

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Michel Clinard, Jacqueline Collet,
Roger Crépin, Luce Dossat,
René Gauthier, Georges le Nezet,
Ginette Mison, Serge Parpay,
Raymond Torrent.

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest, Caen et Clermont-Ferrand
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du
Centre National des Lettres

SOMMAIRE

| | |
|---|----|
| Éditorial..... | 1 |
| Gone with the wind. Michel Serfati-Paris..... | 2 |
| Combien mesure la côte de Bretagne. Collège de Kerolay..... | 7 |
| Évaluer : pour qui ? pour quoi ? Daniel Besnel-Paris..... | 15 |
| Activités numériques chez les 5-8 ans. Dominique Valentin-Inrp..... | 17 |
| Travaux pratiques en terminales scientifiques. Irem de Strasbourg..... | 19 |
| Informatiques et hétérogénéité en 6 ^e -5 ^e . Le Gall et Léger-Rennes..... | 23 |
| Une autre approche du collège. Christian Frattini-Le Canet..... | 27 |
| Réalisez une exposition avec vos élèves. Annie Berté-Bordeaux..... | 31 |
| Problèmes ouverts. Jacques Verdier-Nancy..... | 35 |
| Le développement opératoire des 12-14 ans. Dumousseau-Londeix-Bordeaux..... | 39 |
| Logiciels d'aide à la résolution de problèmes. Gras & Co-Rennes..... | 41 |
| Statistiques et probabilités. Paul-Louis Hennequin-Clermont-Ferrand..... | 43 |
| Le bulletin vert : pour qui ? pour quoi ?..... | 45 |
| Les films du Cndp. Demonget-Pelé-Paris..... | 47 |
| Abonnez-vous au Plot..... | 48 |

ÉDITORIAL

Enseigner les Mathématiques, pour qui ? pour quoi ?

La réponse est dans le vent.

Mercredi 14 octobre, de Brest, je roule vers Loctudy. Inquiet, je me pose quelques questions : n'a-t-on pas oublié quelque chose ? 800 congressistes, des ateliers surchargés, cela va nous poser des problèmes, et s'il y avait un gros pépin auquel on n'a pas pensé ?... Une seule de ces questions semble trouver sa réponse : à mesure que je me rapproche de Loctudy, il pleut de plus en plus. Le journal annonce une tempête. C'est dommage, certaines activités « sociales » vont être perturbées (visites des ports, sorties du samedi)...

A Loctudy, très vite les inquiétudes un boulot formidable des collègues arrive sans problème et trouve un lent sans problème, les repas sont naît son heure de gloire lors de Restent deux questions : « Enseigner pour quoi ? » Chacun est arrivé avec repartir en l'ayant consolidé.

plus que d'autres sur la question : se courte pour terminer cinquante enseigner les Mathématiques-Cornu explique brillamment, la recherche et la forêt et il expose les implications de l'informatiques des mathématiques fin, surprend tout le musclé : « Si le mathé-devenir plus cher » se coucher en se ditagne, c'est pas si

bien que certains ne retrouveront pas le chemin de leur chambre ou devront la quitter en pleine nuit ! D'autres passeront une nuit quasiment blanche. Le vendredi matin, il faut se rendre à l'évidence : plus d'eau, plus d'électricité, pas de téléphone, aucun espoir de retour rapide à une situation normale, plus de salle pour les assemblées générales. Il ne reste plus qu'à s'assurer que l'on va pouvoir rapatrier tout le monde, et je demande à Robert Amalberti d'annoncer aux collègues ce que je n'ai pas la force de dire : « C'est terminé ! » Tout le monde, ou presque, a compris que c'était la seule issue possible et, avec le recul, j'en suis toujours convaincu. Nous avons pensé qu'il était dommage que le travail de préparation des ateliers soit réduit à néant. C'est pourquoi nous avons demandé aux animateurs d'ateliers de nous présenter par écrit ce qu'ils auraient dit. Les réponses nombreuses nous permettent de sortir un numéro spécial du PLOT sur le congrès. Merci à l'équipe du journal.

Merci aussi à tous les collègues qui nous ont fait parvenir des messages d'amitié ainsi qu'à ceux qui ont participé au mouvement de solidarité. Merci enfin à tous les participants au congrès pour leur compréhension au moment du départ. La régionale APMEP de Brest leur donne rendez-vous dans... quelques années, à nouveau, dans le Finistère.

(1) Lire ces conférences dans le BGV de décembre 87 ou dans le bulletin vert de l'Apmep n° 362. Vous pouvez les obtenir en nous écrivant à la régionale de Brest (cf. adresse page 48).

