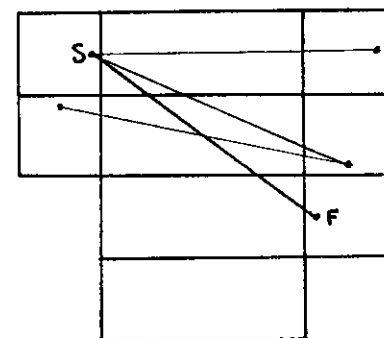
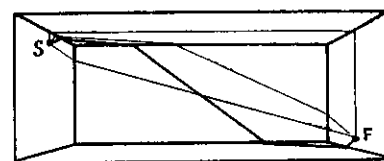
$$AA' = AB \text{ et } A'C' = A'C.$$

Cette conclusion peut toujours être répétée, si bien que l'unité devrait toujours être plus petite que toute autre, donc une telle unité n'existe pas. Le rapport entre les deux segments ne peut s'exprimer par un nombre rationnel. A ce que l'on dit, les Dieux ont puni Hipposos par un naufrage où il trouva la mort, mais on ne sait pas si c'est pour la découverte ou la divulgation de la découverte de l'incommensurabilité. Platon s'étonna ensuite que cette découverte n'apparaisse que très tard et il eut honte «pour lui et tous les Grecs» car il ne pensait pas une telle ignorance «possible chez les hommes, tout au plus dans un troupeau de cochons».

le mathématicien averti n'a guère d'avance sur lui. De telles questions ou groupes de questions ont souvent leur origine dans des exercices purement cérébraux.

Un exemple : une araignée est dans un parallélépipède qui mesure $12 \times 12 \times 30$ pieds, sur un mur de façade, au milieu et à 1 pied sous le plafond. Exactement en face, à 1 pied du sol, dort une mouche. Quel est le plus court chemin de l'araignée à la mouche ?

Sur les différents patrons, on peut voir que différents chemins sont possibles. Les dimensions sont choisies de telle sorte que la réponse surprenante est que par le plus court chemin l'araignée touche cinq murs. Alors, plusieurs questions me sont venues à l'esprit, qui n'exigent pour leur réponse que le théorème de Pythagore, de l'imagination et de la patience :



*S comme Spinne.
F comme Fliege.

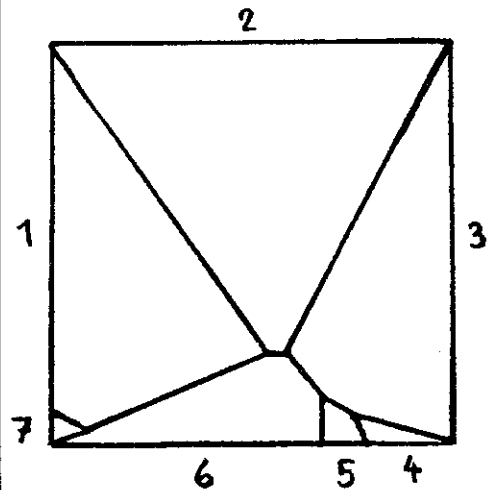
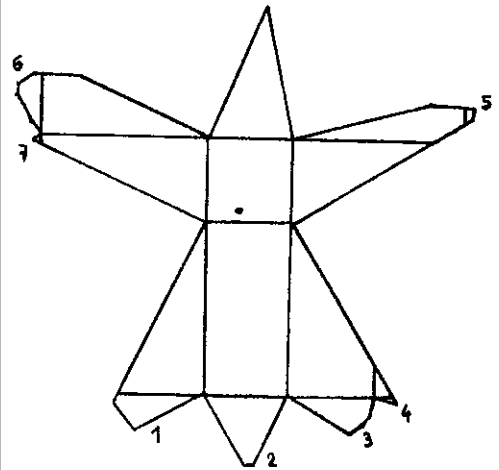
Où aurait dû s'installer la mouche avant sa sieste pour être le plus loin possible de l'araignée ?

Le point n'est **pas** situé en face de la position de l'araignée.

Où sont les pôles du parallépipède, la paire de points qui, sur la surface du parallépipède, sont éloignés au maximum ? Ce ne sont **pas** les coins opposés, ni les milieux des côtés opposés.

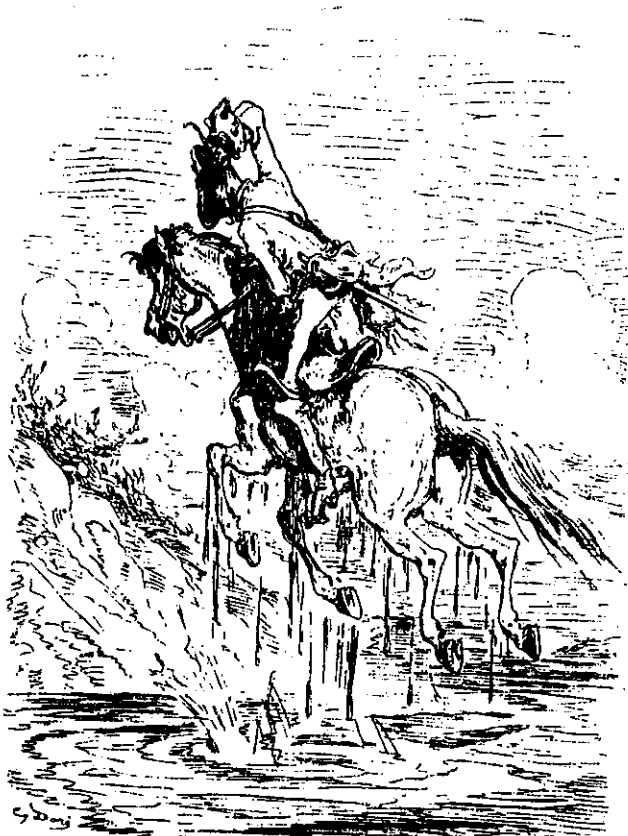
Nous sommes ici en présence d'un des cas fréquents où un problème symétrique peut avoir des solutions asymétriques. De quelle façon les réponses à ces questions dépendent-elles des mesures du parallépipède ? Il y a des valeurs paliers, de telle sorte que pour un cube tout est très différent du parallépipède donné ci-dessus. Comment diviser le réseau du parallépipède à partir d'un point donné, pour que de tout autre point le chemin le plus court soit aussi le plus droit ? Il y a, comme nous l'avons vu ci-dessus, entre deux points quelconques, plusieurs chemins localement minimaux dont il faut trouver le plus court globalement. Les côtés doivent être découpés car différents points d'un côté sont accessibles par différents chemins.

Un exemple d'une telle décomposition : Comment ce réseau fut-il construit ? Quelles informations contient-il ? Je n'ai pu me retenir de dévoiler l'essence des réponses. Peut-être, malgré tout, l'un de nos lecteurs va-t-il entrer dans ces questions ? Moi, en tout cas, j'ai passé des journées excitantes sur ce réseau découpé et n'ai obtenu jusqu'à aujourd'hui que des résultats incomplets.



Décomposition d'un côté en sept parties, correspondant à différents types de chemins.

Pour de tels problèmes et de telles réponses, ne se pose pas la question de l'utilisation. A un moment quelconque, la solution peut prendre une signification, l'origine de la question peut être dans un problème pratique, mais ce n'est pas une obligation.



Le baron de Munchhausen

Mathématique et réalité

La relation triangulaire entre mathématiciens, mathématique et réalité est particulièrement compliquée. L'individu tourné vers la réalité dit simplement : les mathématiques existent dans la tête des mathématiciens et les mathématiciens existent dans la réalité. La mathématique des livres ne devient vivante que dans la tête des mathématiciens, Platon voyait la chose tout autrement. Pour lui, les choses du monde n'étaient que les reflets des choses vraiment réelles comme celles auxquelles se rattachent les objets mathématiques.

Dans une telle optique, il ne pouvait y avoir une seule vérité, par exemple une seule géométrie. Aujourd'hui, après la création de la géométrie non euclidienne, le rapport des objets mathématiques à la réalité est devenu plus difficile. Et comme la construction mathématique est claire et solide en soi, avec de merveilleuses interrelations, il semble possible et nécessaire à plus d'un mathématicien hors de son point d'ancrage de le résoudre en des choses aussi incertaines que l'homme ou la réalité. Selon le point de vue, on peut poser la question du **fondement** des mathématiques de façons très différentes :

Comment réussir à faire le coup de Münchhausen et trouver le fondement des mathématiques en elles mêmes ?

ou

Quelles sont dans la réalité et dans la pensée humaine les racines des mathématiques qui sont indissociables ?

Les tentatives de réponses à ces questions sont devenues aujourd'hui un domaine spécial des mathématiques : la recherche fondamentale. Ceci est un coup «à la Münchhausen» en ce sens qu'aujourd'hui tout mathématicien peut renvoyer au fait qu'il y a naturellement dans la recherche fondamentale comme dans tout autre domaine spécialisé des questions ouvertes.

La crise des fondements

Mais les problèmes sont là en de bonnes mains et provisoirement il est

permis de continuer à faire comme jusqu'à maintenant. La crise des fondements, à savoir l'émergence et la douloureuse non réponse à des questions fondamentales est ainsi supportable. Mais on ne peut nier les ombres qui tombent des questions des fondements et de l'être pourtant si clair des mathématiques.

AVENTURES DU BARON de MUNCHHAUSEN dans la guerre contre les Turcs.

Chapitre IV

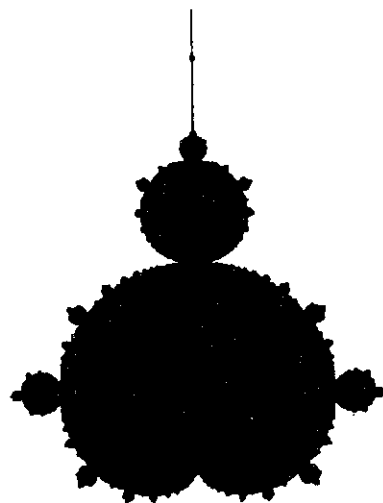
☆☆

— Hum ! pensai-je, aller, c'est bien, mais comment revenir ? Que va-t-il t'arriver une fois dans la place ? On te traitera en espion et on te pendra au premier arbre : ce n'est pas une fin digne de Münchhausen !

Ayant fait cette réflexion, suivie de plusieurs autres du même genre, j'aperçus un boulet, dirigé de la forteresse contre notre camp, qui passait à quelques pas de moi ; je sautai dessus, et je revins au milieu des miens, sans avoir, il est vrai, accompli mon projet, mais du moins entièrement sain et sauf.

Si j'étais lesté et alerte à la voltige, mon brave cheval ne l'était pas moins. Haies ni fossés, rien ne l'arrêtait, il allait toujours droit devant lui. Un jour, un lièvre que je poursuivais coupa la grande route ; en ce moment même une voiture où se trouvaient deux belles dames vint me séparer du gibier. Mon cheval passa si rapidement et si légèrement à travers la voiture, dont les glaces étaient baissées, que j'eus à peine le temps de retirer mon chapeau et de prier ces dames de m'excuser de la liberté grande.

Une autre fois, je voulus sauter une mare, et, lorsque je me trouvai au milieu, je m'aperçus qu'elle était plus grande que je ne me l'étais figuré d'abord : je tournai aussitôt bride au milieu de mon élan, et je revins sur le bord que je venais de quitter, pour reprendre plus de champ ; cette fois encore je m'y pris mal, et tombai dans la mare jusqu'au cou : j'aurais péri infailliblement si, par la force de mon propre bras, je ne m'étais enlevé par ma propre queue, moi et mon cheval que je serrai fortement entre les genoux.



Que sont ces questions des fondements ? Depuis Hilbert, il ne s'agit plus de la **vérité**, mais seulement de la **certitude** que, si une formulation est prouvable, son contraire ne peut pas être prouvé. Gödel a aussi ébranlé cette certitude en montrant sur l'exemple de la théorie des nombres que si, à partir d'axiomes et avec le langage de la théorie des nombres, une proposition peut être formulée, elle dit à peu près ceci «je suis improuvable». Par là est détruit le rêve d'Hilbert qui veut que des systèmes d'axiomes mathématiques peuvent être complets et leur liberté à se contredire prouvable de l'intérieur. En conclusion encore, quelques remarques sur les applications des mathématiques. Le succès des applications fait pâlir les problèmes des fondements. Les mathématiques «fonctionnent» de toute évidence. On présente volontiers la mathématique comme la science des systèmes formels. Si elle l'est —et si elle est seulement cela— alors je me sens en tant que modéliste mathématicien —et il doit en être de même pour d'autres «mathématiciens appliqués»—exclu des mathématiques. Mais pour aller où ? J'explore des systèmes réels, l'atmosphère, l'océan, des écosystèmes, une entreprise, en décrivant et simulant mathématiquement le système. Sur un bon modèle, on peut plus facilement et plus sûrement distinguer un principe et essayer à moindres frais quelque chose de nouveau. Je m'imagine, ce faisant,

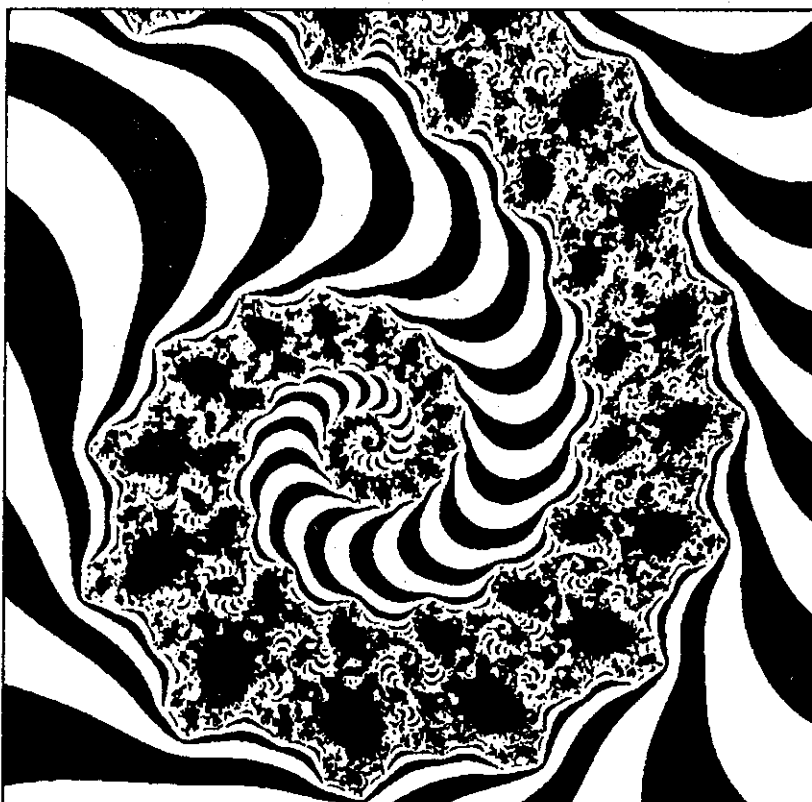
effectuer vraiment une activité mathématique : j'abstrais, je cherche les points communs de systèmes différents, proches des principes fondamentaux, je prouve et je me sou mets aux vertus mathématiques. C'est naturellement égal que l'on appelle ou non mathématiques l'activité du modéliste mathématicien. En tout cas elle montre :

- que le monde clair et pur des mathématiques est le plus simple des mondes pensables,
- que malgré tout la mathématique pure ne doit pas craindre le contact avec le monde souillé mais vivant.
- et qu'inversement plus d'une réalité obscure peut être éclairée par un modèle mathématique.

L'harmonie du chaos

Mais il serait absolument faux de croire que le monde dans lequel nous vivons et qui est infiniment plus complexe que les mathématiques, pourrait être **expliqué** par les mathématiques. Notre monde offre au mathématicien une source inépuisable d'idées nouvelles qui peuvent ensuite mener une vie personnelle dans les mathématiques. Comme exemple très récent, on peut prendre le développement de la théorie des systèmes chaotiques : les «petits hommes-pommes» et les petits hippocampes et autres figures caractéristiques apparaissent dans une présentation colorée dans des magazines de vulgarisation scientifique sous le titre «l'harmonie dans le Chaos».

Aussi est-ce une erreur de souligner, pendant le cours, le caractère d'outil des mathématiques, et c'en serait une aussi que de réprimer ses relations au monde dans lequel nous vivons. L'exposition que nous inaugurons aujourd'hui a trouvé une voie heuristique pour représenter de façon exemplaire la diversité des mathématiques entre l'abstrait et l'application. Elle ne peut englober toute la mathématique, elle ne peut pas non plus montrer les interdépendances les plus profondes mais elle va amener plus d'un à continuer à s'occuper de mathématiques car elle permet un regard sur l'essence même des mathématiques, inconnue à la plupart des individus. ■



POINT DE VUE : L'EXPOSITION AU DEUTSCHES MUSEUM

Joachim FISCHER - Munich et Berlin

Son y regarde de près, il s'avère que l'exigence de Hilbert, selon laquelle on devrait pouvoir tout de suite exposer au premier venu dans la rue le problème éventuel de presque toutes «les unités de représentation» (ici nous tombons dans le jargon du musée), est avec cette exposition remplie de la plus belle des façons. Le point de départ est presque idéal : qu'en fait le visiteur ? Là nous devenons plus personnel : le Musée Allemand est un aménagement **sui generis** et s'efforce de rester fidèle à la phrase que l'on attribue à son fondateur Oskar Von Miller qui aurait affirmé : «Dans cette maison chacun peut (et à la permission de) faire ce que je veux». Cette phrase implique le relatif libéralisme dont jouit le visiteur et montre par son côté exigeant ce à quoi il prétend. Le véritable test de solidité pour les produits industriels a lieu comme on sait au Musée Allemand. Notre maison le sait et a exposé seize mille objets qui ont réussi ce test. A cette attente de «résistance de l'objet» s'oppose le caractère un peu fragile de nombreux objets de l'exposition de nos amis français. On pouvait être curieux du résultat.

Pour commencer : dans l'ensemble tout fonctionne à merveille. Certes il arrive que certains objets se cassent, le plus souvent par inadvertance plutôt qu'intentionnellement, très régulièrement le nombre de balles de ping-pong utilisées pour chercher le paquet de boules le plus étanche dans un contenant cubique diminue très rapidement pendant le week-end : «utilisation des mathématiques ?» L'invitation à subtiliser, sans être vu, au moins une balle de ping-pong n'est pas clairement exprimée, mais est la plus suivie, en particulier le «sans être vu» est strictement respecté.

La vue de ces visiteurs qui, avec une patience et une persévérance étonnantes, prouvent que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, qui posent le dallage irrégulier de Penrose, secouent et tournent la planche de Galton, sont surpris devant les anamorphoses et admirent les surfaces minimales : c'est cela qu'offre la traversée quotidienne de l'exposition.

Surprenant et encourageant à la fois de voir plus loin un visiteur s'approcher

rapidement des thèmes (abstrait) par l'intermédiaire du jeu avec des objets (concrets) ; les textes qui sont sur les panneaux de présentation sont brefs et laconiques. Derrière cela, se cache une double motivation : d'une part «il ne s'agit pas de tout expliquer» et d'autre part il y a une raison technique de nature didactique : en France on aime bien faire accompagner des expositions par un animateur si bien qu'en règle générale il y a toujours quelqu'un pour expliquer les problèmes, les questions ou mener une discussion. Par suite des conditions particulières à notre maison, nous avons dû y renoncer mais cela permet de mesurer l'effet propre de l'exposition. En fait, il est très rare qu'un visiteur reste embarrassé devant un objet, un panneau ; la plupart du temps se créent de petits groupes, il en sort des idées spontanées sur ce que l'on devrait faire avec certains objets (ou pourrait faire : ce qui ne conduit pas au même résultat) et «tout se met en marche».



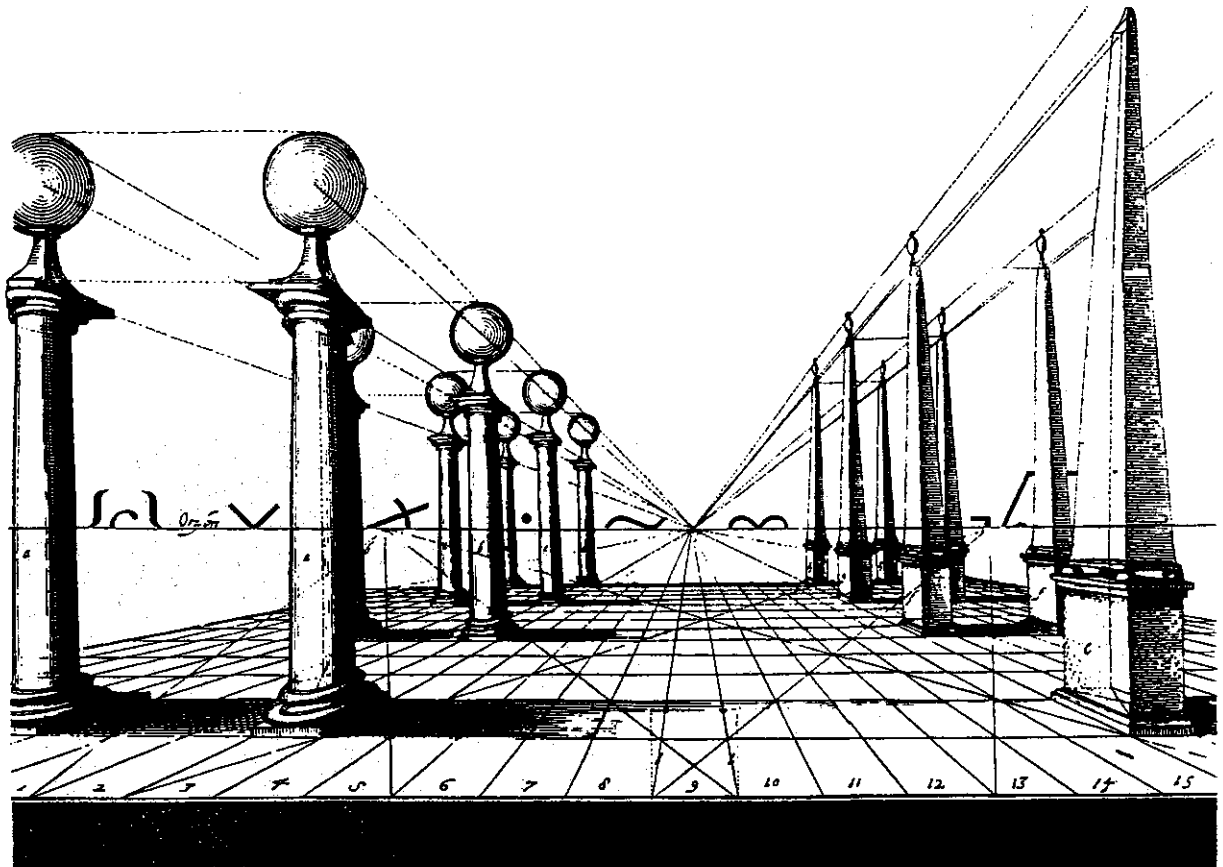
Bien sûr il y a des favoris : en partie à cause de leur forme connue (Tangrams, puzzles,...), en partie à cause de leurs particularités esthétiques (mosaïques, surfaces minimales) et s'y ajoute le plaisir de manipuler (les cubes avec lesquels se forme le serpent de Hamilton). La planche de Galton est favorite ainsi qu'un phénomène toujours accompagné de surprise et d'étonnement : les anamorphoses.

Conformément à la nature, la façon de se comporter diffère d'un visiteur à l'autre mais il n'y en a pas un qui se «perde» dans cette exposition pour ensuite la traverser rapidement ou lui tourner le dos. Celui qui y entre semble attiré par ces objets inhabituels pour le reste du musée —et s'attaque à au moins un ou deux d'entre eux. Certains vont patiemment d'un kiosque à l'autre, regardent ici, saisissent là, atterrissent aux nœuds et aux puzzles et sont pris pour un bon moment (c'est ce qui se passa pour nos surveillants qui en particulier les premiers jours se rassemblèrent autour de certains kiosques).

En tout cas, il faut souligner que les enfants et les jeunes semblent avoir un accès presque naturel à l'exposition. La ti-

midité (pas) naturelle des adultes à toucher les objets (une observation qui avait déjà été faite en France) les conduit à une approche beaucoup plus lente. Cela provient sans doute du fait que (peut-être à cause de la crainte de faire «mal») l'adulte typique essaye d'abord de lire les textes sur les panneaux comme des instructions et c'est seulement une fois qu'il s'est rendu compte que par leur brièveté ils n'en sont pas qu'il essaie de se saisir de l'objet. Cela a pour conséquence que les enfants qui visitent l'exposition accompagnés par des adultes sont toujours un peu «en avance» sur les adultes. L'objectif de l'exposition est sûrement, dans la majorité des cas, atteint. En fait le programme est aussi général qu'ambitieux si bien qu'il est difficile de répondre à la question de savoir si le visiteur ramène bien chez lui ce qui est «vrai» —au cas où cela peut exister—(peut-être cette question, comme beaucoup d'autres, est-elle mal posée ?)

On peut dire qu'il s'agit d'une exposition réussie : en renonçant à des formes «modernes» de présentation (par exemple l'aide d'un P.C.) est préparé un accès plus original et ludique aux domaines mathématiques. ■



SEXISTES, LES MATHÉMATIQUES ?

Verena AEBISCHER - Nanterre

Conjectures sur des stratégies d'évitement des mathématiques chez les filles

«**J**e n'aime pas les maths !» Cette exclamation venant du fond du cœur, des filles et garçons l'ont inlassablement répétée lors de nos interventions dans plusieurs classes de 4^e et de 3^e dans quatre collèges de la région parisienne. Les mathématiques sont rarement vécues comme un exercice de plaisir et, ainsi que nous avons pu le constater, souvent associées à des images de destruction, d'angoisse et de sélection. En effet, depuis février 1987 nous essayons par différents moyens d'action d'amener les filles à intégrer plus souvent des matières scientifiques dans leurs projets professionnels et à s'orienter un peu plus vers les sciences et des carrières dans le domaine des technologies avancées. La situation actuelle a effectivement de quoi inquiéter. Car contrairement à une idée souvent admise, il y a plus qu'une stagnation de la place des femmes dans les métiers scientifiques et technologiques de haut niveau, les statistiques montrent même un fléchissement.

Selon le recensement de population en 1982, 45 % des femmes françaises sont concentrées dans des professions comme secrétaire, aide soignante, assistance maternelle, employée de maison, etc. Elles travaillent souvent à temps partiel, dans des emplois précaires, aux conditions de travail difficiles. En France, comme dans d'autres pays occidentaux, les sciences et techniques sont considérées comme masculines et les lettres et le tertiaire comme féminins. On peut sérieusement se demander, si l'attitude des filles envers les matières scientifiques, et en particulier envers les mathématiques, ne joue pas un rôle capital dans leur orientation vers des professions «féminines». Car contrairement aux garçons -et ceci dans tous les pays développés où des études ont été faites à ce sujet- les filles «décrochent» des mathématiques dès leur pré-adolescence, alors que cette matière pour laquelle l'institution ne leur demande que de bonnes notes, ne présente pas plus de difficultés pour elles que pour les garçons.

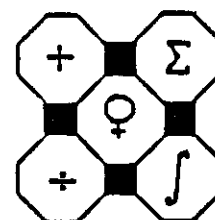


Emmy Noether (1882-1935)

On a l'impression que les filles ébauchent des projets d'avenir qui leur permettent d'éliminer les mathématiques. A performance scolaire égale, les filles introduisent moins souvent que les garçons les disciplines scientifiques dans leurs projets de vie. Et bien que depuis 1968-70, le nombre de bacheliers dépasse celui des bacheliers, les filles ne représentent qu'un peu plus de 30 % des effectifs en terminale C contre 90 % dans la section G1 (secrétariat) où les mathématiques ne sont plus obligatoires.

Dans le but d'agir contre des attitudes et comportements stéréotypés de ce type et pour favoriser une présence plus importante des filles et des femmes dans le domaine des mathématiques, des sciences et de la technologie, nous avons élaboré, en 1983, avec l'Association «Pour une éducation non sexiste», un projet de recherche initialement prévue pour une durée de trois ans.

Extrait de
«Mathematical
Intelligence»



PROBLÈME-CHOC.

Sophie Germain, une des premières mathématiciennes françaises (1776-1831) —contemporaine de Gauss— avec Poisson, à étudier les surfaces élastiques dont les vibrations produisent des sons (cf. le film «tambour que dis-tu?» de Bourguignon présenté à la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette et dans l'exposition «Horizons Mathématiques»).

Voici l'un de ses problèmes accessible par factorisation par vos élèves de 4^e, 3^e:

Quels sont les nombres premiers de la forme $a^4 + 4$?

Après de multiples démarches infructueuses en France, depuis 1983, l'Association a obtenu le soutien financier et moral de la Communauté Économique Européenne, à Bruxelles, qui a inscrit le projet dans le programme d'action sur l'égalité des chances des jeunes filles et des garçons en matière d'éducation (ce programme a été décidé le 3 juin 1985 par une résolution des ministres de l'éducation réunis au sein du Conseil de la Communauté Européenne). Le fait que la Communauté Européenne soutienne des projets de recherche-action

et de participer à cette action expérimentale de recherche européenne. Le ministère a facilité nos interventions dans les collèges notamment en allouant, par exemple, à quatre établissements une somme correspondant à 20h/ année supplémentaires. Prévues pour une durée de 18 mois, l'opération (à laquelle s'est aussi associée la Délégation à la Condition Féminine) est menée sous la responsabilité de Verena Aebischer, enseignant-chercheur, et de Catherine Valabrègue, présidente de l'Association

Pour une éducation non sexiste, qui est aussi chargée de la coordina-



correspondant à ses orientations est est du plus grand intérêt. En effet, les subventions votées pour les réaliser ne sont accordées que si l'Éducation Nationale de chacun des pays y participe financièrement. L'idée en étant que les actions, qui commencent à être menées dans tous les États membres, ne restent pas des actions «pilotes», mais qu'elles soient diffusées par les divers ministères de l'Éducation Nationale et multipliées.

C'est ainsi que le Ministère de l'Éducation Nationale, en France, a finalement décidé, en décembre 1986, de soutenir notre projet

tion des travaux auprès de la commission de la C.E.E. La recherche doit aboutir, en juillet 1988, à la formulation de recommandations qui permettraient de généraliser l'incitation des filles vers les sciences et les nouvelles technologies.

Signalons qu'un P.A.E. (projet d'action éducative) a été construit avec les mêmes objectifs et l'utilisation de la même méthode dans un collège de Limoges.

P.S. : Si des lectrices ou lecteurs sont intéressés par cette expérimentation, ils peuvent se renseigner auprès de Roger Crépin, 94, av de Locarno. 87000 Limoges. ■

LE CRIBLE DE SUNDARAN

J.P. SCHUPPISSER - G. CHARRIÈRE - Lausanne

Un rapport d'expérience menée par «la technique des situations» de nos collègues vaudois Jean-Paul Schuppiesser et Gérard Charrière, l'observateur, dans une classe de 9^e scientifique (3^{ème} -2^{de} chez nous -14-16 ans) en 6 heures de cours en milieu d'année. Une bonne idée pour des tournois ou rallyes plus ouverts.

Point de départ

Distribution aux élèves du stencil, représentant une partie du crible de Sundaran ainsi qu'un stencil avec un extrait de la table de multiplication, en leur proposant à choix, l'étude d'un des tableaux.

Déroulement du travail :

Au départ, le maître avait l'intention de parler de progressions arithmétiques. Les élèves choisissent leur sujet de travail et se regroupent par 2, 3 ou 4, ou restent seuls.

Ils choisissent, en général, le crible de Sundaran.

1^{ère} période (2 leçons)

Réaction immédiate : que doit-on faire ?

Un élève se met à compléter le crible, sans trouver cela intéressant.

Assez rapidement les élèves ont :

- trouvé une façon de décrire un élément de la table en fonction du numéro des lignes et des colonnes
- découvert la façon dont le tableau était construit
- suivi des déplacements sur les diagonales en cherchant des explications
- cherché à définir d'autres tableaux (en changeant le premier nombre par exemple).

Un groupe a travaillé à l'établissement d'une formule à 3 variables, ce qui lui a donné à penser qu'on pourrait représenter les nombres du crible à l'aide d'une surface de l'espace.

Quelques suggestions : (faites par le maître) :

- Constater et justifier les propriétés suivantes :
 - Si un nombre est dans le tableau, le double de ce nombre plus un n'est pas premier.
 - Si un nombre n'est pas dans le tableau, le double de ce nombre plus un est premier.
- Quels sont les nombres appartenant ou non au tableau ?
- Quelle est la fréquence d'apparition des nombres ? Un nombre apparaît-il un nombre précis de fois ?
- Si on relie des nombres égaux, ils appartiennent à un courbe ; est-ce une hyperbole ?

Certains élèves continuent le tableau vers le «haut». D'autres cherchent une formule, mais quand ils en trouvent une, ils la croient bonne et ne la vérifient que très localement.

Un élève isolé, Alexandre, a choisi de travailler sur la table des diviseurs, et s'est posé de «grandes questions». A la fin de la période, il a avoué n'avoir «jamais autant travaillé» !

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	
2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	
3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	
5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	
6	19	32	45	58	71	84	97	110	123	
7	22	37	52	67	82	97	112	127	142	
8	25	42	59	76	93	110	127	144	161	
9	28	47	66	85	104	123	142	161	180	
...										

Crible de Sundaran
(extrait)

Deux premières heures s'achèveront sans bilan collectif. Une heure supplémentaire sera consacrée en classe pour faire le point et se partager les sujets de recherche.

2^{ème} période (2 leçons)

Un groupe d'élèves manque encore d'idées.

Suggestions faites (par le maître)

— Examiner quelques restes de division par un nombre fixe.

— Considérer l'application qui envoie cette grille sur une autre grille.

— Envoyer n sur $2n + 1$.

Les élèves qui avaient des idées continuent leurs travaux.

Certains se lancent même dans la **programmation**.

Le groupe qui s'intéressait à une représentation dans l'espace, découpe maintenant des pailles pour faire cette représentation au moyen d'une planche à trous. Cette activité intéresse beaucoup d'élèves. Certains constatent que les extrémités des pailles appartiennent à des droites ou à des paraboles ; ils en établissent les équations.

La seconde partie de cette période est consacrée à la rédaction des rapports.

Remarques :

— Personne n'a cherché à démontrer les propriétés du crible : les élèves semblent assez peu sensibles aux propriétés des nombres.

— Les élèves ne cherchent pas à justifier leurs affirmations, ni celles du maître.

— Les élèves parviennent à écrire les équations des paraboles et des droites.

— Cette situation correspond bien au programme.

— Cette activité mathématique permet de découvrir certaines lacunes chez les élèves et d'établir un plan de travail pour la suite.

— Certains groupes devant être suivis pas à pas, il est très important d'être deux en classe.

— Chez ces élèves de 9^e C, le maître a pu constater que le mot «preuve» ne signifiait pas grand chose d'autre que «brève vérification».

Conclusion :

Les thèmes abordés sont multiples :

— Découvrir des paraboles, hyperboles, droites dans des situations inhabituelles et en chercher les équations.

— Problèmes d'échelles, d'extension de fonction (passage de \mathbb{N} à \mathbb{R}), apparition de quelques fonctions.

— Représentation d'une surface, progressions arithmétiques, notions sur les entiers (preuve par 9, par 11, classes de restes).

— Rédaction de rapports, problèmes de vocabulaire pour des objets nouveaux.

Le crible de Sundaran et sa représentation spatiale s'est révélé un thème très riche. Il a fait apparaître de nombreuses lacunes ou difficultés tout en motivant l'élève pour la recherche de solutions.

Malheureusement les prolongements n'étaient guère possibles en classe (proximité des examens).

Il serait intéressant de traiter cette situation en début d'année afin d'en exploiter les prolongements par la suite.

Les périodes de 2 heures sont trop longues pour quelques élèves et nous avons noté des moments de lassitude. Cependant, l'intérêt des élèves... et de l'enseignant est incontestable.

A L'OCCASION D'UNE «CLASSE VILLETTE»

Collège de la Grange aux Belles

Que s'est-il passé à la Villette ?

Le professeur d'histoire-géographie:
«Des enfants plus gais, des élèves plus intelligents, des exercices en forme de jeux, des jeux qui avaient l'air d'exercices ; les «enfants-troncs» des salles de classe ont pris des jambes, les muets ont retrouvé la parole et les trop-sages la malice».

Eva, élève de la classe:

«L'activité qui m'a le plus plu, c'étaient les maths car ce n'était pas comme d'habitude : nous ne faisons pas d'opérations».

La classe Villette

Le recrutement du Collège de la Grange aux Belles est très cosmopolite. Dans cette classe de 6^e, les enfants ont de 11 à 15 ans, l'attention des élèves est souvent difficile à maintenir.

«Quand j'ai appris que nous allions à la Villette, j'ai été émerveillée, mais je me demandais pourquoi notre classe, qui est si bruyante et agitée, a été choisie...» lira-t-on dans le journal rédigé à l'issue du séjour.

En liaison avec le service Éducation de la Cité des Sciences, un objectif commun a été défini avant le séjour de cette classe à la Villette :

«Utiliser différents modes de représentations scientifiques du réel.»

Dans ce cadre, chaque enseignant impliqué se trouvait ainsi concerné : mathématiques, histoire géographie, arts plastiques.

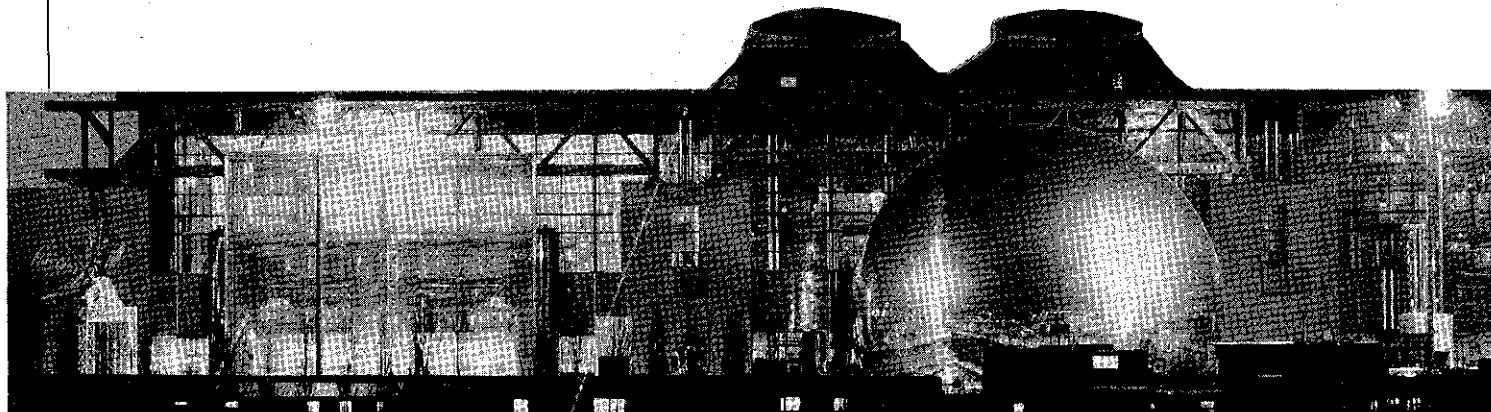
Les enfants sont en effet confrontés, dans l'apprentissage des différentes matières, à des modes de représentation propres au travail scientifique lui-même ou requis par des nécessités de transmission des informations. Or, ces outils sont difficiles d'accès car ils supposent des opérations mentales et en particulier des aptitudes d'abstraction pas toujours acquises. Mais rare est le travail spécifiquement transversal fait à l'école à ce sujet : il est difficilement accessible à l'école primaire étant donné le niveau de développement des élèves, et, au collège, le mode de fonctionnement par discipline ne le permet guère.

Au vu des ressources de la Cité, les enseignants ont choisi les modes de représentation dont ils ont l'usage le plus courant : schémas, plans, cartes, maquettes, tableaux, graphiques.

Des repérages interdisciplinaires

La Cité des Sciences, en effet présente une grande concentration de telles représentations à étudier et aussi de nombreuses occasions d'en élaborer d'autres.

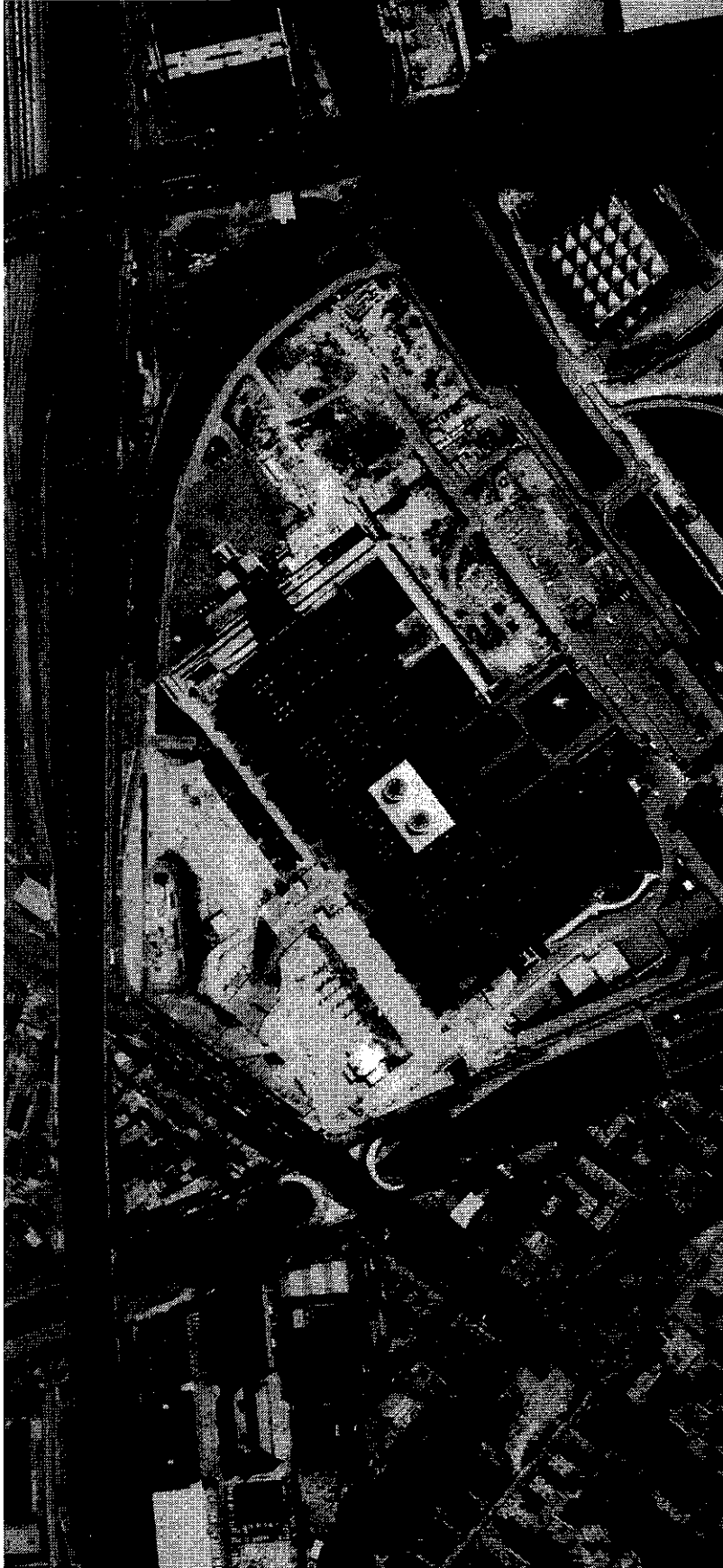
Appréhender les modes de représentation cités suppose un travail sur des notions telles que codage et décodage d'informations mais aussi choix de repères, d'échelles, de systèmes de coordonnées à une, deux et trois dimensions. Avant tout, bien sûr, une occasion d'apprendre à se repérer dans des lieux de dimensions fort différentes. Le fait de venir seuls à la Villette en



métro a constitué une première situation de repérages et même... «une première» pour la plupart :

«J'étais un peu inquiète de prendre le métro seule... écrit Sabrina.

«Au début, mon père, ce qu'il n'aimait pas, c'est que j'y aille seule en métro» dit Radia.



L'itinéraire de métro, la situation du Collège par rapport au 19^e arrondissement de Paris, le site de la Villetta, la Cité des Sciences furent les premiers supports de travail, les uns étudiés préalablement en classe, les autres en début de séjour, en particulier avec le professeur de géographie. Ces activités ont débouché sur la réalisation de plans et maquettes. Nous y reviendrons plus loin.