André Treguer - Brest.



GONE WITH THE WIND

Michel SERFATI - PARIS

J'avais proposé à Port-Loctudy un atelier d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, studieusement consacré aux nombres irrationnels et transcendants aux 18^e et 19^e siècles. Avec les autres, il est parti avec le vent.



deux lignes plus bas, et très logiquement, son premier paragraphe: «Nécessité d'étudier ce sujet».

L'épistémologie, c'est en effet la description de comment «ça marche». Or, et avec cette incontestable définition, «faire» de l'épistémologie et l'histoire des Mathématiques peut en effet sembler une gageure à plusieurs titres.

On constate qu'il se dégage en effet, me semble-t-il, dans une part de la communauté mathématique, l'idée d'origine essentiellement platonicienne, que les objets et les preuves mathématiques préexistaient dans un monde d'idéalités, et en conséquence que les textes et les hommes eux-mêmes n'ont pas véritablement d'importance, puisque les mathématiciens, pour géniaux qu'ils fussent, n'ont fait que découvrir, sous des formes contingentes, des réalités éternelles, bref qu'ils n'ont fait «qu'ouvrir les rideaux». Même un mathématicien intuitionniste comme Heyting déclare quelque part que tous les mathématiciens pensent que, d'une façon ou d'une autre, ils ont affaire à des objets éternels.

De cette position philosophique fondamentale (et d'autant plus forte qu'elle est implicite), je voudrais d'abord développer ici les conséquences à mon avis néfastes sur le développement de l'épistémologie et l'histoire des Mathématiques.

Dans ces conditions en effet, et si l'on admet que les seuls objets intéressants préexistent, et indépendamment des hommes, une question devient claire et incontournable: **à quoi bon l'histoire?** Dans cette perspective, les mathématiques actuelles sont donc seules «vivantes» et actives, l'histoire est du côté de l'anecdote, des morts embaumés (parfois pieusement) mais ignorés, bref du côté de la poussière. C'est ce que constate Cavallés ((2), page 27/28). «L'histoire mathématique semble, de toutes les histoires, la moins liée à ce dont elle est véhicule; s'il y a lien, c'est *a parte post*, servant uniquement pour la curiosité, non pour l'intelligence du résultat.» C'est bien aussi, me semble-t-il, la conséquence que la plupart d'entre nous, avons tirée (implicitement le plus souvent), quand nous étions étudiants ou enseignants: lorsque rarement, il nous est arrivé de la croiser, l'Histoire des Mathématiques est apparue comme quelque chose de lointain, vulnérable, et poussiéreux; mais, à la vérité, et

Comparé à la force dévastatrice de l'ouragan extérieur, le charme paisible des travaux d'Euler ou de Liouville que j'y aurais traité m'a alors semblé un peu dérisoire. Dans cette présente et brève introduction, j'ai donc choisi - hommage à l'ouragan - non pas de résumer ce que j'aurais pu exposer sur place, mais de dire pourquoi je l'aurais fait, c'est-à-dire la nécessité et la difficulté de tout travail en épistémologie des mathématiques.

Tout exposé un peu cohérent devrait en effet à mon sens commencer par une étude de sa propre nécessité. C'est par exemple ce que fait excellentement Ferdinand de Saussure dans son cours de Linguistique Générale ((7), page 43). Après avoir intitulé son Chapitre 6: «Représentation de la langue par la parole», il dénomme aussitôt

une sorte d'inversion de l'ordre de la filiation...). De là, dans beaucoup trop de textes historiques, une floraison de discours du genre : « Euler n'a pas vu que... », ou bien « il lui manquait la notation indicelle », ou bien encore, et c'est le pire :

« Euclide était le génial précurseur de Cantor », énoncés qui sont tous à proprement parler a-temporels (très exactement comme la pulsion, telle que la décrit Freud) dans le double registre de l'anachronisme et de la téléologie, deux formes de style par lesquelles on peut croire pouvoir exclure le temps de l'activité mathématique.

En effet, si l'on admet de même que les objets mathématiques sont éternels, à quoi bon le temps qui ne pourrait que les « gâter » dans leur immuabilité ? Je parle ici du temps de la réalité, de celui dans lequel s'ancrent les hommes et l'histoire, et non du temps « aseptisé » qu'on trouve par exemple en cinématique, simple paramètre sans substance, qu'on pourra d'ailleurs « éliminer » pour trouver les équations de la trajectoire.