Les trois niveaux d'exposition permanente de la Cité ont été explorés à l'aide d'un questionnaire-itinéraire supposant, lui aussi, de se repérer dans les étages et selon les points cardinaux. Selon les lieux, il s'agissait de lire cartes, graphiques, diagrammes, de découvrir des maquettes et d'en trouver l'échelle ou bien encore les dimensions de l'objet réel représenté, en connaissant cette fois l'échelle.

Changements d'échelles

L'histoire du quartier, elle, découverte à la «Maison de la Villetta», s'est concrétisée par une large fresque chronologique de près de deux mètres de long : repérage du temps (une dimension sur un axe orienté).

Le souci de travailler alternativement à des représentations en **deux et trois dimensions** a conduit les enseignants à choisir des activités qui s'y prêtaient particulièrement, en l'occurrence des ateliers conçus par les équipes géologie et météorologie de la Cité. Les objets d'étude que la classe rencontrait ainsi, **la Terre** puis l'ensemble **Terre-Atmosphère** étaient sensiblement plus difficiles à imaginer et à représenter que les éléments d'exposition, la Cité ou le site, dont les enfants avaient une perception directe.

En géologie, un atelier a proposé la découverte, par sondages à l'aide de jauges de profondeur, d'une forme complexe à trois dimensions (maquette de fond sous-marin dissimulée aux regards) les élèves ont ensuite tracé sur une feuille (en deux dimensions donc) les isobathes reliant les points d'égale profondeur. Il s'agissait ensuite de représenter le relief à partir des courbes de niveaux obtenues, puis, toujours guidés par l'animateur, de reconstruire ce relief à l'aide d'un puzzle en trois dimensions et de le comparer enfin à la forme initialement dissimulée (cf. page 23).

Cette activité, pourtant difficile, nécessitant de multiples opérations complexes a facilité dans Explora l'interprétation ultérieure de maquettes et cartes géologiques en particulier des dorsales figurant sur ces cartes.

Changement de temps

Le travail en météorologie a constitué une nouvelle occasion de manier des codes. Les

enfants ont traduit en code couleur les données portées sur un fond de carte en code météorologique puis, aidés par un animateur de l'espace météo, ils ont pu lire les informations fournies et les interpréter comme définissant une perturbation caractéristique qu'ils ont alors tracée. A la suite de cet atelier, les élèves ont été capables d'identifier des perturbations sur plusieurs cartes météorologiques professionnelles construites à intervalles de temps réguliers et de suivre ainsi l'évolution du temps.

Par ailleurs, ils ont tenté d'interpréter des images prises par satellites dans le visible puis dans l'infra rouge, de suivre l'évolution des masses nuageuses et d'envisager un début de prévision à court-terme.

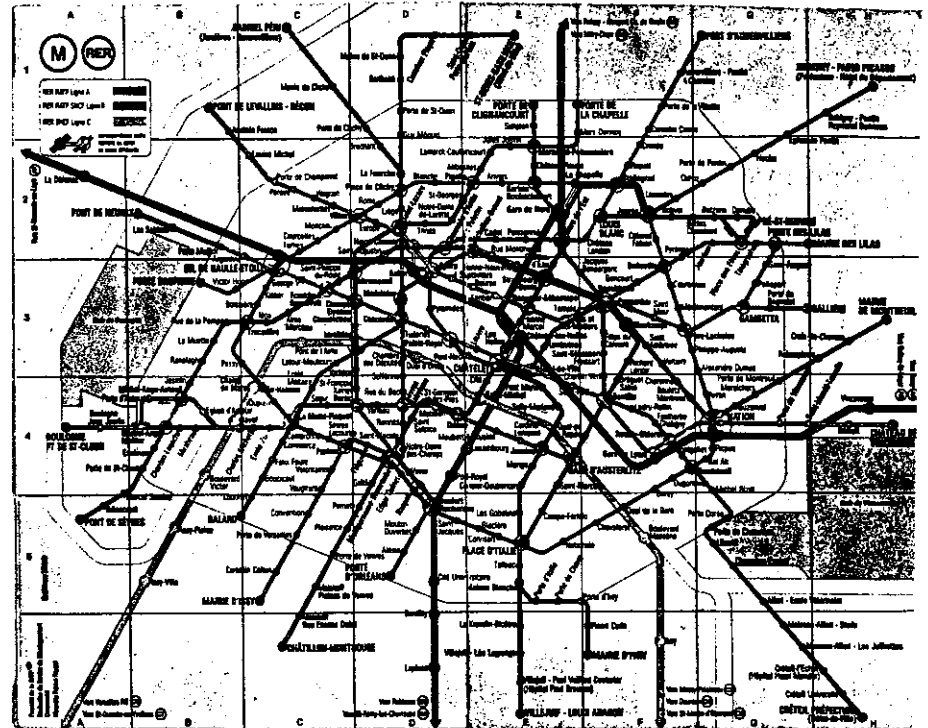
«J'ai aimé connaître le temps qu'il ferait le lendemain, le savoir avant les gens qui l'apprendraient au journal de vingt heures» écrit Isabelle.

Trois activités plus particulièrement mathématiques ont fait l'objet d'une évaluation. Nous les présentons ici de manière plus détaillée.

Le plan du site.

Il faut noter d'abord que la plupart des élèves ne connaissaient pas le Parc de la Villette.

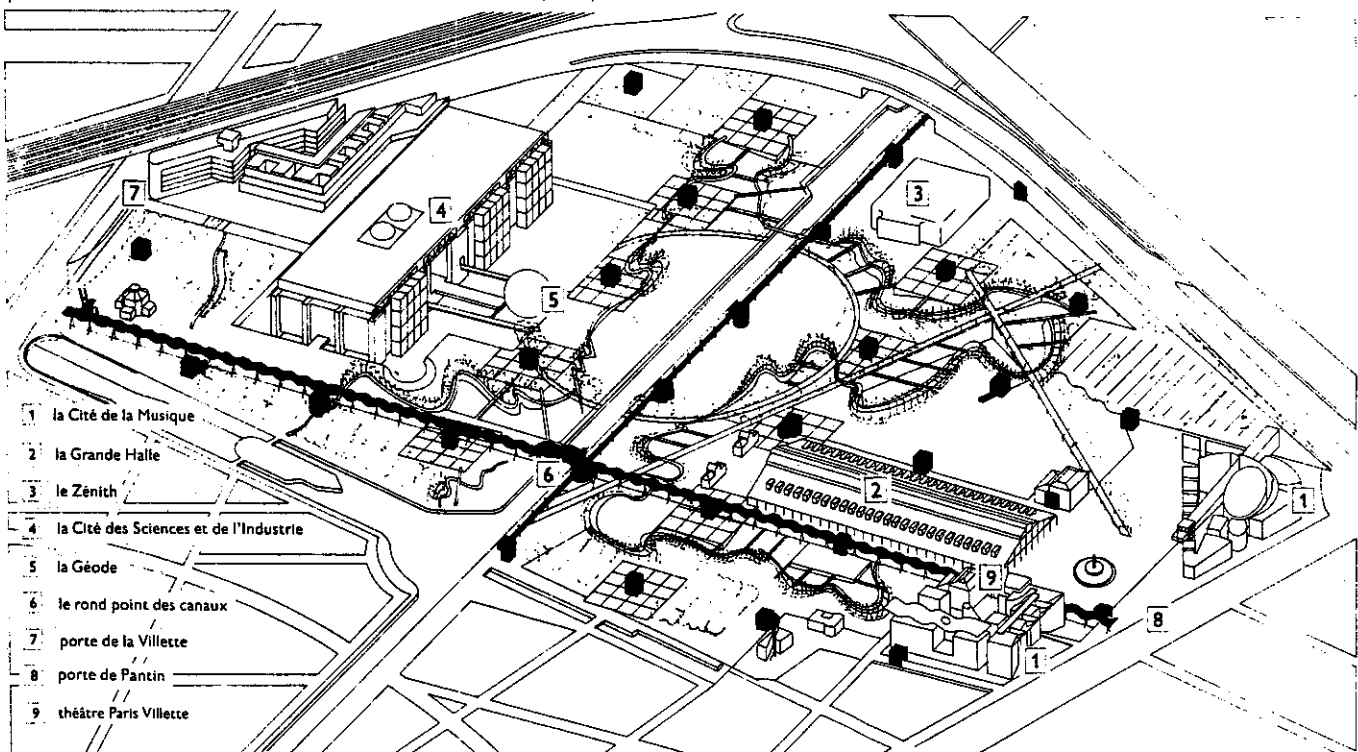
En classe, ils avaient précédemment rencontré la notion d'échelle et l'avaient utilisée sans qu'il y ait eu d'étude systématique. L'activité (en deux demi-journées) a consisté, en circulant à travers les cinquante cinq hectares, à repérer sur le site lui-même différents bâtiments et à les placer approximativement sur le fond de plan, puis, à faire en salle la mise au propre de ce plan



à l'aide de dimensions réelles, de l'échelle et d'une photo aérienne du site.

La première tâche se révéla difficile pour les élèves, mais l'obligation de prendre des repères apparut. Elle accéléra (comme nous l'espérions) la familiarisation avec un espace inconnu qui allait être le lieu de travail de la classe pendant une semaine.

La deuxième tâche, en salle, apporta aux élèves des confirmations : la nécessité d'une bonne compréhension de la notion d'échelle et de la maîtrise des calculs, mais aussi des nouveautés : comment lire une photo aérienne (à une autre échelle que le plan), comment aller et venir de celle-ci au



plan, quelles constructions minimales effectuer pour situer le plus exactement possible les bâtiments.

Cette activité se prolongea par l'élaboration d'une maquette du site au 1/1000. L'intérêt manifesté par les élèves en fin de semaine pour les différentes maquettes exposées au Point Information de la Villette et leur aisance à se repérer dans le Parc et la Cité ont sans doute été les conséquences positives les plus évidentes de cette activité et une actualisation de la maquette réalisée est prévue au fil des aménagements du parc lui-même, les professeurs suivant la classe en 5^e.

Réservoirs et Graphiques.

Peu avant le séjour à la Villette, les élèves avaient vu en classe la notion de coordonnées dans le plan et abordé la lecture de graphiques (sans la notion de fonction).

Dans le secteur « Maths et Univers » d'Explora, une expérience a été l'objet d'un travail particulier : six récipients de formes très différentes se remplissent (suivant le même débit) pendant le même temps. Le jeu consiste à attribuer à chaque forme de récipient la courbe qui lui correspond parmi celles qui sont dessinées sur un panneau annexe. Ces courbes indiquent la hauteur d'eau dans le récipient à chaque instant de l'expérience.

La démarche prévue pour les élèves était la suivante : observer l'expérience, émettre des hypothèses, puis, en salle, construire un graphique correspondant à un tableau de données numériques relatives au remplissage des six récipients (cf. PLOT N° 36 et 37).

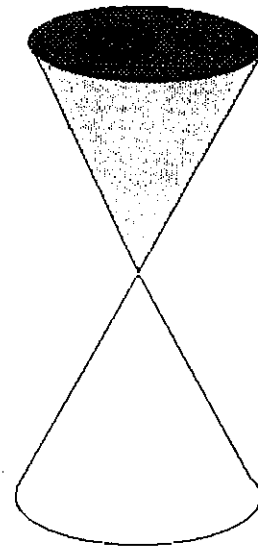
Il devait s'agir ensuite, en observant les variations de la courbe obtenue, de tenter une interprétation et un dessin approximatif du récipient correspondant.

Un retour à la manipulation devait enfin permettre à chacun de vérifier la pertinence des interprétations et de conclure.

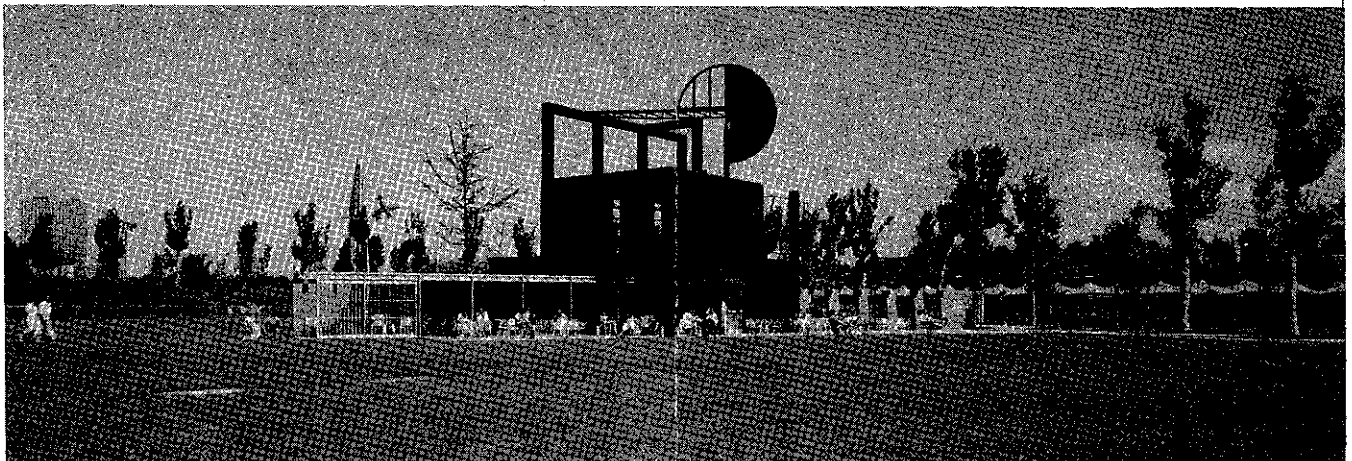
Le déroulement fut en fait différent : d'abord parce que l'expérience n'a pas fonctionné,

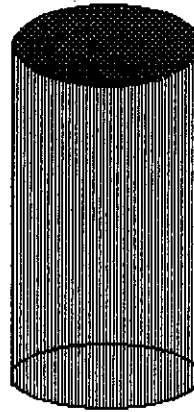
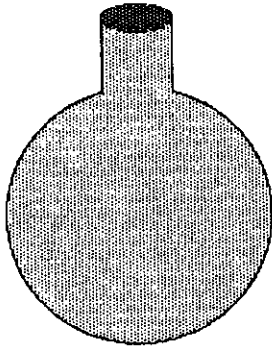
ce qui nous a obligé à la décrire, démarche renforçant le côté abstrait du problème qui n'en avait vraiment pas besoin ! Ensuite parce qu'à ce niveau, l'intuition joue un rôle important et qu'elle gravitait autour de l'idée essentielle de la surface de section du récipient.

L'aide théorique prévue dans ce sens a semblé peu efficace : il s'agissait d'un questionnaire guidant l'interprétation du graphique (à noter que ce graphique avait été dessiné sans difficultés). Ce questionnaire mettait l'accent sur la variation de la hauteur pendant des durées égales (y-a-t-il proportionnalité ? Sinon que se passe-t-il ?). La relation entre la courbe et le fait que le liquide « s'étalait plus ou moins » (selon leur expression) aurait sans doute été plus vite saisie s'il y avait eu au préalable une expérience concrète (manipulation individuelle avec mesures à intervalles réguliers de remplissage ?).



Ces réserves étant faites, il semble qu'à travers un phénomène compris intuitivement, soit passée l'idée qu'une courbe (abstraite) pouvait caractériser un remplissage de récipient (concret).

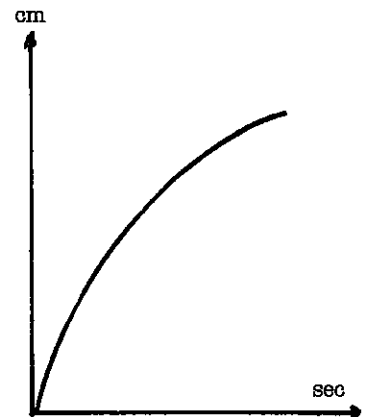




MESURE DE LA HAUTEUR DE LIQUIDE EN FONCTION DU TEMPS

Temps (en secondes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Hauteur de liquide (cm)	0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	26	30

Quel est le récipient correspondant ?

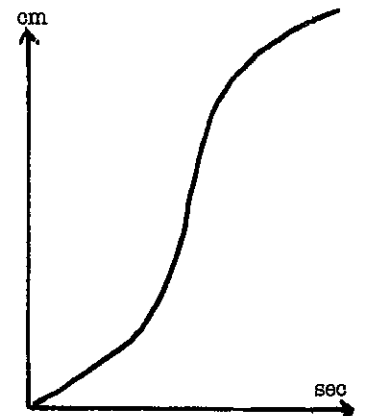


Quel est le récipient ?

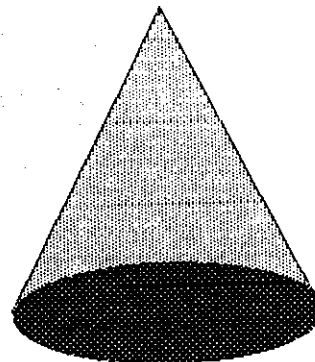
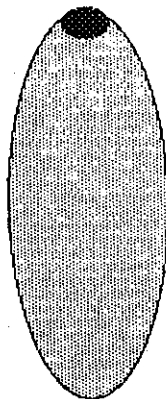
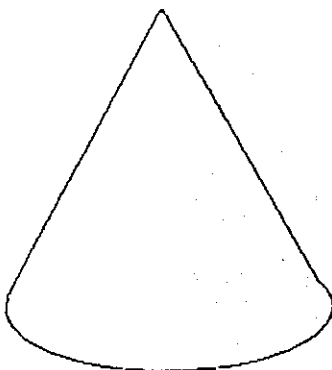
MESURE DE LA HAUTEUR DE LIQUIDE EN FONCTION DU TEMPS

Temps (en secondes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Hauteur de liquide (cm)	0	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	30

Quel est le récipient ?



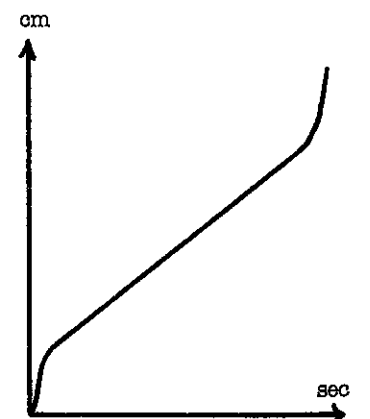
Quel est le récipient ?



MESURE DE LA HAUTEUR DE LIQUIDE EN FONCTION DU TEMPS

Temps (en secondes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Hauteur de liquide (cm)	0	7	10	13	15	17	19	20,5	22	23	24	25	26	27	27,5	28	28,5	29	29,5	29,7	30

Quel est le récipient ?



Quel est le récipient ?

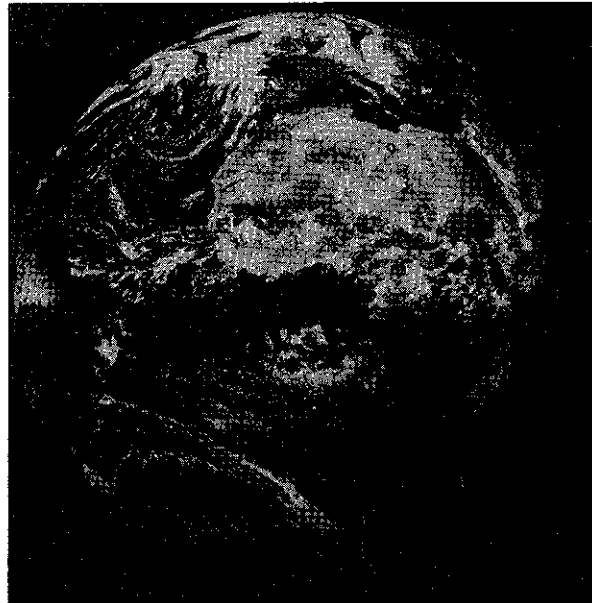
Le jeu des coordonnées

(ou le morpion dans l'espace)

Contrairement aux deux activités précédentes il n'y avait pas eu ici d'approche préalable en classe. Le principe de ce jeu (le plus gros succès d'Explora à un juger par les réactions de nos élèves) est le suivant : un cube est formé de 64 boules disposées régulièrement ($4 \times 4 \times 4$) ; à tour de rôle chacun des deux joueurs allume une boule (chaque joueur à sa couleur) en indiquant ses coordonnées (X, Y, Z) ; le gagnant est le premier qui aligne quatre boules de la même couleur.

L'aspect ludique est ici capital (agrémenté par une superbe présentation) et la progression du joueur non initié y est exemplaire : au début, l'élève tape au hasard et

ne comprend pas le rapport avec la boule qui s'allume ; après divers tâtonnements et discussions, l'idée apparaît qu'une boule est associée à un triplet de nombres précis et qu'il s'agit alors de taper les bonnes coordonnées ; en multipliant les essais (l'objet répond et valide le choix... mais pas toujours comme on s'y attend !), plus du tout au hasard maintenant (il faut gagner !), l'élève découvre le plaisir de réussir à repérer une boule dans cet espace. C'est seulement ensuite qu'intervient l'aspect stratégie du jeu. En fait, dès que les élèves ont joué une fois à ce «morpion», ils y sont revenus inmanquablement, d'abord pour maîtriser l'allumage d'une boule donnée, puis pour profiter du plaisir de cet acquis tout neuf. Il n'y a pas eu par la suite de réinvestissement théorique. L'activité se suffit à elle-même et aborde d'une façon forte et motivante le problème difficile du repérage dans l'espace.



Ont participé à l'encadrement de cette classe-Villette : Annie Xeri, Cité des Sciences, Ourida Djadane, Mireille Louis et Jean-François Lemaistre, Collège de la Grange aux Belles, respectivement professeurs de Physique, Histoire-Géographie, Mathématiques et Arts Plastiques.

BATHYMÉTRIE, QU'EST-CE ?

On appelle Bathymétrie, l'ensemble des techniques permettant de cartographier le fond des mers.

Mais au fait, pourquoi étudie-t-on les fonds marins ?

D'abord parce que les océans recouvrent plus des 2/3 de la planète et constituent donc une réserve de ressources biologiques et minérales considérable qu'il faut connaître pour l'exploiter. Ensuite parce qu'il se passe de formidables déplacements de roches sous l'océan qui provoquent des éruptions volcaniques et des tremblements de terre à la surface des continents, et que pour les prévoir, il faut localiser précisément ces zones sensibles sous la mer.

Enfin n'oublions pas que le commandant d'un paquebot navigant en zone côtière a besoin de cartes pour ne pas s'échouer sur des hauts fonds.

Ce sont d'ailleurs les marins qui les premiers ont effectué des sondages en laissant tout simplement filer une corde lestée à la verticale de leur embarcation.

Les cartes de navigation côtière étaient d'ailleurs établies d'après ces types de sondages il y a encore 50 ans.

On utilise à l'heure actuelle pour les sondages le SONAR qui est un dispositif beaucoup plus moderne bien que son principe soit en théorie très simple puisque c'est celui

de l'écho sonore. A la montagne par exemple, si une personne crie face à une paroi rocheuse, elle peut, dans certaines conditions après quelques secondes entendre l'écho de sa voix, c'est-à-dire l'onde sonore réfléchi par la paroi à la manière des rayons lumineux sur un miroir. Le temps de retour de l'écho dépend de la distance qui sépare cette personne de la paroi, et donc si elle connaît la vitesse de propagation du son dans l'air (340 m/s -1224 km/h) et ce temps de retour, elle peut calculer facilement cette distance.

Si le temps de retour de l'écho est de 4s, l'onde sonore a donc mis moitié moins de temps pour parcourir l'aller simple. C'est-à-dire la distance d. Comme sa vitesse est de 340 m/s elle a donc parcouru en 2s la distance $d = 340 \times 2 = 680$ m.

Dans le cas du sonar, on utilise un dispositif électro-acoustique qui produit soit des sons audibles, soit des ultra-sons qui sont inaudibles pour l'oreille humaine mais que certains animaux comme le dauphin peuvent entendre.

Ces sons sont envoyés vers le fond à la verticale du bateau, ils se propagent à la vitesse de 1487 m/s (5353,2 km/h), sont réfléchis par le relief sous-marin et ils remontent vers un capteur

situé sous le bateau. Là un dispositif analyse le temps de remontée et calcule alors en temps réel la hauteur d'eau sous le bateau.

Sur les navires océanographiques qui effectuent régulièrement des campagnes de sondages, on utilise maintenant un dispositif encore plus perfectionné : le SEABEAM (faisceau sous-marin).

Ce système permet de sonder non plus en un seul point sous la trajectoire du bateau, mais en un ensemble de points de part et d'autre de celle-ci. La largeur de ce couloir est importante, surtout pour les fonds de grande profondeur puisqu'elle atteint les 3/4 de celle-ci, soit 4,5 km pour des fonds de 6 km.

Les informations reçues par les différents capteurs situés sous la coque sont immédiatement traitées par des ordinateurs qui peuvent tracer en temps réel une carte du couloir de sondage comme celle présentée ci-contre.

Maintenant, vous savez comment on étudie le fond des mers et vous êtes capable de lire une carte marine, alors à vous d'éviter les écueils !!!

Problème-choc !

(qui vaut son pesant d'eau)

L'eau recouvre deux tiers de la planète mais quel volume en représente-telle ?

Allez dites un chiffre !
Et l'eau douce dans tout cela ?

Pour chaque point de sondage de la maquette, reportez la couleur de la jauge qui apparaît en surface sur le point de même coordonnées de cette feuille. (Par ex., le point de coordonnées (2,3) est celui qui se trouve à l'intersection de la colonne 2 et de la ligne 3).

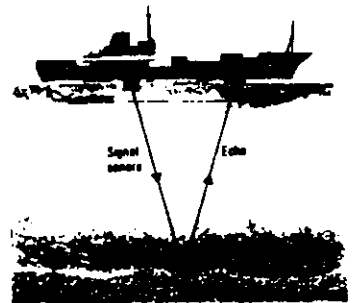
Les couleurs ne représentent pas des profondeurs précises, mais des intervalles de profondeur. Par exemple si le résultat d'un sondage en un point est la couleur verte. Cela veut dire que ce point est situé entre 3000 et 4000 m de profondeur.

Une fois tous les points coloriés, il faut tracer les courbes correspondant cette fois aux profondeurs précises - 1000, - 2000, - 3000, - 4000 et - 5000. Ces courbes s'appellent des isobathes (points de même profondeur). Pour comprendre comment on trace ces courbes, regardez le schéma ci-dessous.

Un point profond de 3000 m se situe bien sûr à la limite des intervalles - 4000/- 3000 (vert) et - 3000/- 2000 (brun). La courbe - 3000 m, passera donc entre un point brun, à égale distance de chacun d'eux. C'est le cas le plus facile, mais parfois il arrive que les couleurs de deux points situés l'un à côté de l'autre ne soient pas des couleurs superposées sur la jauge, par ex. vert (- 4000/- 3000) et bleu (- 2000/- 1000). Dans ce cas, les deux courbes - 3000 et - 2000 passent entre ces deux points.

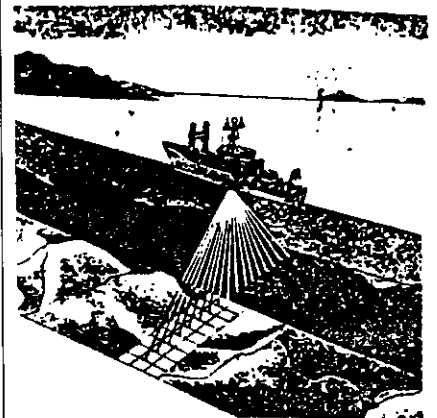
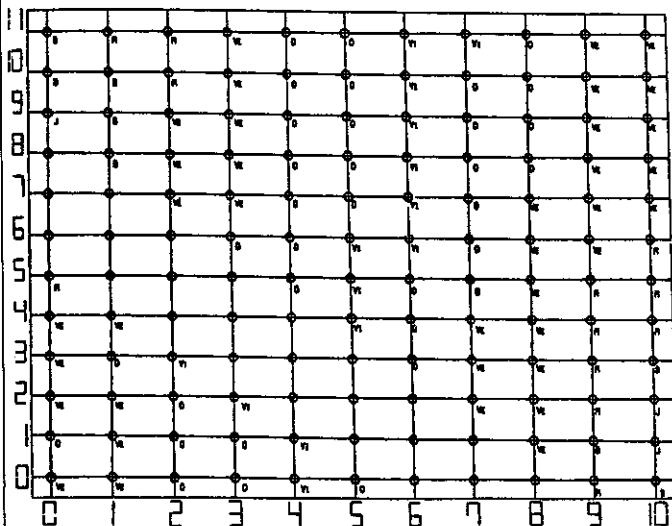


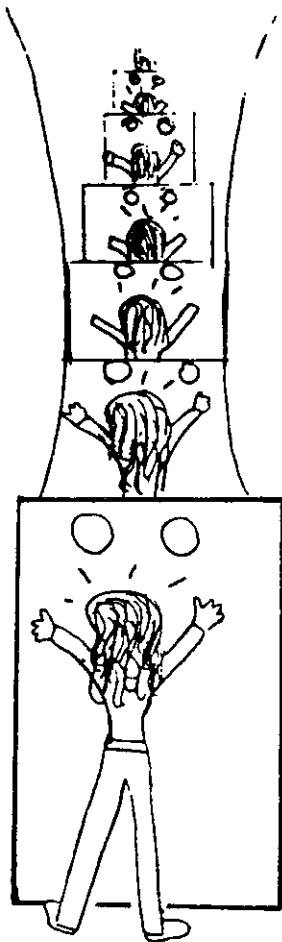
Si le temps de retour de l'écho est de 4s., l'onde sonore a donc mis moitié moins de temps pour parcourir l'aller simple. C'est à dire la distance d. Comme sa vitesse est de 340 m/s elle a donc parcouru en 2s la distance $d = 340 \times 2 = 680$ m.



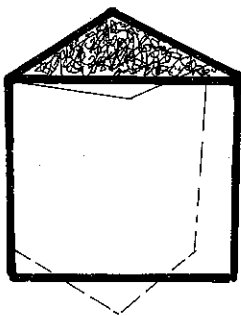
la Villette

ATELIER BATHYMETRIE





«La glace des mille gens»



24



La glace magique

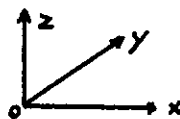
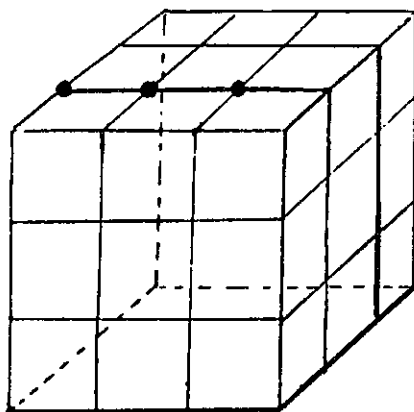
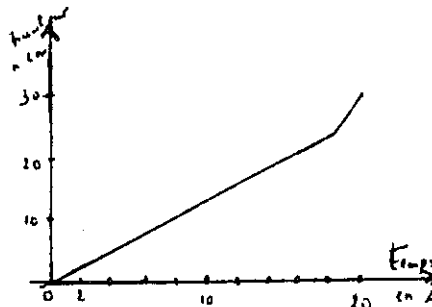
En conclusion, remarquons que le test proposé en classe a confirmé pour l'ensemble des élèves une bonne appropriation des notions abordées, avec des réserves pour le problème des récipients, ce qui confirme que la prudence reste de mise quant à l'abstraction, au niveau de la 6^e.

Petite évaluation

Outre ces activités, «la lumière démasquée», exposition temporaire, devait être l'occasion de recherche de schémas et schématisations d'expériences.

L'aspect à la fois ludique et particulièrement interactif de celle-ci d'une part «... il y avait plein de choses à toucher...», le manque de temps d'autre part pour y retravailler après un temps nécessaire d'approche libre des manipulations, n'ont guère permis à cette partie d'être menée à bien. Ce qui n'a pas exclu les dessins pour le journal !

- sur le plan à l'échelle 1/5000, la Halle aux Moutons mesure 3,9 cm de long. Quelle est sa longueur réelle ?
- Voici la courbe de remplissage d'un récipient. Quelle est sa forme approximative ?



- **Le morpion dans l'espace :**
 — que dois-tu jouer pour empêcher ton camarade de gagner ?
 $X =$, $Y =$, $Z =$
 — peux-tu dessiner la boule codée par :
 $X = 3$, $Y = 0$, $Z = 2$ ■

Les classes-ville

La classe dont le travail est ici décrit, classe de 6^e d'un collège du 10^e arrondissement de Paris, est venue une semaine à la Cité des Sciences et de l'Industrie en classe Vilette, début juin.

Dès son ouverture, la Cité des Sciences, appuyée en ceci par l'Éducation Nationale, a mis sur pied des séjours d'activités scientifiques et technologiques pour des classes de tous niveaux : les «Classes Vilette».

Ces séjours, d'une durée maximum de deux semaines, s'articulent sur la réalisation d'un projet pédagogique élaboré conjointement par les enseignants de chaque classe et le Service Éducation de la Cité.

La mise en œuvre de ce projet à la C.S.I. s'appuie sur les divers services, ressources et éléments d'exposition de la Cité.

Au cours de l'année 1986-87 se sont déroulées 90 classes Vilette, classes différant les unes des autres tant par leur niveau que par leur thème ou encore les objectifs visés.

Le professeur de mathématiques de cette classe de 6^e a participé préalablement à une session* de formation de 4 jours organisée à la Cité pour les enseignants des Classes Vilette afin de leur permettre d'élaborer un projet qui puisse s'appuyer efficacement sur les ressources de la Cité.

Ce professeur a ensuite constitué une équipe avec des collègues d'histoire-géographie et d'arts plastiques, leur souci étant de proposer aux élèves un nouveau cadre de travail et, en conséquence, de nouvelles activités dans leur discipline mais aussi en interdisciplinarité.

* prochaines sessions :

Renseignements :
 Cité des Sciences et de l'Industrie
 Service Éducation
 16.1.40.05.74.11.

GRAPHES ET STRATÉGIES

René GAUTHIER - Lyon

Le schéma d'un réseau électrique, un arbre généalogique, le croquis indiquant les liaisons chimiques des atomes d'une molécule complexe, le plan du métro, un réseau de communications, les circuits imprimés...

Toutes ces représentations ont des structures semblables. Il y a des points reliés par des lignes. Le mathématicien Dénes König (1930) fit la première étude systématique de telles structures en leur donnant le nom de *graphes*.



Aujourd'hui la théorie des graphes est en pleine évolution, considérée comme une partie de la topologie, (en ce sens que ni l'orientation, ni les formes et les dimensions de l'objet ne sont prises en considération), elle imprègne cependant largement la théorie des ensembles, la combinatoire, l'algèbre, la géométrie, la théorie des jeux, la théorie des matrices, la logique...

Un peu de vocabulaire :

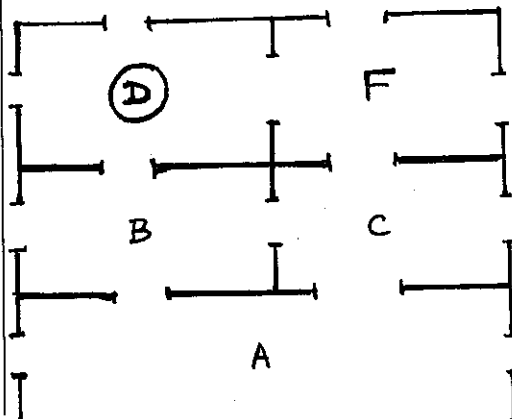
Un graphe est un ensemble de points appelés sommets reliés par des lignes appelées arêtes.

Le degré d'un sommet est le nombre des arêtes qui aboutissent à ce sommet.

L'ordre d'un graphe est le nombre des sommets.

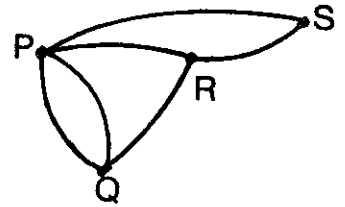
Le veilleur de nuit

Le veilleur de nuit, qui dispose d'une couchette en D, doit visiter toutes les salles et vérifier chaque porte, une fois et une seule, puis revenir en D. Est-ce possible... ?



Le graphe de la figure représente les liaisons entre les pièces (sommets du graphe) reliées par des portes (arcs du graphe). Le point E représente l'extérieur, qui est lui aussi un point de passage. Le problème est donc, partant de D, de suivre une seule fois chaque arête et de revenir en D.

Un tel circuit est un **circuit eulérien**, du nom de Euler, qui utilisa cette représentation pour résoudre le problème des ponts de Königsberg.



Le sommet S est de degré 2
Le sommet R est de degré 3
Le sommet Q est de degré 3
Le sommet P est de degré 4

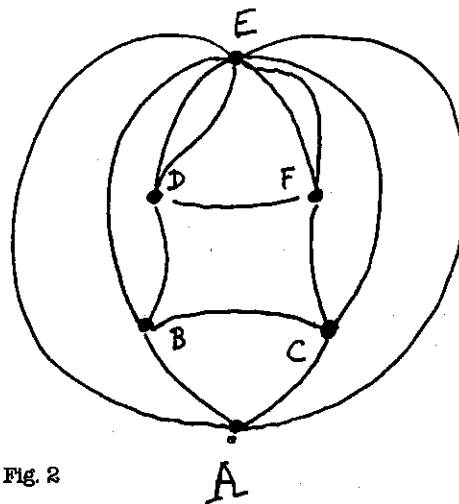


Fig. 2

Pour un circuit eulérien, un point de passage est de degré pair : autant d'arcs d'arrivée que d'arcs de départ. Le veilleur de nuit part de D et revient en D : D doit être lui aussi de degré pair...

Un graphe comporte un circuit eulérien complet si tous les sommets sont de degré pair. Il vous est facile de vérifier que c'est le cas du graphe de notre veilleur de nuit... Il vous reste à tracer un itinéraire, c'est à dire un circuit. Armez-vous d'un crayon de couleur et essayez !

Représentation et considération de la parité des sommets donnent très simplement la réponse pour ce problème de cheminement. Il va de soi que la méthode prend tout son intérêt sur des graphes plus complexes concernant des circuits imprimés, des réseaux d'autoroute, des programmes informatiques...

Dominos

Comme chacun sait, un domino est fabriqué en juxtaposant deux nombres pris parmi les nombres de 0 à 6. Il y a 7 doubles et 21 (soit C^2_7) dominos non doubles, autrement dit 28 dominos dans un jeu normal. Excluons les doubles qui n'apportent aucune difficulté supplémentaire à notre problème. Avec tous ceux qui restent, peut-on former une chaîne **fermée** complète en les juxtaposant comme le font les joueurs de domino ? Est-ce possible ?

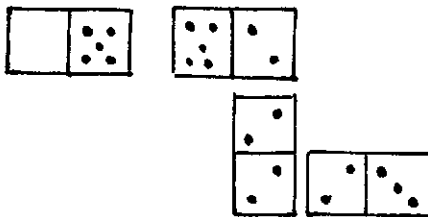


Fig. 3

Le graphe de cette figure a 7 sommets et représente les 21 dominos non doubles. Chaque arc (21) représente un domino. Former une chaîne fermée complète, c'est partir d'un sommet et y revenir après avoir parcouru chacun des arcs **une fois et une seule** : encore un circuit eulérien à trouver. Tous les sommets sont de degré 6 : c'est donc tout à fait possible, et si l'on garde les doubles cela ne change rien à l'affaire. Par contre, si vous enlevez un domino (non double...) deux sommets changent de parité (un arc de moins) et le circuit eulérien n'existe plus : vous pouvez seulement suivre une chaîne eulérienne non fermée en partant de l'un des deux sommets impairs pour finir votre trajet avec l'autre.

Le graphe des 21 dominos est un graphe complet d'ordre 7. Et si vous fabriquez des dominos avec les nombres 0 à p, vous obtenez un graphe complet d'ordre (p + 1) sur lequel chaque sommet est de degré p. Selon la parité de p vous pourrez ou non fabriquer un circuit eulérien fermé.

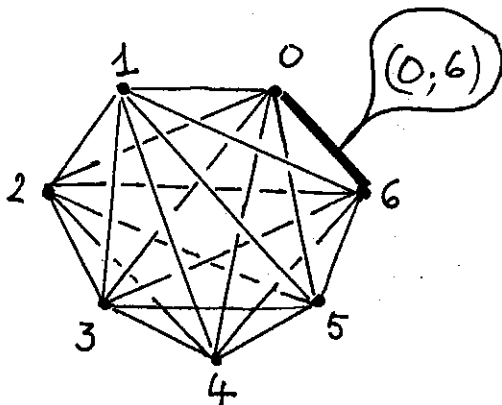


Fig. 4

Les nombres dans des cases

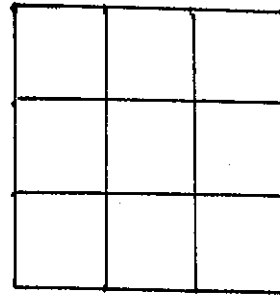


Fig. 5

Proposons-nous de placer les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases du carré ci-contre avec la règle suivante : la somme $x + y$ de deux nombres de deux cases ayant un côté commun doit être un nombre premier. Est-ce possible ?

A vos ordinateurs ! Un graphe tout simple peut cependant nous venir en aide et remplacer l'ordinateur.

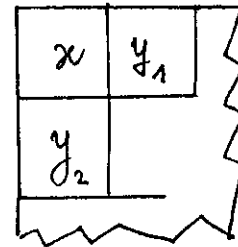


Fig. 6

Aux sommets, les nombres de 1 à 9. Un arc entre x et y traduit « $x + y$ est premier ». Le degré d'un sommet indique le nombre d'associations autorisées pour un nombre de la liste.

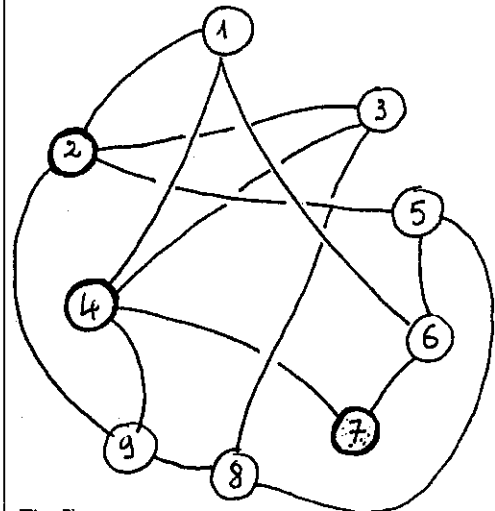


Fig. 7

Il est clair que, au **centre** du carré, il nous faut placer un nombre ayant quatre liaisons : un sommet de degré 4 ! Seuls 2 et 4 conviennent pour le centre.

Par contre, 7 est le seul sommet de degré 2 : le nombre 7 doit être dans un angle. La disposition (I) impose de placer dans la case \boxtimes : 1-3-5 ou 9 associés à 2
4-6 associés à 7.

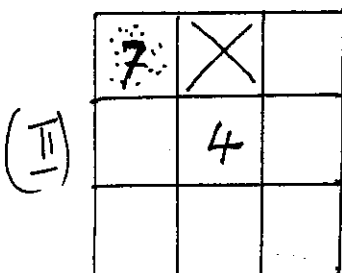
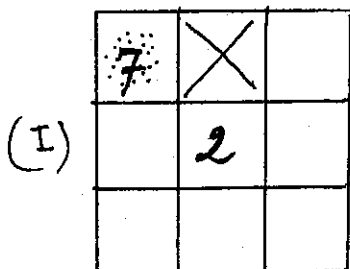


Fig. 8

Ce qui est incompatible. Vérifiez également l'incompatibilité pour la disposition (II). Notre problème est donc sans solution.

Question : Posez-vous le même problème avec les nombres de 1 à 16 à placer dans un carré 4 X 4, puis les nombres 1 à 25 dans un carré 5 X 5, avec la même règle : «x + y premier»

C'est déjà moins simple ! Voir en fin d'article des carrés 4 sur 4 solutions. Y en a-t-il d'autres ?

Le batelier

On connaît l'histoire de ce batelier (B) qui doit faire traverser la rivière à une chèvre (C), un loup (L) et un chou (X), sachant qu'il ne doit jamais laisser seuls, en tête à tête sur une même rive, la chèvre et le chou, la chèvre et le loup pour des raisons faciles à comprendre. Par ailleurs, son bateau est tellement petit, qu'il ne peut transporter qu'un seul passager à la fois, le chou étant considéré comme un passager à part entière.