L'anachronisme, c'est la confusion temporelle par l'absence de référence logique de la chronologie au temps. C'est un moyen quotidien et efficace de nier à l'intérieur même de notre discipline la place essentielle du temps dans la vie des hommes... Pourtant, et comme disait Héraclite, « on n'entre jamais deux fois dans le même fleuve ».

Démontrer pour l'éternité

Cependant, n'est-il pas usuellement admis qu'une démonstration est « éternelle », et se reproduit partout identiquement à elle-même ? Il faut au contraire toute la finesse d'Apéry pour écrire ceci qui me paraît très profondément vrai : une démonstration mathématique, « c'est fait pour être **rejoué**, chaque fois, la plume à la main ». Pour jouer, il faut bien sûr un joueur, homme ou femme, qui n'est jamais ni tout à fait le même, ni tout à fait un autre.

Cet anachronisme est parfois « désarmant ». Dans « La pluralité et l'infini dans la mathématique grecque », Krasner montre que les questions à propos de la mathématique grecque que se pose Bourbaki ((1), p. 144/145) sont exprimées en langage « inadéquat » (c'est-à-dire anachronique), et n'ont littéralement aucun sens historique, je cite Krasner ((4), page 24) ; (*les citations de Bourbaki qui sont elles-mêmes dans le texte étant en italique*) : « Un point de vue particulièrement anti-historique a été exprimé par N. Bourbaki : il affirme que les rapports quelconques (comme c'est effectivement le cas pour les rapports rationnels, du moins quand ils étaient identifiés avec

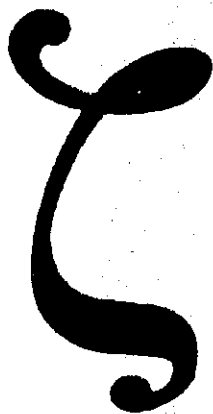
les fractions) ont joué le rôle des opérateurs des grandeurs continues (citons : « On notera que pour Eudoxe, les grandeurs d'une espèce donnée forment un système à une loi de composition interne (l'addition), mais que ce système possède une loi de composition externe avec pour opérateurs les rapports de grandeurs... Que ces rapports forment un domaine d'opérateurs pour toute espèce de grandeur... » « Ainsi l'idée géniale d'Eudoxe permettait d'identifier entre eux les domaines d'opérateurs définis par toute espèce de grandeur »). Or, du point de vue historique, cette affirmation, indépendamment de sa formulation en langage ensembliste inadéquat, est une bourde monumentale... »

L'histoire par les deux bouts

Pour prendre un exemple d'une autre nature : dans la terminologie la plus usuelle même, on constate quotidiennement ce désarmant anachronisme : dans le très populaire « algorithme d'Euclide », il y a toujours à la fois Euclide (200 à 300 ans avant Jésus Christ) et Al Khwarismi (9^e siècle après)...

Le temps « chronologique » éliminé, il ne reste plus qu'à lui substituer un temps « logique », qui fasse prendre sens, dans l'après-coup, à ce qui n'en avait pas dans les moments suspendus de l'incertitude d'une découverte. Or, le futur (mathématique ou autre) n'est inscrit nulle part. Cependant, une fois au jour la découverte, on se hâte d'oublier les ombres de l'incertitude, dans un après-coup rassurant du côté du sens. Et le procédé a pour nom téléologie : l'histoire des Mathématiques, c'est trop souvent une histoire qui se raconte par sa fin : par exemple « Cauchy n'avait pas vu qu'il lui manquait la convergence uniforme... » Pareille phrase est écrite et pensée depuis aujourd'hui, et évidemment non telle qu'elle s'est posée « in vivo ». A mon sens, un tel énoncé évacue, « par définition, une part de ce qu'il doit en être du travail d'un épistémologue.

L'intérêt de l'étude d'une définition, c'est en effet aussi de comprendre pourquoi elle aurait pu ne pas être. Par exemple, Euler aurait pu établir son clivage algébrique/transcendant de part et d'autres des séries entières, et non de polynômes, comme il l'a fait. Les séries entières s'expriment en effet aussi uniquement à l'aide des « opérations ordinaires de l'Algèbre », comme il le dit dans la préface de l'*Introductio*. Mais son intuition fondatrice était d'ailleurs : si « ces mêmes opérations étaient répétées une *infinité de fois*, alors, il s'agissait pour Euler d'objets d'une autre nature (qu'il dénomme transcendants). Rien d'étonnant, mais rien de vraiment nécessaire non plus.