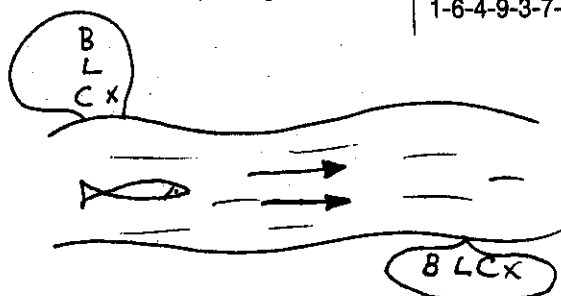


Fig. 9

Examinons toutes les situations autorisées sur l'une et l'autre rive compte tenu des contraintes imposées à notre transporteur. Elles sont (voir figure) au nombre de 10. Si, au départ, BLCX sont sur la rive gauche, il s'agit donc de passer de 1 à 10 avec, comme intermédiaire, des états autorisés.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B C L X	B C X	B C L	B L X	BC	L X	C	X L	L	0
0	L	X	C	L X	B C	B L X	B L C	B C X	B C L X

← Rive gauche
← Rive droite

Fig. 10

Le graphe a été constitué de la façon suivante :

10 sommets (les 10 états autorisés)

les arcs (les transports possibles).

On peut par exemple passer de 1 à 6 mais pas de 1 à 7.

Il y a quatre types de transport : B traverse seul, ou bien il traverse avec l'un des trois passagers.

D'où les lignes différentes indiquant ces transports possibles. Il devient alors évident que, partant de 1, on doit déjà passer par 6 puis 4 ; et pour parvenir à 10, il faut être passé en 5 et 7.

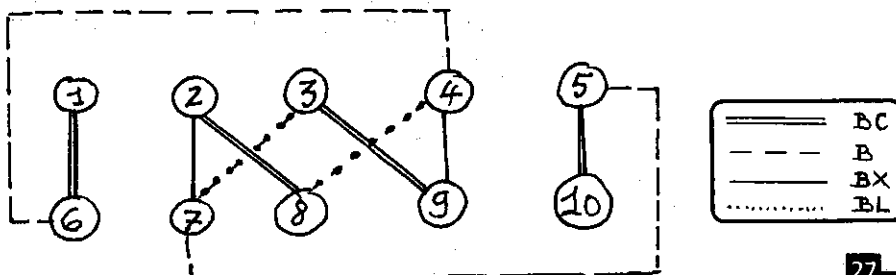


Fig. 11

Il nous reste à relier 4 à 7 ; deux possibilités : soit 4-8-2-7 soit 4-9-3-7.

Et voilà donc les deux et deux seules stratégies qui s'offrent à notre batelier :

1-6-4-8-2-7-5-10

1-6-4-9-3-7-5-10

William Hamilton (1805-1865)



Hamilton était irlandais, contemporain de Victor Hugo. Autodidacte, on raconte qu'il lisait le latin, le grec et l'hébreu à 5 ans et qu'à 20 ans, il avait assimilé les travaux de Newton et Lagrange.

Ses premiers travaux furent consacrés à l'optique (théorie des systèmes de rayons) et à l'astronomie. Très prolifique, il a laissé à sa mort en 1865, une soixantaine d'ouvrages de physique et de mathématiques sous un certain nombre d'assiettes et de bouteilles vides, car on raconte aussi qu'entre deux recherches il aimait volontiers le bon vin.

Il n'a pas étudié la théorie des graphes, mais s'est servi des graphes pour résoudre des problèmes.

Le voyageur de commerce

Il doit visiter 20 villes réparties à la surface du globe. Chacune est reliée à trois autres par une route. Quel itinéraire suivre pour visiter toutes ces villes, sans repasser deux fois dans la même... ?

Hamilton imagina de placer ces villes aux sommets d'un dodécaèdre régulier. Les faces sont des pentagones. Chaque sommet est relié à trois autres. Et comme il n'est pas facile de «voir» sur un dodécaèdre, c'est là qu'intervient le graphe à 20 sommets.

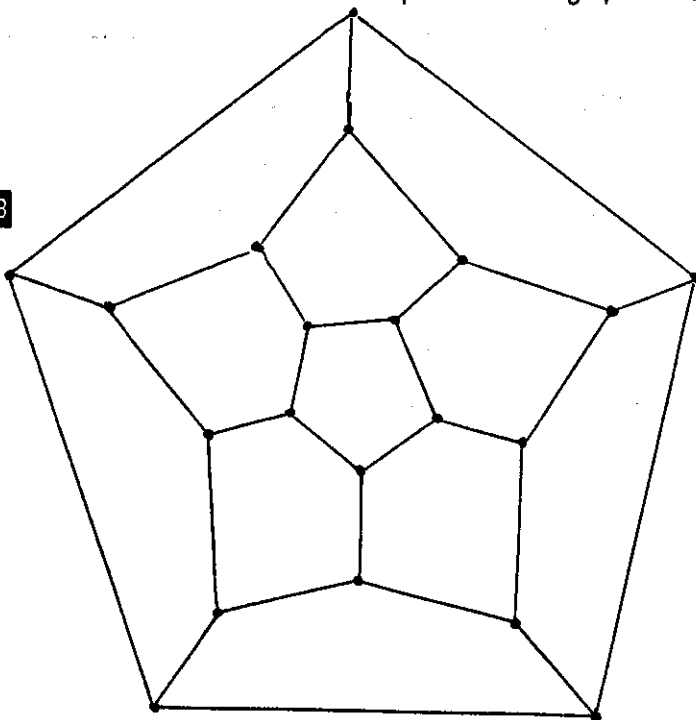


Fig. 12

Il s'agit alors pour notre voyageur de commerce d'imaginer un chemin passant une fois et une seule en chacun des 20 sommets : c'est en souvenir de ce problème qu'un tel chemin est appelé **chemin hamiltonien** d'un graphe.

L'idée géniale de Hamilton fut de remarquer que l'on peut **coder** un cheminement. Lorsqu'il arrive à un sommet, le voyageur a deux choix pour poursuivre : droite (d) ou gauche (g) et ce codage permet de donner au problème un traitement quasi algébrique. Partant de A, lorsqu'il arrive en B, le chemin dd (ou d²) l'amène en G : (ABFG). De même, le chemin gdddg l'amène aussi de A en G : (ABCDEFG)

Ce qu'il écrit d² = gd³g.

On a aussi : g² = dg³d.

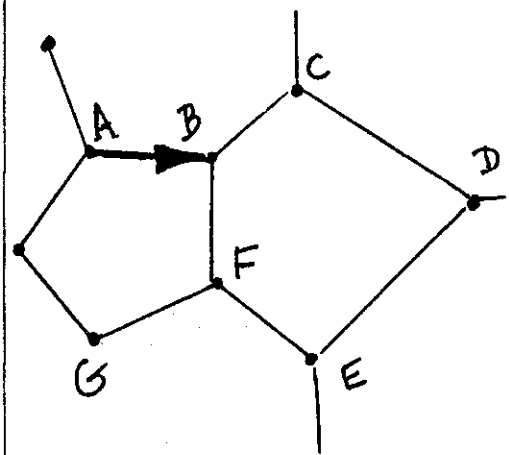


Fig. 15

Par ailleurs, d⁵ ramène toujours au point de départ ce qui est vrai aussi pour g⁵ d'ailleurs. Partant du codage d⁵, on remplacera aussi souvent que possible d² par gd³g. Jusqu'à obtenir une chaîne de 20 caractères et l'on aura une solution pour le circuit hamiltonien partant de A et revenant en A.

$$d^5 = d^2 d^2 d = gd^3g gd^3gd \text{ (longueur 11)}$$

$$d^5 = gd gd^3ggg g^3gdgd \text{ (longueur 17)}$$

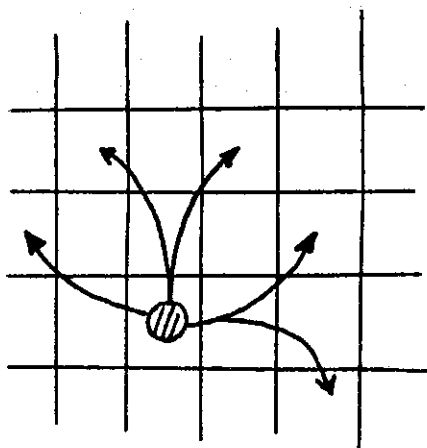
$$d^5 = gdgdgd^3ggggd^3gdgd \text{ (longueur 20)}$$

$$d^5 = gdgdgd^3g^3gdgd.$$

Voilà donc un codage pour un circuit Hamiltonien en choisissant, au départ, un sommet quelconque du graphe. On pourra contrôler que si l'on impose les trois premières villes, il y a 10 circuits possibles ; si l'on impose les quatre premières, il reste encore 6 circuits ; mais il n'en reste que 2 si l'on impose les cinq premières villes de départ.

Cavalier d'Euler

Un autre vieux problème de recherche de chemin hamiltonien est celui du **Cavalier d'Euler** sur un échiquier.



Un cavalier, placé sur une case du jeu d'échecs, peut atteindre un certain nombre de cases : au maximum 8.

Question : Comment représenter cela par un graphe ? (les sommets ? les arcs ?)
 Peut-on, partant d'une case 1, faire passer le cavalier une seule fois sur chacune des 63 autres cases et revenir en 1...
 Encore le circuit hamiltonien...

Essayez donc ! mais voici une réponse, qu'il vous reste à déchiffrer ; tentez d'en trouver d'autres, peut-être à l'aide de votre ordinateur.

18	43	58	3	56	45	6	31
59	2	19	44	5	30	47	54
42	17	4	57	46	55	32	7
1	60	41	20	29	8	53	48
40	21	16	61	52	33	28	9
15	64	23	38	25	12	49	34
22	39	62	13	36	51	10	27
63	14	37	24	11	26	35	50

Et avec un échiquier 3 × 3 ? 4 × 4 ? 5 × 5 ?...

6	11	8	15
5	2	9	14
12	1	4	3
7	16	13	10

15	8	5	12
14	9	2	11
3	4	1	6
10	13	16	7

3	8	5	12
14	15	2	11
9	4	1	6
10	7	16	13

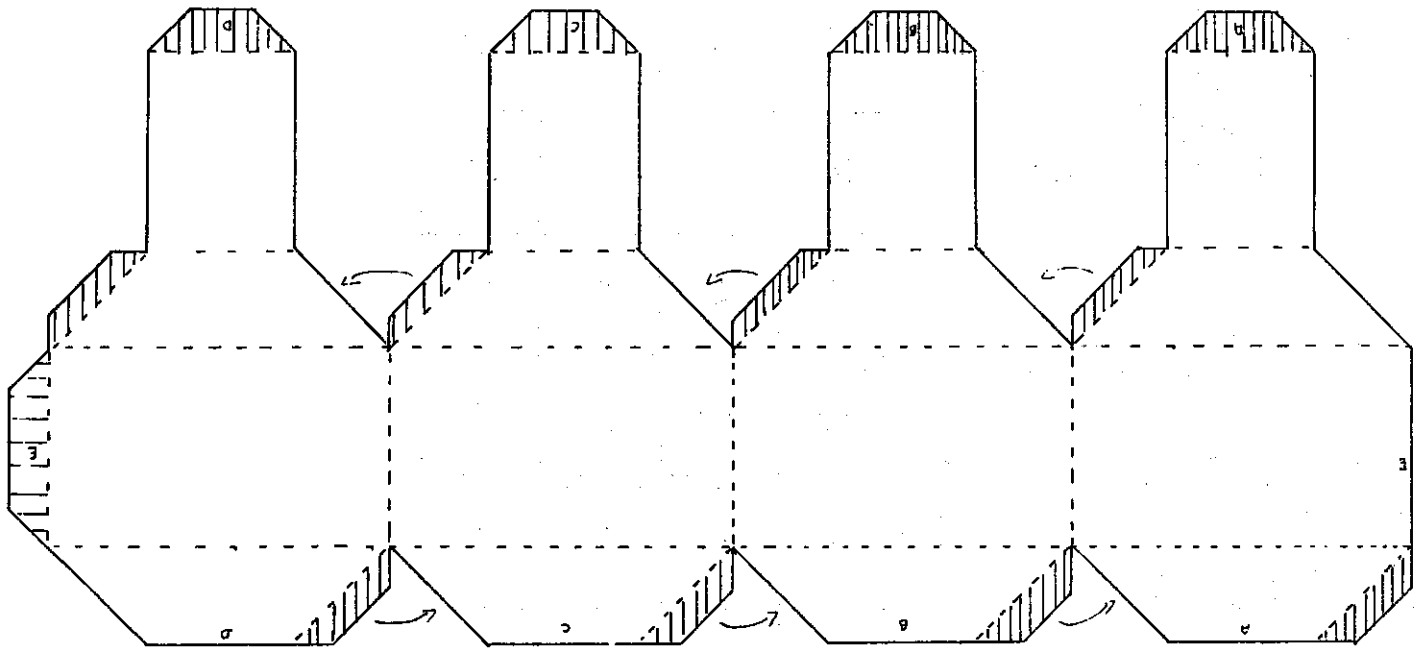
13	10	7	12
16	1	6	11
3	2	5	8
4	9	14	15

«x + y premier»

Les sept couleurs

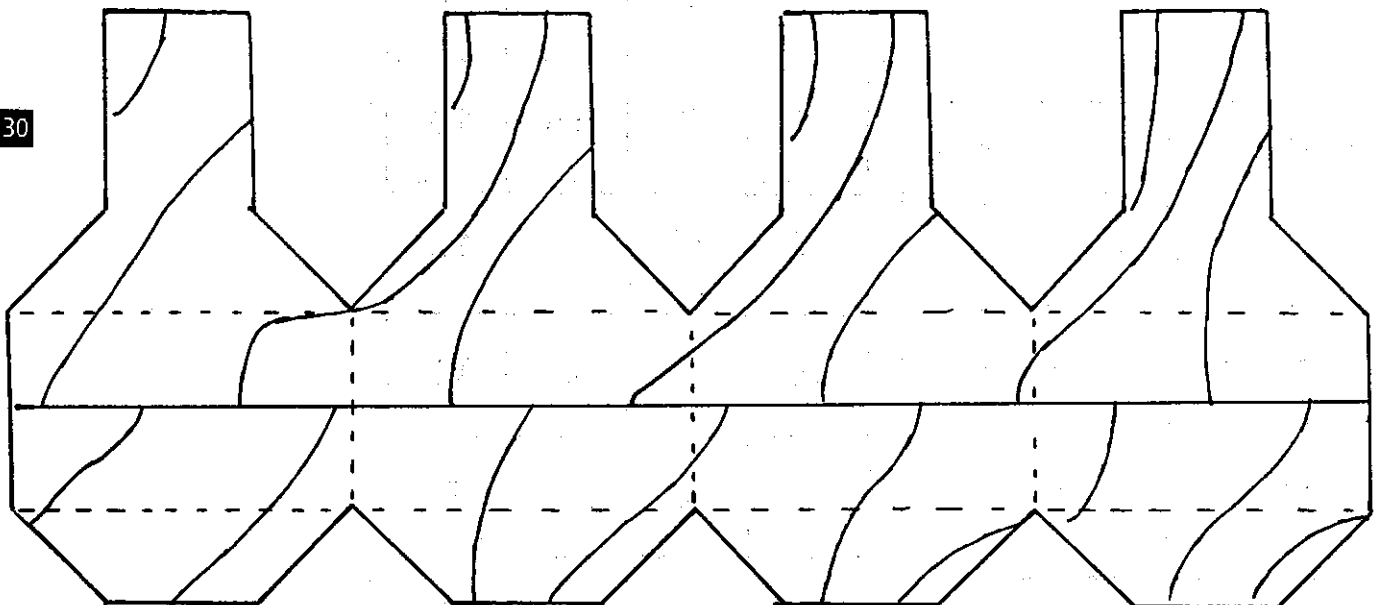
Faites une photocopie agrandie à l'échelle $\sqrt{2}$ (ou 2) de ce tore...polyédrique. Découpez-le et collez les languettes comme indiqué. Dessinez les frontières comme l'indique le dessin n° 2. Combien délimitent-elles de pays ? Combien faut-il de couleurs au minimum pour les colorier suivant la règle bien connue ?

Dessin n° 1



- pliez
- coupez
- //// collez.

Dessin n° 2



LES QUATRE COULEURS

Jean-François CANET - Avignon



Le problème

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte de géographie de façon à ce que deux pays voisins ne soient jamais de la même couleur ?

● Deux pays sont voisins lorsqu'ils ont une frontière commune (une ligne).

On écarte ainsi la disposition en parts de gâteau où il faut autant de couleurs que de pays.

● Chaque pays est en un seul morceau.

On écarte donc les enclaves.

L'histoire du théorème

Le problème est connu, semble-t-il, depuis fort longtemps. Il a été formulé en 1852 par Francis Guthrie dans une lettre à son frère Frédéric qui était élève du mathématicien De Morgan. Le problème est présenté à la société mathématique de Londres par Cayley en 1878.

Un avocat, Alfred Bray Kempe, membre de l'honorable société, propose une solution moins d'un an plus tard.

En 1890, Heawood établit l'inexactitude de la solution de Kempe. Il généralise le problème à des cartes dessinées sur des surfaces plus compliquées (sur des tores par exemple) et démontre que pour colorier une carte dessinée sur une surface autre que la sphère ou le plan il faut au plus $H(C)$ couleurs avec :

$$H(C) = E \left[(7 + \sqrt{49 - 24C}) / 2 \right]$$

où : E désigne la fonction partie entière et

C la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface ($C = 0$ pour un tore à un trou ;

$C = 2$ pour le plan ou la sphère...).

Il pensait que $H(C)$ était le nombre exact de couleurs nécessaires.

Cette conjecture est vraie pour le tore à un trou, fautive pour la bouteille de Klein (Problème résolu en 1968 par Ringel et Youngs).

Depuis Kempe et Heawood, nombreux furent les mathématiciens amateurs ou professionnels qui s'intéressèrent au théorème et plusieurs résultats

furent obtenus (on démontrait successivement que le théorème était vrai pour des cartes comptant moins de 22 pays, puis 36,...).

Enfin en 1976 Kenneth Appel et Wolfgang Haken démontrent à l'aide d'ordinateurs le théorème des quatre couleurs.

La démonstration

Kempe a essayé de démontrer le théorème par l'absurde. Il définit une carte normale comme étant une carte dans laquelle :

● aucun pays n'entoure entièrement d'autres pays,

● en aucun point, plus de trois pays se rencontrent.

Il établit que, s'il existe une carte pentachromatique (c'est-à-dire nécessitant cinq couleurs pour être coloriée), alors il existe une carte normale pentachromatique.

Dorénavant toutes les recherches seront faites sur des cartes normales.

Kempe établit alors que sur une carte normale il existe au moins un pays ayant moins de six voisins. Ce qui revient à dire qu'une des quatre configurations :

pays avec deux voisins,

pays avec trois voisins,

pays avec quatre voisins,

pays avec cinq voisins

est inévitable.

Pour obtenir une contradiction, Kempe essaya de démontrer qu'une carte pentachromatique minimale (c'est-à-dire ayant un nombre minimum de pays) ne pouvait contenir aucune des quatre configurations.

Sa démonstration était correcte pour les trois premières configurations mais inexacte pour la quatrième.

Appel et Haken reprirent l'idée de la démonstration, mais en étudiant un système d'environ 1500 configurations inévitables. Le travail nécessita environ 1200 heures de calcul sur trois puissants ordinateurs de l'université de l'Illinois.

En fait dans l'étude, chaque pays est remplacé par un point (sa capitale). Deux pays voisins ont leur capitale reliée par un chemin. La carte devient alors un graphe. Colorier la carte revient à colorier chaque sommet du graphe. Une carte normale correspond à un graphe dont chaque face est un triangle.

Pour en savoir plus...

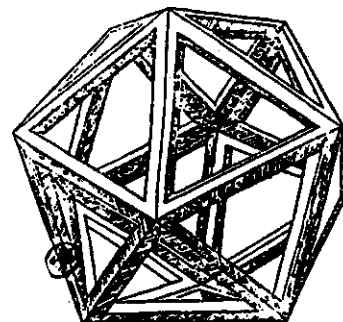
● Articles d'Appel et Haken : «La solution du problème des quatre couleurs» in : POUR LA SCIENCE n° 2 déc. 77.

repris dans :

● «Les progrès des mathématiques» bibliothèque POUR LA SCIENCE diffusion BELIN.

● nouvel article in «Mathematical Intelligencer» 1987.

● Le théorème des 4 couleurs. Numéro spécial de la Revue du Palais de la découverte. ▶



Suite p. 32 (2^e colonne)

JEU DE COLORIAGE

Jean LEFORT - Wintzenheim

Algorithme des 6 couleurs

Le Jeu : Choisissez une carte représentant des pays. Deux joueurs jouent, plaçant à tour de rôle une couleur de leur choix sur un pays non encore colorié. Une même couleur ne peut être attribuée à deux pays ayant une frontière commune.

Gagne celui qui, à la fin du jeu, a utilisé le moins de couleurs. Le jeu peut se jouer à un, deux ou trois joueurs. Jean Lefort décrit ci-après l'algorithme qui permet au joueur solitaire ne n'utiliser que six couleurs ;

Théorème : chaque pays a , en moyenne, moins de six pays voisins.

Le nombre V_i de voisins d'un pays est égal au nombre d'arêtes qui bordent ce pays. Comme chaque arête est frontière de deux pays, on a :

$$\sum V_i = 2a,$$

a désignant le nombre total d'arêtes d'où la moyenne $m = 2a/f$

où f désigne le nombre de pays.

La relation d'Euler-Poincaré liant sommets (s), arêtes (a) et faces (f) d'un graphe planaire étant la suivante : $s + f = a + 2$

soit encore $s/a + f/a = 1 + 2/a$

on obtient pour la moyenne des pays frontaliers : (1) $s/a + 2/m = 1 + 2/a$.

Mais en chaque sommet arrivent au moins 3 arêtes et chaque arête joint exactement 2 sommets donc : $3s \leq 2a$

en reportant dans (1), la relation devient : $2/3 + 2/m \geq 1 + 2/a$

d'où, tous calculs faits :

$$m \leq 6 - 36/(a + 6) < 6$$

Dans une carte plane, il y a nécessairement au moins un pays qui a strictement moins de 6 voisins.

Soit P_1 l'un de ces pays, annexons-le à l'un de ses voisins.

Sur la nouvelle carte, à nouveau, un pays a moins de 6 voisins. Notons-le P_2 et annexons-le à l'un de ses voisins, et répétons le processus...

On arrive ainsi à une carte de 5 pays qu'il est facile de colorier avec 5 couleurs.

Puis on rend leur «indépendance» aux pays annexés, dans l'ordre inverse de leur annexion. On utilise la sixième couleur pour le pays P_n . Pour le pays P_{n-1} , comme il a au plus 5 voisins, il y a certainement une couleur libre pour lui parmi les six précédentes... et l'on peut ainsi colorier la carte avec au plus six couleurs différentes !

L'algorithme est polynomial.