Mais après quoi, tout le monde s'affaire à présenter comme «évident» ce qui n'était pourtant pas allé de soi, c'est-à-dire faire comme si aucune question ne s'était posée. C'est exactement la modalité psychique de «l'après-coup», qui réordonne le passé en fonction du présent, et dont on comprend bien comme elle est tentatrice, tant elle donne l'impression de comprendre et d'accepter une apparente nécessité qui aurait été sous jacente. Elle n'est certes pas inutile, mais elle laisse pourtant complètement de côté l'analyse d'un vrai problème : ce qu'il en est de la question de la recherche de celui qui ne sait pas ce qu'il cherche : et, comme on sait, cette situation est bien souvent la règle.

La téléologie

Un épistémologue conséquent doit donc, à mon sens, se méfier de la téléologie, cette pente savonneuse, comme le dit si bien Fichant dans «Sur l'Histoire des Sciences» ((3), page 102) à propos de l'histoire des mathématiques : «La téléologie est le lien extrinsèque qui fonde l'avant sur l'après en réduisant l'avant à l'après, sous les espèces de la préformation, de la préfiguration, de l'anticipation. D'où le souci de la recherche des «sources» et des filiations, et la chasse aux précurseurs. Mais on peut dire aussi bien que l'après est ramené à l'avant, puisque tout était en un sens déjà là, enveloppé dans les ombres de la préexistence. Dès lors, pourquoi l'histoire ? Sinon peut-être comme discours moralisant, leçon de patience et de modestie : il faut attendre que le sucre fonde, comme dit Bergson. Mais rien ne s'est passé».

Cette conclusion, pour être en partie fondée, me paraît néanmoins beaucoup trop pessimiste. J'opposerai d'abord à Fichant un très beau texte d'Henri Lebesgue à propos d'un théorème d'Hermite. Il est d'abord nécessaire de le faire précéder d'un exposé historico-mathématique.

La transcendance

Nous sommes en 1873 : Charles Hermite, mathématicien établi, savant républicain, publie aux Comptes-Rendus un vrai feuilleton en quatre épisodes, un texte modestement intitulé «Sur la fonction exponentielle». Titre modeste en effet, car il s'agit de la transcendance de e . C'est-à-dire : il n'y a **aucune équation** algébrique (à coefficients entiers), dont soit solution le nombre e . Parmi les irrationnels, ce nombre, pourtant usuel, n'est vraiment pas simple, pas de la «famille». C'est ce qu'Euler avait déjà conjecturé longtemps, plus d'un siècle, auparavant dans son *introduction*. Mais c'est aussi la première fois qu'on démontre la transcendance d'un nombre usuel de l'Analyse.

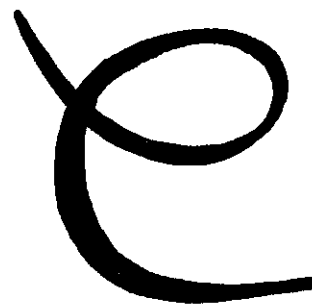
Imaginez que vous ayez à démontrer que «quelque chose» n'est racine d'aucune équation ! Essayez vraiment un peu pour voir ! De quoi allez-vous partir ?

Ce théorème d'Hermite est en réalité une sorte de monument, de machinerie subtile, mais assez peu claire (aux dires mêmes de Dieudonné ((6) page 27) à démontrer la transcendance. «Logiquement», Hermite aurait du s'occuper de la même façon du nombre π , plus important encore, car à démontrer pareillement que π ne vérifie aucune équation algébrique, on établit aussitôt l'impossibilité de la quadrature du cercle, conjecture très désirable puisque deux fois millénaire Hermite pourtant se détourne publiquement et définitivement de cette question (dans une lettre à Borchart, et pour de bien curieuses raisons !); et c'est un mathématicien allemand obscur, Lindemann, qui, en 1882, neuf ans après,* ajoutant deux «ingrédients mineurs» à toute la méthode d'Hermite, démontre la transcendance de π , avant de retourner à son obscurité première. Tout ceci se déroule à la fin du siècle dernier sur fond de querelle franco-allemande (pour plus de détails, on pourra consulter (8)).

Nous en sommes maintenant en Juin 1932, quarante ans après Lindemann. Henri Lebesgue publie un article ((5)) dans un journal suisse «L'enseignement Mathématique», revue pédagogique, destinée donc à des enseignants (et ceci est important), où il étudie d'abord complètement et dans leur détail mathématique les théorèmes d'Hermite (et secondairement de Lindemann).

Lebesgue recherche patiemment les vraies intuitions d'Hermite, comment celui-ci se rattache à Lambert, etc. Et, une fois ceci fait, et qui est **essentiel**, Lebesgue ((5), page 266) : «Si on veut bien relire Hermite et Lindemann, on verra que ce qu'ils disent ne nous paraît pas très clair. Ils ont moins bien compris que nous ce qu'ils ont fait».