Au pire, on parcourt les p pays, puis $p-1$, puis $p-2$,...

On a donc un algorithme en p^2 , p étant le nombre total de pays.

Question subsidiaire : cela permet-il de trouver une stratégie gagnante avec 6 couleurs quand on joue à deux ?

(Suite de la page 31)

Activités 4 couleurs

1. Colorier, avec quatre couleurs seulement, la carte de l'Europe, sans que deux pays voisins soient de la même couleur.

2. Choisir, dans chaque pays, une ville.

Deux villes sont reliées par un chemin lorsque les pays sont voisins. On a ainsi remplacé la carte par un graphe qui est lui aussi colorié.

Peut-on choisir les villes pour que les chemins ne se coupent pas ?

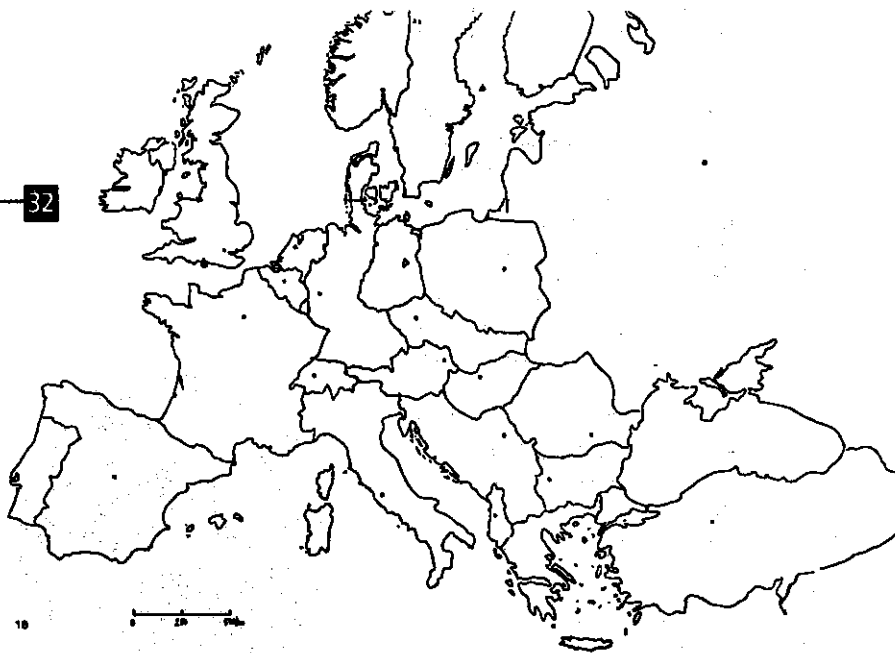
3. Dessiner une carte avec quatre pays dans laquelle :

— chaque pays est en un seul morceau ;

— chaque pays a une frontière commune (non réduite à un point) avec les trois autres.

Remarquez qu'alors un pays est encerclé.

Peut-on rajouter un cinquième pays de façon à ce que chaque pays ait quatre voisins ?



PENTA-DODÉCA

Ginette MISON - Lyon

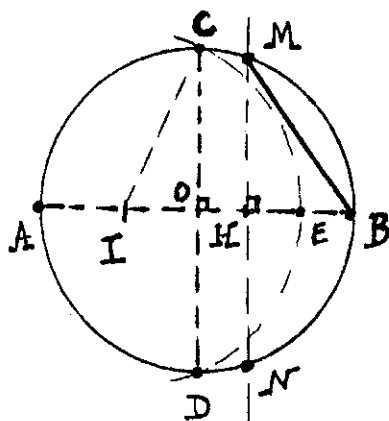
1. CONSTRUIRE

Voici un programme de construction pour des pentagones réguliers. Tracer un cercle (rayon : 5 cm...). Le centre est O.

Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$.

Marquer 1 milieu de $[AO]$: le cercle de centre I et de rayon IC coupe $[OB]$ en E.

La médiatrice de $[OE]$ coupe le cercle initial en M et N.



A partir de B, on peut reporter exactement cinq cordes consécutives égales à MB : En joignant les points consécutifs, vous obtenez un pentagone régulier convexe ; en joignant les points de 2 en 2, vous obtenez un pentagone régulier étoilé (côté $[MN]$).

Faire deux dessins séparés.

On admet cette année que la ligne se ferme en B en traçant cinq cordes. Démonstration à voir en Première.

2. CALCULER DES ANGLES

Pour chacun de ces deux polygones réguliers, calculer l'angle au centre BOM et MON, en degrés et en radians.

Calculer de même les angles ayant pour côtés deux côtés consécutifs du polygone régulier.

3. CALCULER DES LONGUEURS

En utilisant la construction détaillée au (1) et en désignant par R le rayon du cercle de centre O, calculer successivement, en

fonction de R, les longueurs suivantes :

IC ; OE ; OH ; HB ; HM ; MN ; MB

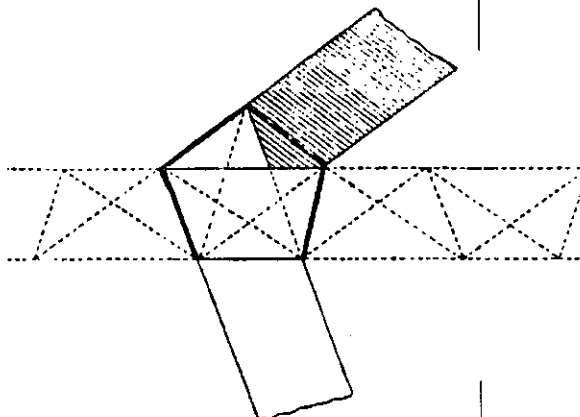
En déduire que le quotient côté de l'étoile/côté du convexe est égal au nombre d'Or :

$(1 + \sqrt{5})/2$.

Vous disposez du théorème de Pythagore

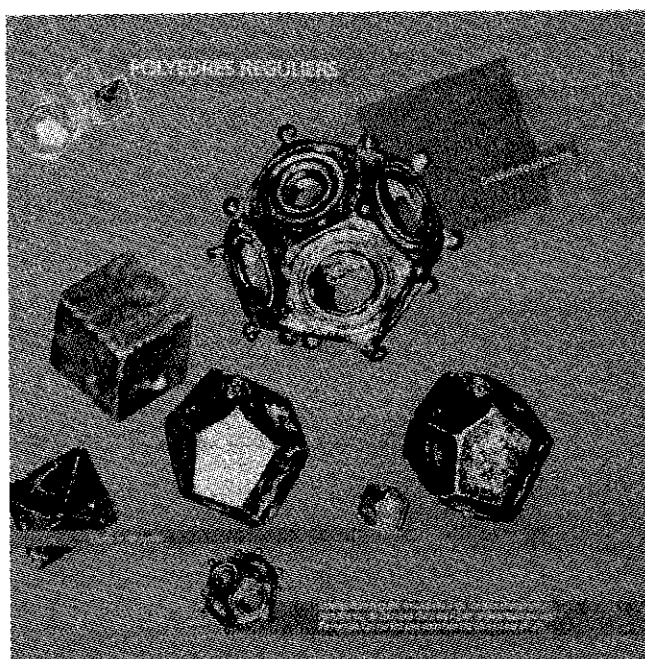
(Rép. : $MB = (R/2) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.)

4. LE NŒUD DE CRAVATE



Découpez avec soin une bande de papier à bords parallèles : faites un nœud simple et assez serré sans froisser le papier.

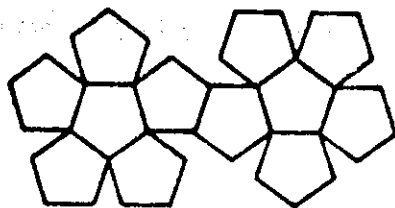
Vous obtenez un nœud dont les contours sont les côtés d'un pentagone régulier convexe... et par transparence, vous pourrez voir un étoilé...



Pour la démonstration, on peut attendre la classe de Première. Elle est basée sur l'utilisation de symétries orthogonales.

5. DODECAEDRE REGULIER
(un solide de Platon...)

On a représenté ci-contre - un patron de dodécaèdre régulier : il est formé de 12 pentagones réguliers. Dessinez-le sur du papier fort sans oublier des languettes pour l'assemblage.



Découpez, collez avec soin. Pour ce dodécaèdre régulier obtenu, quel est le nombre S des sommets, A des arêtes, F des faces ? Vérifiez la formule d'Euler : $S + F = A + 2$.

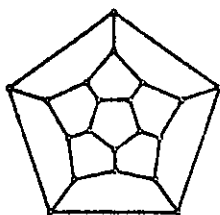
Mette en évidence, sur ce solide : des droites parallèles, des sécantes, des droites non coplanaires, des plans parallèles... Vérifiez la formule d'Euler sur un cube, un tétraèdre, un prisme...

6. ICOSAEDRE REGULIER

Chacune des 12 faces du dodécaèdre a un centre (le centre du cercle circonscrit). On joint par un segment le centre de chaque face à chacun des cinq centres des faces ayant une arête commune avec cette face... On admet que ces segments ont tous même longueur. On peut tracer 30 segments : expliquez pourquoi... Le solide ayant pour sommets les douze centres des faces du dodécaèdre est un icosaèdre régulier : quelle est la nature des faces ? leur nombre ? Vérifiez la formule d'Euler. Trouvez un patron d'icosaèdre... et fabriquez ce solide...

7. GRAPHE D'UN DODECAEDRE

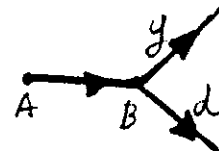
Hamilton, qui s'est intéressé à un problème de déplacement d'un voyageur de commerce devant visiter 20 villes à la surface du globe, imagina que chacune de ces villes occupait un sommet d'un dodécaèdre régulier. Il eut l'idée de représenter les sommets du solide par un graphe «planaire» dessiné ci-contre.



De chaque point partent trois arêtes du graphe. Un trait du graphe représente une arête du dodécaèdre. Retrouvez sur ce graphe les nombres S, A et F.

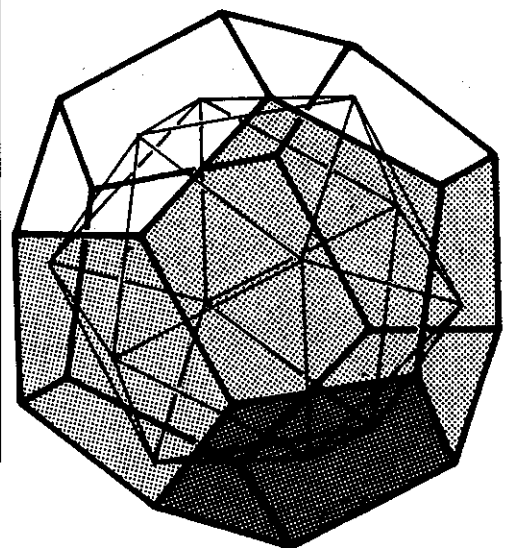
8. CHEMINS HAMILTONIENS

Reproduisez le graphe de Hamilton, vous en aurez besoin... Le voyageur de commerce, partant d'un point, A par exemple, doit y revenir après avoir visité une fois et une seule chacune des 19 autres villes, en suivant les arêtes du dodécaèdre. Essayez de trouver un tel cheminement sur le graphe... Il y en a un certain nombre ! Voici une méthode utilisant un codage des déplacements sur le graphe. Ayant choisi une arête, AB par exemple, au départ de A, en arrivant en B le voyageur peut choisir de tourner soit à droite : CODAGE d, soit à gauche : CODAGE g.



Un cheminement sera une succession de 20 lettres d ou g. On remarquera que dddd ramène en A (codage d⁵) On remarquera que dd = gddg. En partant de dddd, on remplacera chaque fois que possible : dd par gddg jusqu'à ce que l'on ait un chemin de longueur 20... Bon courage ! Et si le voyageur changeait de planète ? Que se passerait-il ? Par exemple pour un icosaèdre régulier ou un dodécaèdre rhombique ?

Se documenter sur les «racines» penta-, dodeca-, icosa-, -èdre, -gone. Trouver des informations sur EULER, PLATON (et ses solides...), HAMILTON.



HEPTA-DOÏCOSA

Michel CRITON - Chéroy

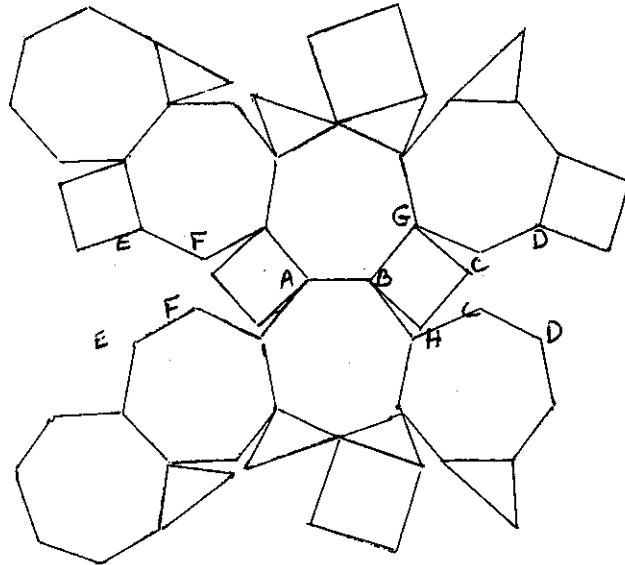
Voici un problème que je soumetts aux lecteurs du PLOT, et en particulier aux spécialistes des POLYÈDRES.

Constatant l'absence totale de l'heptagone régulier dans les polyèdres que l'on considère habituellement, j'ai voulu réparer cet oubli. J'ai donc assemblé des heptagones réguliers en couronnes, puis j'ai réuni deux couronnes de n heptagones, en mettant en coïncidence les côtés AB, CD, EF (voir figure). En complétant par un polygone régulier à n côtés à chaque pôle (pour $n = 4$, un carré par exemple, voir la figure), on obtient un polyèdre qui n'a pas trop vilaine allure. Bien sûr, les «vides» sont remplis par des triangles, qui eux, ne sont pas «réguliers», mais seulement isocèles.

Le problème qui se pose à moi est le suivant :

Existe-t-il une valeur de n (nombre d'heptagones dans chaque couronne), pour laquelle les quadrilatères situés autour de «l'équateur» du polyèdre (BGCH sur la figure) par exemple ne soient pas des quadrilatères gauches, c'est-à-dire des assemblages de deux triangles isocèles non inclus dans un même plan, mais soient des losanges plans ?

Si quelqu'un pouvait éclairer ma lanterne en m'indiquant comment démontrer l'im-



possibilité de l'existence d'un tel polyèdre, je lui en serais reconnaissant !

NDLR : lecteur, si vous cherchez à répondre à Michel Criton, le n° 23 du PLOT 1983 pourra vous y aider

L'OUVERT

- DES TEXTES DE VULGARISATION SUR DES RECHERCHES RÉCENTES
- DES ÉTUDES SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
- UNE ILLUSTRATION ABONDANTE ET VARIÉE
- DES IDÉES POUR L'ENSEIGNEMENT
- UNE RUBRIQUE DE PROBLÈMES
- DES ARTICLES DE DIDACTIQUE



Bulletin d'abonnement à renvoyer,
accompagné du règlement, à l'adresse ci-contre
M. Mlle, Mlle :
Adresse :

	Alsace	France et Étranger
s'abonne pour	1 an 80.- F	120.- F
	2 ans 170.- F	220.- F

4 numéros annuels

1 numéro : 25.- F

Chèque à l'ordre de Mr l'Agent
Comptable de l'ULP (IREM).

Correspondance à adresser à :

Université Louis Pasteur

Bibliothèque de l'IREM

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG CEDEX

Tél. : 88 41 64 40

D'anciennes n° sont disponibles, n'hésitez pas à nous contacter.

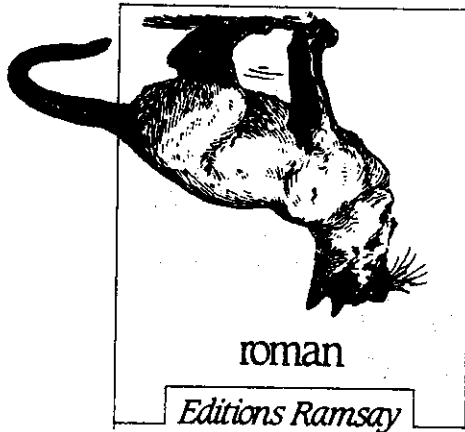
L'ENLÈVEMENT D'HORTENSE

Chronique de l'OULI «PLOT».

Une interview imaginaire et socratique de Jacques ROUBAUD

Jacques Roubaud

L'enlèvement d'Hortense



Plot: «L'enlèvement d'Hortense», qui fait suite à «la Belle Hortense» (Ramsay éd. 1985), fait aussi nettement référence aux mathématiques en particulier, **comme sujet** d'au moins deux chapitres du livre et **comme outil** de construction romanesque.

JR: Ah ! vous avez ouvert le livre ?

Plot: «La leçon de géométrie» met en scène, la jeune Carlotta âgée de 15 ans et 80/365^e, rousse et brillante, qui, tout aussi autoritaire qu'un professeur de mathématiques diplômé, interdit l'usage du théorème de Thalès qu'elle déteste et laisse peu d'espoir à son élève «cerné par les innombrables parallèles dont la figure est encombrée dans tous les coins.»

JR: l'élève est l'auteur lui même, donc moi-même âgé de 55 ans.

Plot: Vous définissez d'ailleurs, à la page 46, les différentes fonctions de l'écrivain (qui peuvent se superposer) par une notation indiquée : MOI₁, regarde et raconte, c'est le narrateur passif et extérieur ; MOI₂ intervient directement dans le roman en tant qu'Acteur pour se dégourdir un peu les jambes. Ne faut-il pas aussi envisager MOI₀ qui construit l'ensemble du roman ; puis MOI₋₁ qui s'observe et s'analyse en train de fonctionner en tant qu'écrivain ; MOI₋₂ qui vit et subit les contraintes du monde de l'édition ; MOI₋₃ qui participe aux différentes manifestations du monde des lettres ; MOI₋₄ qui s'enivre dans les cocktails des prix littéraires ; MOI₋₅...

JR: Quel test d'arrêt avez vous prévu ?

Plot: Votre intervention. Nous pouvons donc continuer en remarquant que les mathématiques apparaissent aussi comme sujet principal des conversations du Gudule-Bar. La tenancière, Madame Yvonne, aime à discourir sur l'Infini. Vous semblez alors créer un état intermédiaire entre le fini et l'infini illustré par 10¹⁹⁸⁸⁴ ou 80¹⁵⁰⁰, une sorte de fini inaccessible pour lequel les entiers seraient insuffisants car «les entiers, ça s'use», dites vous.

Mais, n'est-ce pas la force des mathématiques que de pouvoir —par un système formel d'écriture— fabriquer des nombres qui sont sans rapport avec le tracé de petits bâtons ou l'alignement de petits cailloux et qui existent pour eux-mêmes, indépendamment des moyens de comptage ou de mesurage de leur origine.

Ainsi les écritures du type $x \uparrow^{(n)} y$

où x et y sont des naturels (pour simplifier)

et tel que $x \uparrow^{(1)} y = x^y$ et $x \uparrow^{(n)} y = x \uparrow^{(n-1)} y$

P

Plot: La parution de votre dernier roman «L'enlèvement d'Hortense» (Ramsay éd. 1987) nous amène à vous interroger : N'est-il pas difficile pour un mathématicien d'évoluer dans le monde de la littérature, un univers impitoyable ?

JR: Malheur à celui qui n'a pas compris !

Plot: Vous avez su vous entourer d'amis sûrs au sein de l'OULIPO (ouvroir de littérature potentielle. Gallimard/idée éd.) fondé par François Le Lionnais et Raymond Queneau. Votre premier recueil de poésies marquait la convergence entre littérature et mathématiques, il se nommait «e» (Gallimard éd. 1967).

JR: Depuis, écrire et publier ont été des fonctions continues.

permettant de fabriquer très rapidement des nombres sans rapport avec le monde physique qui nous entoure (on dépasse vite le nombre d'atomes du cosmos par exemple...). Ces nombres peuvent pourtant être comparés et combinés par des règles opératoires.

JR : Sans doute, mais cela est susceptible de jeter le trouble chez les garçons de café, en particulier quand ils sont de Beaux Jeunes Hommes Poldèves.

Plot : Vous nous ramenez à la Belle Hortense et aux six princes poldèves qui apparaissent dans le roman selon un ordre bien établi : si on prend soin de les numéroter au départ 123456

ils réapparaissent dans l'ordre 615243
puis 364125
puis 532614

De plus, chacun d'eux porte sur la fesse gauche la spirale de l'avenir (celle qui s'enroule dans le sens indirect de la trigonométrie).

Chaque spirale est marquée de petits points qui rendent compte des 6 permutations de l'ensemble { 1,2,3,4,5,6 } s'appuyant sur le principe même de la spirale : on s'éloigne de plus en plus de l'élément de départ (1 puis 2 puis 3...) sans oublier qu'on reste dans un ensemble fini (fig. ci-contre).

Les permutations mises en place ont donc un double rôle : repérage (pour les princes) et opérateur (transformation et moteur de l'action romanesque).

Vous expliquez à la fin du roman votre méthode de création (intervention implicite du MOI₀) et prouvez alors que «L'enlèvement d'Hortense» est bien un roman oulipien.

Le procédé est habile puisqu'il oblige le lecteur scrupuleux étonné sceptique rigoureux dubitatif désœuvré (cochez la case qui vous convient) à relire tout le roman pour vérifier le bon ordre d'apparition des princes.

JR : A défaut d'accroître le nombre de mes lecteurs, j'essaie d'augmenter le nombre des lectures.

Plot : Ce roman fait aussi souvent penser à «Alice aux pays des merveilles» par la présence d'animaux peu ordinaires, par le rôle déterminant de la jeune, active et rousse Carlotta.

JR : J'ai en effet traduit «La chasse au Snack» de Lewis Carroll en 1981 - (Slatkine Garance éd.)