Freud aurait pu signer cette dernière phrase. Lebesgue y souligne sans défaillir le rôle du travail inconscient dans la production des Mathématiques. Si, en effet, Hermite, en le faisant, ne savait pas trop ce qu'il faisait, mais le faisait quand même, c'est bien que le sujet Hermite ne se réduit pas ici à sa conscience. Vérité première de l'organisation inconsciente : pour une part, le sujet ne sait pas ce qu'il sait. A mon sens, et dans toute la mesure du possible, la mise en avant de la part de l'organisation inconsciente de la psyché dans la recherche et la création mathématique doit faire aussi partie de toute étude épistémologique. C'est une exigence que Bachelard avait vigou-



reusement reconnue, et tenté de mettre en œuvre.

De Lebesgue encore, et plus loin, ceci : «aussi la pudeur la plus élémentaire obligera à être assez prudent pour ne pas masquer le caractère artificiel de l'exposé de forme analytique qu'il nous est possible après coup de bâtir. «Autrement dit, les démonstrations «modernes» masquent les intuitions, mystifient «analytiquement» le lecteur».

Les fresques historiques

Ma conclusion sera donc mesurée : En Histoire et épistémologie des Mathématiques, les «fresques historiques», ont leur part de nécessité, car elles «font sens»; souvent ennuyeuses, elles ont, à mon sens, beaucoup trop tendance à «envahir le marché», pour les raisons que j'ai déjà dites, et qui tiennent à la fois à l'idéologie, et à la facilité.

A mon avis, l'autre face, le vrai travail de l'épistémologue, est donc ici modeste et difficile : car on ne peut faire d'histoire des mathématiques sans faire vraiment des mathématiques elles-mêmes, c'est la difficulté même de ce travail ; ce qui rend par exemple bien plus long, techniquement parlant, et pour un mathématicien non spécialiste du sujet, les études historiques véritables après 1900. Et c'est ce que font, me semble-t-il, trop peu d'historiens. C'est-à-dire d'abord ne travailler que sur le texte de l'auteur, (ou à défaut une traduction sûre), et non sur les «interprétations» et «simplifications» postérieures qui sont trop souvent et nécessairement mystificatrices. En d'autres termes encore, il faut retrouver l'intime conviction de l'auteur, tâcher de comprendre l'histoire des idées mathématiques dans le moment même de leur création, (c'est ce que faisait Lebesgue à propos de Hermite, comme ailleurs avec Lambert), reconnaître et épingler ce qui a été en jeu dans une démonstration ou une définition dans l'instant même où elle se crée, et non depuis aujourd'hui, et à partir de pseudo discours «du sens» : à mon sens, la méfiance envers le discours du *télos* peut ici servir de guide épistémologique.

L'histoire de l'histoire des maths.

Je terminerai sans optimisme excessif et dans une apparente contradiction : d'une part, il me paraît nécessaire, comme je l'ai dit plus haut à propos de Lebesgue, qu'un épistémologue et un historien en Mathématiques soit lui-même un mathématicien ; d'autre part, je pense que la conception de l'histoire et de l'épistémologie que je soutiens ici rendent difficilement conciliables les métiers de chercheur en Mathématiques, et d'épistémologue. Il s'agit ici de raisons essentielles, de faits de structure : comme

on peut le penser, et s'agissant d'un état de fait aussi solidement établi, et depuis si longtemps, la conception «platonicienne» de l'histoire (et ses conséquences) n'est pas un effet de hasard, ni de superficialité : cette méconnaissance est dans le jeu (comme aurait dit Lacan), et les mathématiques se bâtissent en effet pour une part de refuser leur passé (*ce point nécessite évidemment une longue étude spécifique*). On le constate quotidiennement. En voici un exemple banal, mais caricatural : c'est en «oubliant» (mais évidemment, tout en le conservant ailleurs soigneusement) la «rusticité» de l'angle droit pythagoricien, qu'on construit les espaces de Hilbert. Cette réécriture perpétuelle des mathématiques est un fait de structure qui leur est coextensive : elle leur permet «d'avancer». Et elle est en même temps un profond facteur de ce que l'on pourrait appeler «oubli», si «refoulement» n'était ici le mot adéquat, puisqu'il y a à la fois nouvelle inscription, et conservation de la trace ancienne. Ce refoulement est structurant, ce qui est sans surprise. Cavailles ((2), p. 27/28) ne dit pas autre chose : «Le mathématicien n'a pas besoin de connaître le passé parce que c'est sa vocation de le refuser...».

Il ajoute : «l'œuvre négatrice d'histoire s'accomplit dans l'histoire», ce avec quoi je ne suis pas nécessairement d'accord, comme je l'ai dit. Mais ceci est une autre Histoire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Bourbaki** (N) : «Topologie Générale», Chap. IV (Nombres réels), Note Historique, p. 144-145, Hermann, Paris 1942).
- [2] **Cavaillès** Jean : «Philosophie mathématique», Hermann Editeur Paris 1962.
- [3] **Fichant** et **Pêcheux** (Michel) : «Sur l'Histoire des Sciences» Maspéro Paris.
- [4] **Krasner** Marc : «La pluralité et l'infini dans la Mathématique grecque» Collection Philosophie et Mathématiques. Publications de l'École Normale Supérieure. Séance du Séminaire de Philosophie et Mathématiques du 31 Janvier 1979.
- [5] **Lebesgue** Henri : «L'enseignement Mathématique» Genève, Juin 1932. «Sur les démonstrations dites élémentaires de la transcendance de e et π ».
- [6] «**Penser les Mathématiques**» : (Ouvrage Collectif) Collections Point Sciences. Editions du Seuil Paris 1962.
- [7] **de Saussure** (Ferdinand) : «Cours de Linguistique Générale» Payot Editeur Paris 1964).
- [8] **Serfati** (Michel) : «La quadrature du cercle et autres contes...» (Dans «Fragments d'Histoire des Mathématiques» N° 3 Publication APMEP. à paraître.

π

COMBIEN MESURE LA CÔTE DE BRETAGNE ?

Collège de KEROLAY - Lorient

Nicole BOUET - Marie-Françoise COSTE-ROY
Pierre Le GUERVEL - Monique VALLÉE

Le thème du projet d'action éducative a été proposé par l'IREM de Rennes, qui souhaitait que la venue à Rennes de l'exposition «Horizons Mathématiques» permette d'avoir une coloration régionale et soit l'occasion d'un travail concret dans certaines classes. Après une première prise de contact en juin 1986, le travail s'est déroulé au premier trimestre 1986-1987.

EN QUOI CONSISTE LE TRAVAIL

Il s'agit de mesurer la longueur d'une partie d'une côte rocheuse sur une carte avec divers pas. On constate que la longueur continue à augmenter - à cause des anfractuosités - quand le pas de l'instrument de mesure diminue. Cette augmentation suit même une loi du type suivant : «quand le pas de l'instrument de mesure diminue de moitié la longueur est multipliée par un nombre fixe», nombre dont on peut déterminer une valeur approchée pour le tronçon de côte étudié.

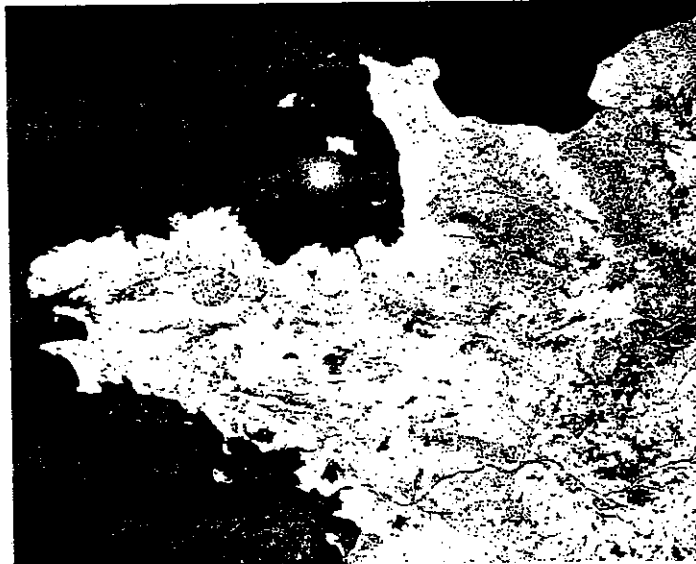
Grâce aussi à l'outil informatique, tout un travail expérimental de mise au point du modèle de la côte est possible : modification des paramètres, intervention du hasard pour faire plus naturel.

Les différents résultats : calculs et dessins ont été présentés sous la forme d'une quinzaine de panneaux, lors de l'exposition «Horizons Mathématiques» au mois de janvier à Rennes, puis lors d'une exposition au collège Kerolay au deuxième trimestre.