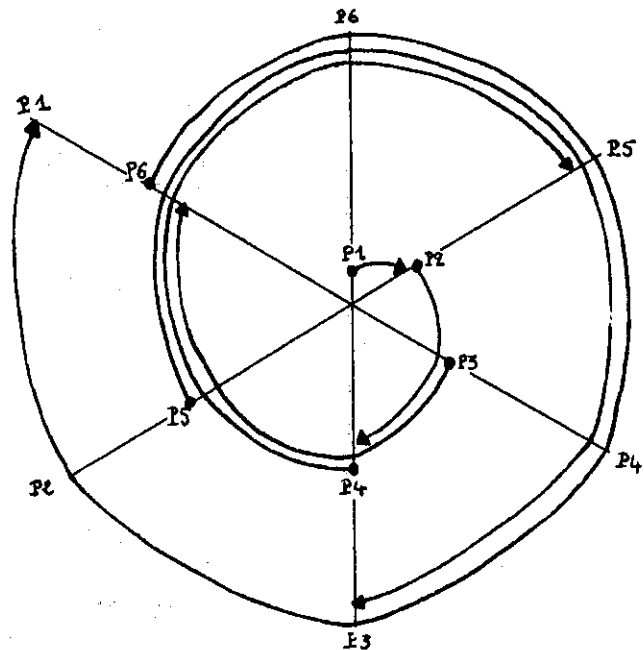
Plot : Quant à votre héroïne que vous choyez tant, il faut bien reconnaître qu'elle est souvent passive.

JR : Hortense ! Rhââ Lovely !

Plot : Ne serait-elle qu'un bien joli prétexte à côté de toutes les références, renvois, clins d'œil qui abondent dans votre roman ? D'ailleurs, nous ne les avons pas tous compris.

JR : Ça ne m'étonne pas de vous !

Plot : Enchaînons. Le professeur Poldève



Girardzoï a inventé le langage informatique sublime LAPEFALL (LANGage Pour En Finir une fois pour toute Avec tous Les Langages). Pouvez-vous donner quelques précisions ?

JR : Non

Plot : le nombre 37 et son symétrique syntaxique 73 reviennent systématiquement. Il faut sans doute y voir un lien avec le symbolisme divin et kabbalistique : $(37 \times 3 = 111 : \text{trinité})$.

JR : C'est comme vous l'entendez.

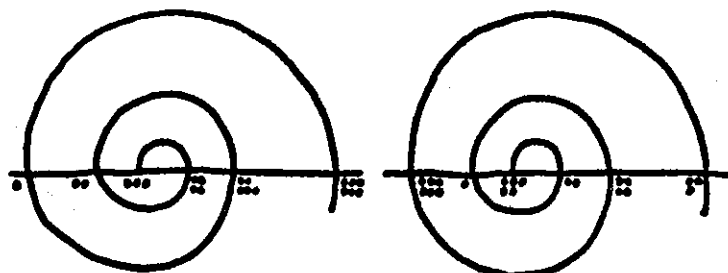
Plot : Page 83, vous évoquez un texte contenant des parenthèses qui ne se ferment pas. S'agit-il d'une allusion au roman du comte Polonais Jean Potoki «Le manuscrit trouvé à Sarragosse» qui ouvre un certain nombre d'histoires emboîtées les unes dans les autres, pour les conclure dans l'ordre inverse de leur apparition ?

Si oui, quelle forme aurait-eu ce roman si l'auteur (bien qu'antérieur) avait utilisé la notation (dite polonaise) de son compatriote le professeur Lukasiewicz ?

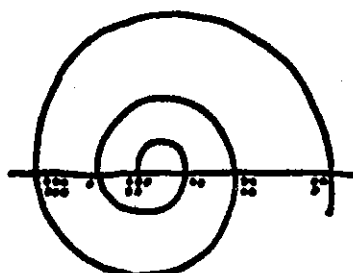
En effet, si on peut montrer l'équivalence des systèmes formels infixés (écriture habituelle $(a + b) \times c$) et préfixés (écriture polonaise $x + ab c$), peut-on développer une démarche similaire en littérature susceptible de favoriser la création de textes ?

JR : C *... l'objet d'une séance de travail de l'OULIPO.

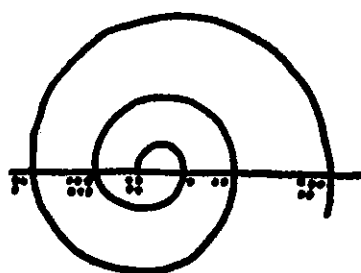
Marques de Fabrique



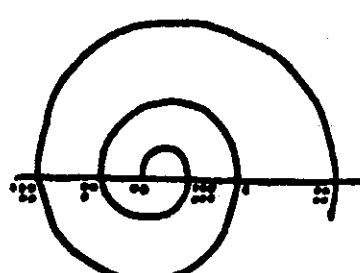
1



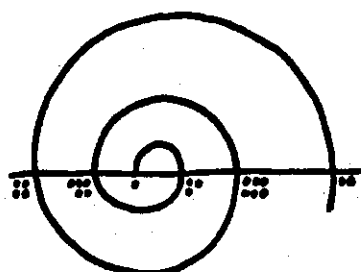
2



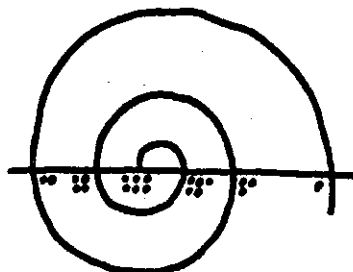
3: K'manoroïgs



4



5



6: Gormanskoï

(*) la réponse indistincte nous fait hésiter entre □ est □ était □ sera □ ne sera jamais.

Plot : Nous vous sommes reconnaissants d'avoir introduit le LECTEUR à vos côtés d'AUTEUR dans tout le roman et même de lui laisser une certaine autonomie quand, à la fin, vous le quittez et le laissez en compagnie des personnages du livre pour vous consacrer à une réflexion sur la structure de votre roman. Cette démarche peut-elle constituer l'esquisse d'une pratique pédagogique propre aux enseignants de mathématiques, lecteurs du Plot ?

JR : Plot, qu'est-ce que c'est ?

Plot : Exempts de toute susceptibilité, et magnanimes, nous encourageons nos lecteurs à découvrir ce roman un peu policier, un peu humoristique, un peu fantastique, un peu instructif, un peu introspectif :

L'assassin traqué par l'inspecteur Bloguard est-il celui qui se prépare à enlever l'héroïne ? Quel rôle obscur avait le mort ? Qui sont ces six princes poldèves ? Pourquoi sont-ils six ?

Doit-on s'inquiéter des initiatives de la savante Carlotta ? Doit-on se méfier des mathématiques ?

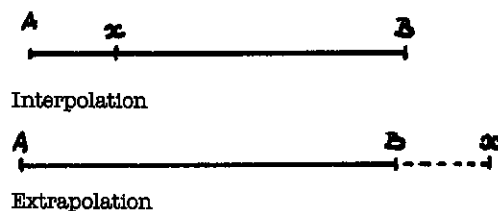
CONTROLE OPTIMAL

— un exemple —

Jacques LUBCZANSKI - Paris

Pour connaître la température (où le débit...), le long d'une canalisation, on la mesure en un certain nombre de points, et à partir de ces mesures, on déduit une estimation de la température en tous les points.

En d'autres termes, si $f(x)$ est la température au point x , on connaît les valeurs de f en quelques points : on en déduit l'estimation $P(x)$ de la température en n'importe quel point : si A et B sont deux points où on a mesuré la température, on dit qu'on **interpole** ou qu'on **extrapole** selon qu'on estime la température à l'intérieur du segment $[AB]$ ou à l'extérieur.



Les questions qui se posent alors sont les suivantes :

1. Quelle fonction P choisir pour estimer la fonction f ?
2. Quelle est la précision de cette estimation ?
3. Peut-on optimiser cette précision en plaçant judicieusement les capteurs ?

Pour évoquer ces problèmes, nous allons nous placer dans un cas simple mais significatif, à savoir l'interpolation entre A et B à partir de trois mesures.

Quelle fonction choisir ?

Le choix le plus simple est celui d'une fonction polynôme du second degré :

$$\text{si } P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

les valeurs de P en trois points a, b et c déterminent les coefficients α, β et γ :

— soit par résolution d'un système de trois équations à trois inconnues

— soit par utilisation des polynômes d'interpolation de Lagrange :

Le polynôme P qui coïncide avec f aux points a, b, c est donné par

$$P(x) = f(a) \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Cette question est assez classique en classe de Première ou de Terminale.

Quelle est la précision ?

Là, même dans ce cas simple, l'évaluation de $[P(x) - f(x)]$ exige des connaissances post bac : majorations tayloriennes...

On obtient :

$$[P(x) - f(x)] \leq (M/6) \cdot [(x-a)(x-b)(x-c)]$$

où M est un majorant de f''' sur l'intervalle considéré.

Le résultat est cependant logique :

$[(x-a)(x-b)(x-c)]$ est une quantité proportionnelle à l'éloignement de x de chacun des capteurs.

Admettons ce résultat pour nous permettre d'aller plus loin...

Comment améliorer cette précision ?

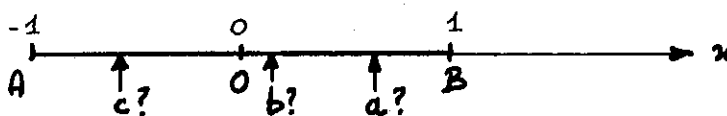
C'est là qu'on aborde une question moins classique et cependant accessible et intéressante en 1^{ère} ou en Terminale.

Puisqu'on ne connaît pas f , et donc pas f''' ni M , on ne peut agir que sur

$$h(x) = [(x-a)(x-b)(x-c)].$$

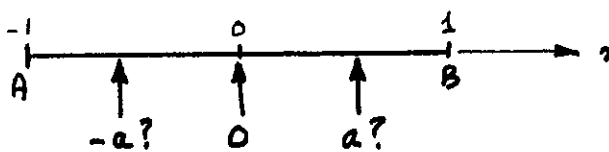
Pour fixer les idées, supposons que A et B sont d'abscisses -1 et 1 sur un axe d'origine O .

La question est donc : comment choisir a, b, c dans $[-1, 1]$ pour minimiser $h(x)$ et ce, **quelle que soit la valeur de x dans $[-1, 1]$?**



Raisonnements qualitatifs

Pour ne « privilégier » aucun point de $[-1, 1]$, il semble naturel de placer un capteur en O et les deux autres symétriquement par rapport à O : on est donc ramené à chercher la valeur de a dans $[0, 1]$ qui minimise $h(x) = [x(x-a)(x+a)]$, et ce, pour tout x de $[-1, 1]$.

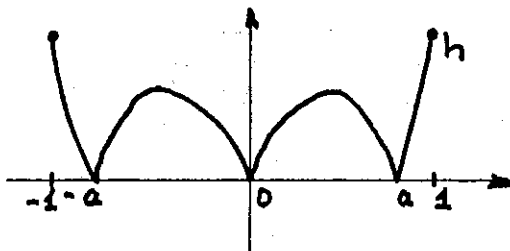
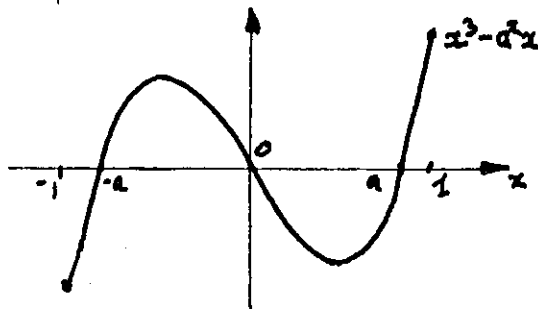


Pour contrôler la valeur de h sans connaître celle de x , il faut se placer dans le plus mauvais cas, c'est-à-dire au point x où l'estimation est la plus mauvaise — autrement dit où h est maximal.

Ensuite, il faudra calculer la valeur de a pour laquelle ce maximum sera le plus petit possible : c'est un raisonnement de type « minimax ».

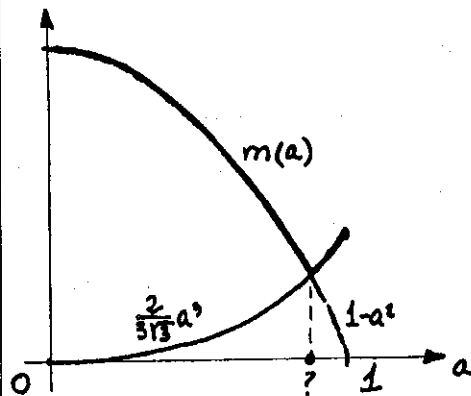
Raisonnements quantitatifs

$h(x) = [x(x^2 - a^2)] = [x^3 - a^2x]$
 Or $x \rightarrow x^3 - a^2x$ est une fonction du troisième degré s'annulant trois fois : son allure est dessinée ci contre.
 L'allure de h s'en déduit en symétrisant les parties négatives.



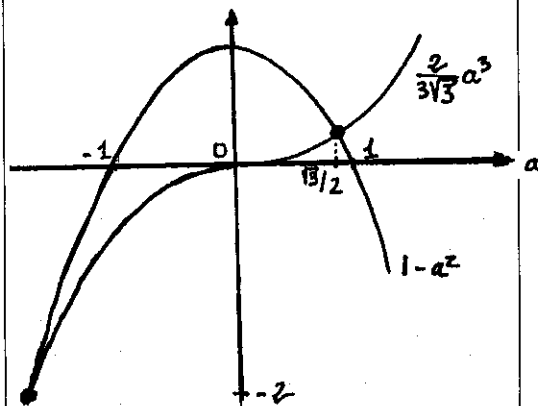
Alors les extréma de h sont à chercher :
 1. parmi les points où h est dérivable et où $h' = 0$, mais aussi...
 2. aux extrémités de l'intervalle,
 3. aux points où h n'est pas dérivable.
 En outre, h est paire : on ne cherche les extréma que sur $[0, 1]$.
 Catégorie «1» : sur $[0, 1]$, h' s'annule pour $x = a/\sqrt{3}$ et h vaut alors $2a^3/3\sqrt{3}$
 Catégorie «2» : $h(1) = 1 - a^2$: c'est encore un maximum possible.
 Catégorie «3» : $h(0) = h(a) = 0$: ce sont des minima.

Conséquence : le «plus mauvais» point x dépend des valeurs de a : le maximum $m(a)$ de h est la plus grande des deux valeurs $2/3\sqrt{3}a^3$.
 Traçons les courbes représentatives de $a \rightarrow 2a^3/3\sqrt{3}$ et $a \rightarrow 1 - a^2$ sur $[0, 1]$ pour en déduire la courbe $a \rightarrow m(a)$:
 On voit clairement qu'il existe une valeur de a rendant le maximum $m(a)$ de h le plus faible possible.
 Cette valeur est solution de $1 - a^2 = 2a^3/3\sqrt{3} = 0$
 soit $2a^3 + 3\sqrt{3}a^2 - 3\sqrt{3} = 0$
 Une étude numérique peut mettre la puce à l'oreille pour trouver les valeurs exactes des racines : $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}/2$.
 Une autre façon de trouver ces racines est de tracer les courbes sur un intervalle plus grand, pour observer qu'elles sont tangentes : à partir de là on peut trouver les racines de l'équation du 3° degré par somme et produit, l'une d'elles étant supposée «double».



Conclusion :

Il faut placer les capteurs aux points d'abscisses $-\sqrt{3}/2$; 0 ; $\sqrt{3}/2$ soit en valeurs approchées : $-0,87$; 0 ; $0,87$



Ce résultat est loin d'être intuitif : les capteurs semblent trop éloignés, trop excentrés !
 Signalons enfin que si cette question n'est pas classique dans l'enseignement des maths «pures», elle est en revanche très classique en analyse numérique : le résultat général, si on a n capteurs à placer sur $[-1, 1]$, et si on utilise l'interpolation par les polynômes de Lagrange, est qu'il faut placer ces capteurs aux racines du polynôme de Tchébychev T_n d'ordre n :
 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
 Ce qui donne donc les valeurs x vérifiant :
 $n \arccos x = (2k + 1)\pi/2 \quad k \in \mathbb{Z}$
 soit $\arccos x = (2k + 1)\pi/2n$
 soit $x = \cos((2k + 1)\pi/2n)$
 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
 Nous renvoyons les lecteurs intéressés par les étonnantes propriétés de ces polynômes de Tchébychev à tout traité sérieux d'analyse numérique...

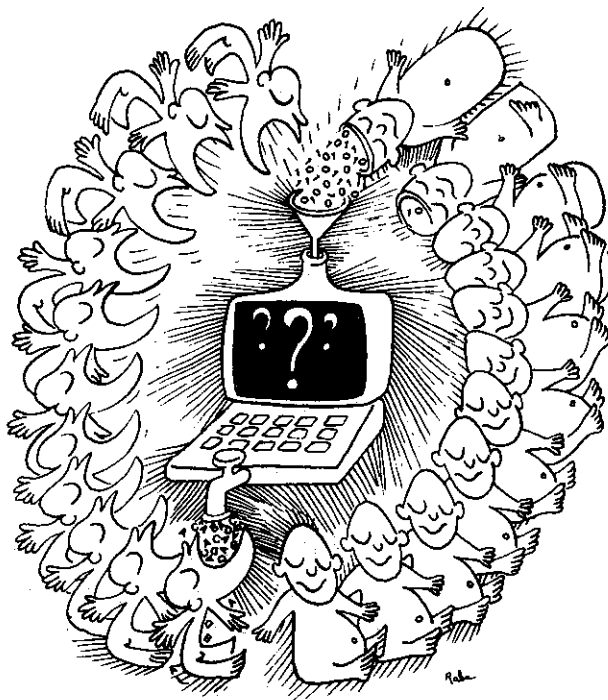
MATHÉMATIQUES ET ORDINATEURS

Une symbiose nécessaire pour faire des maths autrement

d'après un article de PARISH,
PARTNER et WHITAKER
(School science and mathematics
volume 87 may 87)

Beaucoup d'enseignants introduisant l'ordinateur dans leur classe l'utilisent comme un complément à leur enseignement : un moyen d'illustrer ou d'introduire une notion mathématique. Parfois même, ils proposent des démarches algorithmiques sans liens directs avec des problèmes mathématiques, leurs analyses et la mise en place de procédures informatiques pour leurs solutions.

D'autre part, quand l'ordinateur est utilisé pour résoudre un problème mathématique, c'est souvent le savoir-faire algorithmique des élèves qui est développé : capacité d'écrire (ou de recopier) un programme donnant des solutions sans insister sur les justifications mathématiques de l'algorithme correspondant. Les professeurs qui pensent qu'intégrer pleinement l'ordinateur à la classe est un enjeu important pour l'enseignement des mathématiques, devront donc s'efforcer de développer et expliquer les différentes inter-relations entre les concepts et méthodes mathématiques d'une part, et les procédures algorithmiques correspondantes d'autre part ; en particulier l'introduction de ce qui est nécessaire pour élaborer ou comprendre un programme doit être complété par la mise en place des bases mathématiques indispensables pour justifier la démarche. Deux exemples pour illustrer cette idée : l'un emprunté aux auteurs



américains cités (Mathematic and computers in the classroom - A symbiotic relationship) l'autre emprunté à D. Lazard (The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching - IREM de Strasbourg).

Représentation graphique des coniques

Prenons pour simplifier le problème du cercle de rayon R et de centre l'origine du repère orthonormé. Classiquement, il s'agit de trouver les solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La forme paramétrique

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta,$$

convient mieux à la mise en place d'une méthode permettant de générer des points représentatifs en utilisant un angle de départ θ et une incrémentation $\Delta = k \theta$ ($k \in \mathbb{R}$)

Le point initial est $P_0(x_0, y_0)$:

$$x_0 = R \cos \theta; y_0 = R \sin \theta$$

Le second point est $P_1(x_1, y_1)$:

$$x_1 = R \cos(\theta + \Delta); y_1 = R \sin(\theta + \Delta)$$

C'est-à-dire :

$$x_1 = R(\cos \theta \cos \Delta - \sin \theta \sin \Delta)$$

$x_1 = R \cos \theta \cos \Delta - R \sin \theta \sin \Delta$
 soit $x_1 = x_0 \cos \Delta - Y_0 \sin \Delta$
 de même $y_1 = y_0 \cos \Delta - x_0 \sin \Delta$.

Avant d'écrire un programme pour l'ordinateur il est nécessaire de démontrer par récurrence le théorème suivant :

Pour tout entier $n \geq 1$, on peut définir un point $P_n (X_n, Y_n)$ du cercle de centre l'origine et de rayon R par les relations récursives :

$$X_n = X_{n-1} \cos \Delta - Y_{n-1} \sin \Delta$$

$$Y_n = Y_{n-1} \cos \Delta - X_{n-1} \sin \Delta$$

Le choix initial de θ détermine le premier point $P_0 (X_0, Y_0)$.

On peut étendre cette démarche à d'autres coniques.

Les énoncés des théorèmes contiennent souvent des paramètres analogues à ceux des procédures, on peut lire chez Bourbaki : «La proposition résulte alors de 1.2.7-Prop. 8 appliquée en remplaçant A par B, B par A, E par T⁻¹ (B), F par N».

Il aurait été plus simple de désigner : prop 8 (A, B, E, F) et de terminer la démonstration par «la proposition résulte alors de 1.2.7. prop 8 (B, A, T⁻¹ (B), N)». Concision, précision apparaissent alors en particulier avec les variables libres qu'il est souvent malaisé de distinguer et qui sont là explicitées.

Cette modification de style de rédaction traduit (semble-t-il) une modification de pensée qui consiste à concevoir un énoncé comme un opérateur qui associe un résultat à des données, on retrouve l'analogie d'une procédure fonctionnelle.

Effet de l'algorithmique sur la rédaction et la pensée mathématique

(Travaux de D. Lazard
 Institut de programmation
 Université P. et M. Curie).

TABLE 1

Conic Section	Rectangular Equation	Parametric Equations	Recursive Relations	Constant Increment	n
Parabola	$y = \frac{b}{a^2} x^2$	$x = at$ $x = bt^2$	$x_n = x_{n-1} + a(\Delta t)$ $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 2b(\Delta t)^2$	Δt	$n \geq 3$
Circle	$x^2 + y^2 = r^2$	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$	$x_n = x_{n-1} \cos k\theta - y_{n-1} \sin k\theta$ $y_n = y_{n-1} \cos k\theta + x_{n-1} \sin k\theta$	$k\theta$	$n \geq 2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a \cos \theta$ $y = b \sin \theta$	$x_n = x_{n-1} \cos k\theta - \frac{a}{b} y_{n-1} \sin k\theta$ $y_n = y_{n-1} \cos k\theta + \frac{b}{a} x_{n-1} \sin k\theta$	$k\theta$	$n \geq 2$
Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a \sec \theta$ $y = b \tan \theta$	$x_n = \frac{bx_{n-1} \sec k\theta}{b - y_{n-1} \tan k\theta}$ $x_n = \frac{by_{n-1} + b^2 \tan k\theta}{b - y_{n-1} \tan k\theta}$	$k\theta$	$n \geq 2$

Ouverture de la notion de récurrence

La vision habituelle de la notion de récurrence en mathématique est ascendante: vérification de $P(0)$ puis

«Si $P(n)$ vraie alors $P(n + 1)$ vraie».