RÉALISATION ET COMPORTEMENT DES ÉLÈVES :

Première étape : sur le terrain

Les élèves de 3 classes du collège de Kerolay de Lorient sont allés sur place à Fort Bloqué en Ploemeur pour mesurer la côte. Armés de fils, de doubles décimètres, de mètres ruban, de décamètres ils ont mesuré : le bord de l'eau ou le bord de la falaise ou le chemin des douaniers. Parfois ils sont passés sur les rochers, par-



fois ils les ont contournés. Certains mesuraient tous les recoins, d'autres tendaient leur fil au-dessus des anfractuosités.

Chaque groupe d'élèves a donné son résultat, persuadé d'avoir la bonne réponse, mais ils ont été très déçus de voir autant de mesures différentes et presque choqués de savoir que leur travail sur place ne pouvait être retenu.

Les professeurs de géographie qui nous accompagnaient ont profité de la sortie pour faire l'historique et la géographie des lieux. Les élèves avec le professeur de sciences naturelles ont étudié les différentes couches géologiques d'une falaise et ils ont observé les différentes plantes du littoral.

Conclusion :

Pour faire cette mesure, les élèves étaient très libres ; ils avaient le choix de l'instrument de mesure mais ils attendaient de notre part une définition de la côte. Cette définition nous manquait.

Est-ce le chemin des douaniers ? Ou comme le disent les géographes, le bord de l'eau à marée basse ? à mi-marée ? à marée haute ?

Quelques groupes avaient décidé de mesurer le bord de la falaise entre deux points précis : devant la différence des résultats, ils voulaient absolument savoir qui avait le mieux travaillé, celui qui contournait une pierre ou celui qui ajoutait un mètre à cause des galets.

Cette promenade a été intéressante car elle a rendu un peu plus curieux les élèves, ils désiraient continuer la recherche mais en changeant de méthode.

Deuxième étape : travail sur carte

Étude sur des cartes IGN échelle 1/25000°.

Exercice préliminaire :

- Lire l'échelle, faire les correspondances entre les mesures de la carte et les mesures réelles.
- Distance de deux points de la carte avec l'aide du compas : report de distance.

Mesures des côtes :

En utilisant du papier calque reproduire à l'aide du compas une ligne brisée qui représentera la côte pour un pas donné et mesurer la longueur de cette ligne ; les pas choisis ont été en cm de 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; et même 0,25.

Voici trois tableaux de résultats :

Premier groupe : Côte de Lomener - Fort Bloqué en Ploemeur :

| | | | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| n° des essais | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| pas en cm | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 |
| l : longueur en cm | 25,6 | 27,2 | 29,4 | 32,7 | 35,6 | 40,7 | 42,8 |

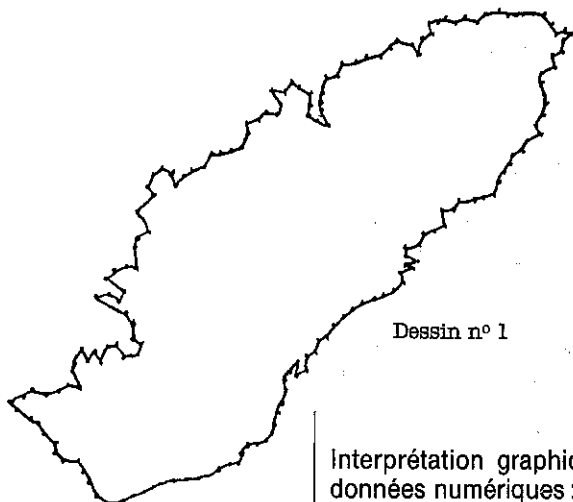
Deuxième groupe : Côte de Belle Ile

| | | | | | | | |
|--------------------|----|------|------|------|------|-----|------|
| n° des essais | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| pas en cm | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 |
| l : longueur en cm | 36 | 37,5 | 42,7 | 49,3 | 56,7 | 67 | 83 |

Troisième groupe : Ile de Groix

| | | | | | | |
|--------------------|----|------|------|------|----|-----|
| n° des essais | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| pas en cm | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 |
| l : longueur en cm | 66 | 68,4 | 71,5 | 76,4 | 82 | 90 |

(voir dessin n° 1)



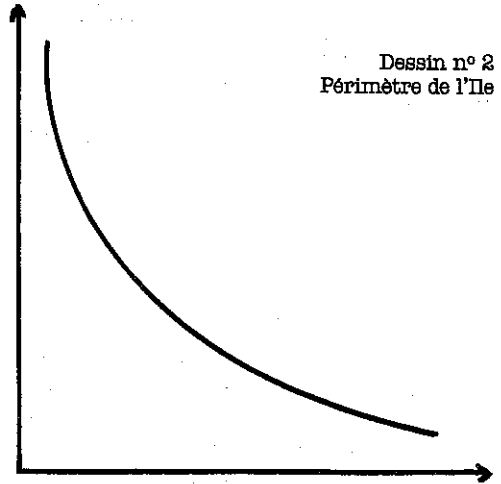
Dessin n° 1

Interprétation graphique des tableaux de données numériques :

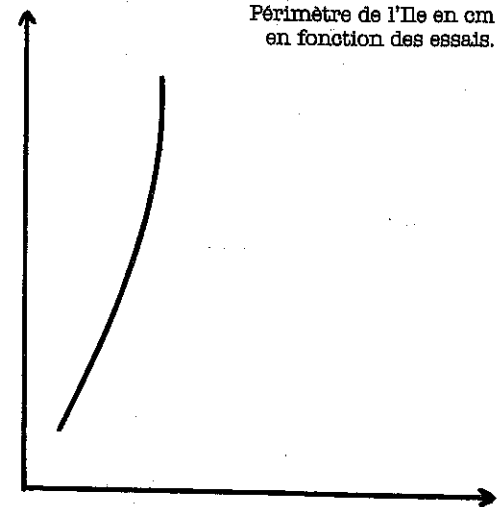
Première représentation : Le graphique représente la longueur en cm en fonction du pas en cm.

Deuxième représentation : Le graphique représente la longueur en cm en fonction du numéro des essais. (cf dessins n° 2 et 3).

Dessin n° 2
Périmètre de l'Ile



Dessin n° 3
Périmètre de l'Ile en cm
en fonction des essais.



Comportement des élèves :

Le travail sur calque fut très rapidement fait et particulièrement soigné. La mesure de la côte sur les cartes tout en étant plus facile que sur site naturel a été parfois discutée. Sur une carte sont indiqués les digues, les plages, les lignes de niveau ; l'altitude 0 est parfois éloignée de la bordure rocheuse ; les élèves réfléchissaient et choisissaient eux-mêmes. Cette partie du travail a motivé les élèves et ils comparaient sans cesse leurs dessins et leurs résultats.

Les dessins des courbes graphiques furent assez difficiles à faire. Il fallait faire comprendre aux élèves que la courbe pouvait passer entre des points trouvés, elle pouvait aussi ignorer un point trop éloigné. Il fallait leur faire admettre qu'une mesure physique n'est pas une mesure réelle, qu'elle n'est souvent qu'une valeur approchée et que tout manipulateur aussi adroit soit-il peut faire des erreurs.

Le rôle des graphiques :

Les deux graphiques montraient nettement que plus le pas diminuait, plus la longueur de côte augmentait et expliquait en partie le travail qui avait été fait sur Site naturel.

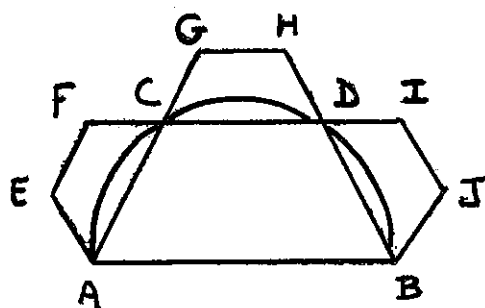
Avec le deuxième graphique on pouvait imaginer d'autres essais, avec des pas plus petits et y associer une longueur de côté encore plus grande, cette longueur devenant impossible à trouver sur la carte.

Conclusion :

Ce fut un travail qui a encore intéressé tous les élèves. Il fut relativement vite fait. Le deuxième graphique avec le numéro des essais préparait l'introduction des log.

Troisième étape : la fractale KEROLAY :

Lors du travail sur carte le pas était à chaque essai divisé par 2, nous avons cherché et construit une ligne qui offrait cette propriété et elle fut baptisée fractale Kérolay.



Dessin n° 4

D'après le dessin on remarque :

1) que sur chaque côté on peut construire un demi hexagone régulier,

2) que $AB = 2AC$, $AC = 2AE$ en suivant ACDB la longueur est l_1 , en suivant AEFCGHD IJB la longueur est l_2 et $l_2 = 3/2 l_1$.

Un dessin d'une fractale Kerolay (n° 5) a été distribué aux élèves.

a) Les élèves devaient retrouver les différents essais n° 4, puis n° 3, n° 2, puis AB.

b) Ils devaient noter et expliquer les résultats réunis dans ce tableau.

x est la longueur en cm du côté de l'hexagone (pas).

y est la longueur en cm de la ligne correspondante.

| n° des essais | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| x | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| y | $l_1 = 16$