En algorithmique ces **récurrences ascendantes (itération)** sont souvent difficiles à mettre en place (récurrence arborescente par exemple), et sont remplacées par des **récurrences descendantes (récursion)**: pour que $P(n)$ soit vraie, il suffit que $P(n-1)$ le soit.

Par exemple il n'existe pas de définition récurrente ascendante simple pour la fonction pgcd de 2 nombres de $N \times N$ dans N , par contre par récursion on a :

```
f pgcd (m,n) → entier
  Test 1 : n=0 : + m
            |
            | n≠0 Test 2 : m ≥ n : → pgcd (m-n, n)
            |                 m < n : → pgcd (n,m)
            |                 fin Test 2
            |
            | fin Test 1
  fin f pgcd
```

La démonstration peut être :
«Considérons le programme :

```
q ← 0, r ← a
tant que r ≥ b faire q ← q + 1;
                    r ← r - b
```

fin tant que.

Notons qu'il s'arrête au bout d'un temps fini et qu'alors q et r satisfont les conditions de l'énoncé du théorème».

Cela donne, en même temps, une démonstration constructive du théorème et la méthode de calcul manuelle.

On peut pressentir avec ces exemples simples que l'enseignement et la rédaction mathématique ont à profiter du développement algorithmique et plus généralement du développement informatique en allant au-delà des logiciels EAO.

M.C.

Analogie formule/ programme et démonstrations constructives élémentaires.

La définition ci-dessus de pgcd peut être vue comme une formule (ce qui est évidemment inhabituel en mathématique traditionnelle). Plus généralement tout programme peut apparaître comme une formule définissant les sorties à partir des entrées. Cela permet en particulier d'unifier des présentations bien distinctes. Voici un exemple avec la division euclidienne : la description de la division est en général distincte de la méthode de calcul habituelle (d'où quelques problèmes didactiques parfois !)

Théorème : Étant donné deux entiers naturels a et b il existe deux nombres q et r tels que
 $a = bq + r$ et $r < b$



*Attention!!
Tournoi au Venso*

TOURNOI DU LIMOUSIN



Voici le sujet proposé pour le deuxième **TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN**. Vous travaillez, peut-être à plusieurs dans une même salle. Pensez à respecter le travail de vos camarades. Vous pouvez parler avec votre équipier mais... en silence !

Pour chacun des trois textes composant le sujet, vous ne devez pas hésiter à proposer :

- plusieurs démonstrations, éventuellement...
- des solutions partielles
- des prolongements
- de nouvelles questions, même si vous n'y répondez pas...

Bref, place à votre imagination créatrice, aux idées même insolites et au plaisir de chercher.

Chaque équipe ne remet qu'une copie. N'oubliez pas de mettre les noms et prénoms des équipiers en tête de la copie ainsi que : classe, section et établissement.

BONNE CHANCE à tous les chevaliers du **TOURNOI 1988**.

TEXTE N° 1

Observer l'égalité :

$$\frac{7^3 + 5^3}{7^3 + 2^3} = \frac{7 + 5}{7 + 2}$$

Pouvez-vous en écrire d'autres analogues ?

TEXTE N° 2

Dans le plan, pouvez-vous tracer une figure qui admette deux axes de symétrie orthogonale, et deux seulement, qui ne soient pas perpendiculaires ?

TEXTE N° 3

Un cercle **C** de rayon **6400 km** est tangent à une droite **D**.

On trace un premier cercle **C₁** de rayon **1 mm** tangent extérieurement à **C** et tangent à **D** ; puis un deuxième cercle **C₂** aussi grand que possible tangent extérieurement à **C** et **C₁** et tangent à **D** ; puis de même un troisième cercle **C₃** aussi grand que possible tangent extérieurement à **C** et **C₂** et tangent à **D** ; etc...

Quel est le rayon du **1988^e** cercle ?

Combien de cercles peut-on placer successivement par ce procédé ?

Le tournoi plein les médias!

LA MONTAGNE

GRAND QUOTIDIEN Centre France D'INFORMATION

LIMOGES. — Pour la seconde année consécutive, a été organisé, hier, dans seize établissements de la région, le tournoi mathématique du Limousin comprenant un problème d'arithmétique et deux de géométrie.

Ce tournoi, comme l'an passé, est mis sur pied conjointement par l'APMEP, le département de mathématiques de la faculté des sciences de Limoges, l'inspection pédagogique régionale de mathématiques de l'académie de Limoges et enfin l'IREM de Limoges. Le comité d'organisation étant présidé par M. Fredon.

C'est justement ce dernier que l'on a rencontré au lycée Gay-Lussac à Limoges et qui a souligné tout le succès de ce tournoi 1988 qui a réuni 1.226 élèves des classes de première et terminale de l'académie au sein des seize centres où se déroulait l'épreuve.

« L'an passé, expliquait-il, pour la première édition du tournoi, nous n'avions eu que 837 candidats. Cette année nous en avons 394 pour la Corrèze, 202 pour la Creuse et 630 pour la Haute-Vienne. Ils peuvent travailler seuls ou en duo. Ce dernier procédé est peut-être moins intimidant. C'est pourquoi, cette année, nous comptons 592 équipes de deux contre 42 isolés.

» Il faut noter que les can-



Le recteur prend connaissance des épreuves.

didats appartiennent à toutes les séries, littéraires, scientifiques, « matheux ». Ils viennent là surtout pour se rencontrer et résoudre les problèmes posés dans la décontraction la plus totale. Pour ce faire ils ont quatre heures ».

Il faut bien avouer qu'un tel examen se passait dans la bonne humeur... et sous une surveillance plus que rela-

chée. Mais c'était bien là le but de l'opération.

« Il s'agit surtout de mobiliser le maximum d'élèves, poursuivait M. Fredon et par là même monter qu'ils s'intéressent de très près à leur travail scolaire, chose que nous avons réalisée cette année, sans oublier la centaine de surveillants qui opèrent dans les seize lycées participants ».

Les prix seront remis le samedi 7 mai, dans les locaux du CRDP à Limoges. Le premier prix sera offert par le Conseil régional et sera vraisemblablement un séjour de voile de trois semaines à Vassivière. Ensuite l'on gagnera des calculatrices programmables. La cérémonie de remise des prix aura lieu à 15 heures.

RALLYE DU CENTRE 1988

Changez mon ombre mais gardez mon ombre

Un grand cube est formé de 125 petits cubes opaques de 1 cm d'arête. Si on projette son ombre perpendiculairement à un écran, on obtient un carré de 5 cm de côté à chaque fois qu'une face est parallèle à l'écran. On remplace certains petits cubes opaques par des petits cubes transparents.

Combien faut-il laisser, au minimum, de petits cubes opaques pour que le cube se projette encore sur l'écran suivant un carré de 5 cm de côté, sans aucun trou, quelle que soit la face parallèle à l'écran.

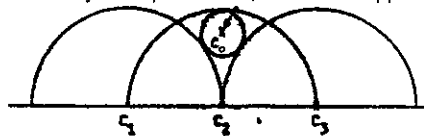
Un tête-à-queue

Un nombre entier de 12 chiffres commence à gauche par le chiffre 1. Si on efface ce 1 pour le placer en dernière position à droite, on obtient un nouveau nombre de 12 chiffres qui est le triple du premier. Quel est le nombre de départ ?

L'encerclé

Trois demi-cercles de même rayon R ont leurs centres C_1, C_2, C_3 alignés et disposés comme sur la figure. Un quatrième cercle de centre C_4 est tangent aux trois demi-cercles déjà tracés.

Si r est le rayon du petit cercle, calculer le rapport R/r .



Pour gens-pressés

Pour monter un escalier roulant lorsque celui-ci est en panne, on met 90 secondes.

Lorsqu'il fonctionne et qu'on se laisse monter, on met 60 secondes.

Quel temps met-on si on monte cet escalier alors qu'il est en marche ?

A perte de vue

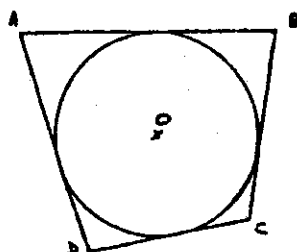
Sur la Terre, supposée être une sphère parfaite de 12.756 km de diamètre, deux hommes situés à 8 km l'un de l'autre en ligne droite et dont les yeux sont à 2 mètres du sol, peuvent-ils, avec une longue vue, s'apercevoir mutuellement ?

Les conditions de visibilité sont excellentes.

Pour vous donner du mal

Dans le film de Louis Malle «Au revoir les enfants», Jean est au tableau noir devant cette figure :

Comme lui, démontrez que «dans ce quadrilatère qui admet un cercle inscrit, la somme des longueurs de deux côtés opposés est égale à la somme des longueurs des deux autres».



Pour orfèvres

Un bijou est réalisé à partir d'une feuille d'or (sans épaisseur) de forme carrée (2 cm de côté), qui est incluse dans un bloc de résine précieuse transparente. Pour des raisons d'esthétique, mais aussi de bon enrobage, le bloc a été conçu de telle manière que sa surface ait chacun de ses points exactement à 0,5 cm de la feuille d'or.

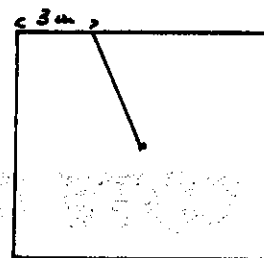
Calculer (en cm^3) le volume du bloc de résine.

On donnera le résultat avec 3 décimales.

Bon appétit

Trois amis veulent manger un gâteau carré de 15 cm de côté. Un coup de couteau malheureux partant du centre du gâteau a produit la première coupe représentée sur le dessin.

Sur la feuille réponse, reproduire le carré en grandeur réelle avec la première coupe et tracer, à partir du centre, les deux autres découpes de façon que les trois parts soient équitables.



Aimez-vous les vendredis 13 ?

Est-il possible qu'une certaine année il n'y ait aucun vendredi 13 ?

Un conte apocalyptique

Il était une fois une ferme, dans laquelle vivaient en nombre égal cochons, vaches, lapins et chevaux. Survint une terrible épidémie et l'on entendit les plaintes des fermiers.

Le père : «Une vache sur cinq est morte!».

La mère : «Il y a autant de chevaux morts que de cochons survivants».

Le fils : «La proportion de lapins survivants parmi les animaux encore en vie est de $5/14$ ».

La grand-mère : «La mort n'a épargné aucune espèce animale».

Le père, la mère et le fils ont raison.

La grand-mère se trompe-t-elle ?

Le numéro mystérieux

Le numéro d'une carte magnétique comporte les chiffres écrits dans 14 cases en respectant la règle suivante : la somme des chiffres de 3 cases consécutives est toujours égale à 20.

Reproduisez l'ébauche ci-dessous et complétez-la :



Histoire de quarts ou histoire de cars

Un groupe de touristes occupe les trois quarts de trois cars identiques.

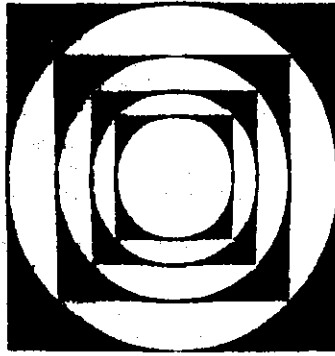
Un quart du groupe descend.

Peut-on réussir à caser les passagers qui restent, dans deux de ces cars ?

Attention les yeux

Après avoir découvert un procédé de construction de cette figure, l'appliquer à un carré de 16 cm de côté, à partir du plus grand carré, jusqu'au 6° carré compris,

pour réaliser le dessin sur la feuille-réponse n° 6.
Quelle serait l'aire du 8° carré ?



Réaménagez votre région

Prendre la carte de la Région Centre (feuille réponse n° 7).

Sur cette carte sont placés les 6 chefs-lieux : Blois, Bourges, Chartres, Châteauroux, Orléans et Tours. Colorier en rouge la partie de la feuille représentant les lieux de la Région Centre plus près de Tours que de chacune des cinq autres villes.

Même chose :

- en vert pour Bourges
- en orange pour Chartres
- en jaune pour Châteauroux
- en violet pour Orléans
- en bleu pour Blois

Commenter la nouvelle carte.

L'art de ne rien faire

Avec une photocopieuse, on réduit de 20 % l'aire d'un carré de 10 cm de côté. On s'aperçoit que la figure est trop petite, mais l'original a été détruit.

De quel pourcentage faut-il agrandir l'aire du carré obtenu pour retrouver le carré initial ?

COTE D'IVOIRE

Prix Houphouet-Boigny - 1988

6^{eme} et 5^{eme}

EGAL 1

Comment obtenir 1 en utilisant une fois et une seule chacun des dix chiffres 0, 1, 2...9 et certaines des opérations +, -, X, :

Comment obtenir 100 de la même façon ?

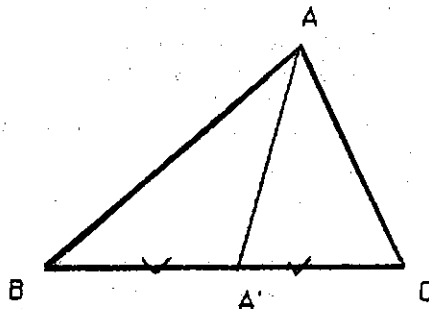
DE L'EAU, DE L'EAU !

5 camarades se trouvent à l'entrée du désert, dans un camp où ils ont à leur disposition autant d'eau qu'ils veulent. Ils désirent planter un drapeau dans le désert à 4 journées de marche de l'endroit où ils se trouvent. Chacun d'eux ne peut transporter que la quantité d'eau nécessaire pour vivre 5 jours dans le désert. Comment pourront-ils s'organiser pour que l'un d'entre eux plante le fanion à l'endroit voulu et rejoigne le camp de départ ?

Quelle sera la quantité d'eau consommée ?

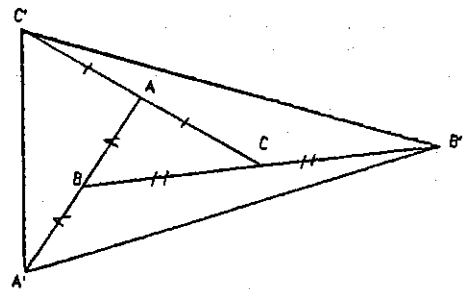
7 FOIS PLUS GRAND

a) on considère un triangle ABC et le milieu A' du côté (BC). Justifier que les triangles ABA' et ACA' ont la même aire.



b) A partir d'un triangle ABC, on construit un triangle A' B' C' tel que :

A est le milieu de [CC'],
B est le milieu de [AA'],
C est le milieu de [BB']
(voir figure ci-dessous).



Utiliser le résultat de la question précédente pour justifier que l'aire du triangle A' B' C' est égale au produit de l'aire du triangle ABC par 7.

4^{eme} - 3^{eme}

RALLYE ORLEANS - ABIDJAN

Voici deux égalités :

$$3/5 - 3/8 = 3/5 \times 3/8$$

$$7/2 - 7/9 = 7/2 \times 7/9$$

que vous pouvez vérifier.

Chacune d'elles fait intervenir deux fractions irréductibles ayant même numérateur. Ecrire d'autres égalités analogues avec des fractions irréductibles du type p/q, p et q entiers, avec $1 \leq p \leq 9$ et $2 \leq q \leq 9$. (Rallye Mathématique du Loiret 1987).

L'ENCADREMENT DE KOUAMÉ

Kouamé vient d'acheter un cyclomoteur qu'il utilise uniquement pour effectuer des trajets entre chez lui et le lycée. Le compteur kilométrique n'indique que le nombre entier de kilomètres parcourus (1 dès que le cyclomoteur a parcouru exactement 1 km, 2 dès que le cyclomoteur a parcouru exactement 2 km...).

Pour connaître la distance de sa maison au lycée, Kouamé a noté pour chaque trajet ce qu'indiquait le compteur à l'arrivée. Il a obtenu les nombres suivants :

- au départ du premier trajet : 0
- ensuite, à l'arrivée de chacun des trajets : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13.

A l'aide de ces données, Kouamé a pu trouver un encadrement d'amplitude inférieure à 40 de la distance en mètres de chez lui au lycée. Refaire les calculs de Kouamé et déterminer cet encadrement.

Seconde

LES MÉDIANES ÉTAIENT
PERPENDICULAIRES

Construire un triangle ABC tel que deux des médianes soient perpendiculaires.

LE PLUS PETIT

Quelle est l'aire du plus petit triangle équilatéral inscrit dans un carré de côté a ?
(les trois sommets du triangle sont sur les côtés du carré).

$$f(x) = f(-x)$$

Une fonction f définie sur \mathbb{R} vérifie :

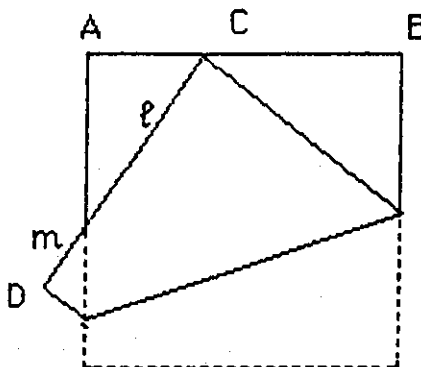
pour tout x , nombre réel non nul,
 $f(x) + 2f(1/x) = 3x$.

Existe-t-il des valeurs de x telles que :
 $f(-x) = f(x)$?

1^{ère} - Terminale

PLIAGE

Une feuille de papier carrée ABCD est pliée de telle sorte que le point C soit sur le côté AB et que le côté CD soit partagé par un bord en deux segments de longueurs l et m , comme le montre la figure ci-dessous.



Trouver la valeur minimale du rapport l/m .
(on prendra pour inconnue la longueur AC).

LA COURBE DU VISITEUR

Un visiteur indécis souhaite se rendre chez trois de ses amis qui résident respectivement en A, B, C.

Partant du point I, il se dirige en ligne droite vers A, à mi-chemin entre I et A, en M_1 , il change d'idée et se dirige vers B, à mi-chemin entre M_1 et B, en M_2 , il change d'idée et se dirige vers C, à mi-chemin entre M_2 et C, en M_3 , il change d'idée et se dirige vers A, à mi-chemin entre M_3 et A, en M_4 , il change d'idée et se dirige vers B, etc...

Les points A, B, C sont donnés, non alignés, et le point I est supposé dans le plan (ABC).

Au bout d'un moment, le visiteur s'aperçoit que, depuis le début, il change de direction toujours aux trois mêmes points M_1 , M_2 et M_3 .

Qu'en résulte-t-il pour les points M_4 et M_1 ?

Déterminer alors le point M_1 et le point de départ I.
(Construire géométriquement ces points).

PUBLICATIONS DE L'IREM DE POITIERS. 1988 (cf. adresse page 2)

ÉLÉMENTAIRE (30 F l'une)

- Situations problèmes au cycle moyen
- De nouveaux nombres : une introduction (décimaux, fractions cycle moyen)
- Des idées pour la géométrie au C.M.
- L'énergie au C.M.

COLLÈGE

- Aires et périmètres : de l'élémentaire à la seconde
- Travail autonome en mathématiques
- Pour apprendre à démontrer : Géométrie de 4^{ème} (40 F)
- Les cahiers de 3^{ème} (applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; équations)
- 4^{ème} CPPN : Français - Math - Physique

Nouveaux programmes 6^{ème} - 5^{ème}

- Symétrie orthogonale
- Reproduction de figures planes
- Les fractions (fascicule 1)
- Les fractions (fascicule 2)
- Symétrie centrale
- Les fractions en 5^{ème}
- Géométrie dans l'espace (avec logiciel) (50 F)

- Calcul littéral au collège
- Géométrie plane en 5^{ème}

LYCÉE (30 F l'une)

- La statistique descriptive au lycée professionnel (enquêtes, représentations)
- Math - Physique «Alerte à l'entropie»
- Arithmétique au fil des âges
- Travail interdisciplinaire dans le second cycle
- Travail dirigé dans le second cycle
- Thèmes pour l'enseignement des mathématiques (terminales A2 A3)

THÈMES TOUS NIVEAUX

- Cahiers d'histoire des mathématiques et d'épistémologie (45 F)
- Colloque d'histoire des mathématiques et d'épistémologie (45 F)
- A nos réseaux pour une utilisation réfléchie des nanoréseaux en Ecoles - Collèges - Lycées (45 F)
- Disquette «A nos réseaux» (pour réseaux MO5 ou TO7) (60 F)
- Fiches d'évaluation de logiciels (30 F)
- et toujours les diapositives et les Ludi Maths (cf. bon de commande page 48)

Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1988-89

Pour les 4 numéros de :

Nom et prénom
ou établissement _____
Adresse complète _____
Code postal et ville _____

1983 1988
1984 1989
1985 1990
1986 1991
1987 1992

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre

payé par chèque

désire facture

nouvel abonné

Tarif normal
et établissement

Membre
Apmep

Supplément
tarif avion

Pour un an
Par année
supplémentaire

100 F

80 F

+ 40 F

Total à payer

+ 75 F

+ 60 F

+ 40 F

→

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Avec réduction

si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 88 -

REDUCTIONS 10% pour les abonnés au Plot
10% pour plus de 500 F d'achat

Prix unitaire -	Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40F Polyèdres n° 1 - Dossier technique			
40F Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*			
40F Aléatoire (PLOT 37)			
40F Papiers accrochés			
40F Pliages et mathématiques			
40F Pavages et symétries			
80F Dossier " Spécial π " (300 p. Adcs)			
20F Les Dossiers " Ludi-Math " (Poitiers)	n° 1	n° 2	
40F	n° 3	n° 4	
50F Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10F Affiches pour la classe : «Horizons Mathématiques» «Polyèdres dans l'espace» «l'Univers mathématique» 2 pavages hyperboliques à colorier.		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
40F Pochettes pour rétroprojecteur - n° 1 à 14	n° (4 et 5) : 40 F		
80F Pochettes de diapositives - n° 2 à 6 (n° 1 : 100F)	n°		
Frais d'envoi forfaitaire :		15 F	
		sous-total	
		- 10% pour les abonnés au PLOT	
		- 10% pour plus de 500 F d'achat	
		TOTAL à Payer	

Nom : _____

Adresse : _____

* Plot n° 39 ou Géométrie dédésiste (Rouen)

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

NOUVEAUTÉ

**PLOT
MATÉRIEL
1988
100 pages**

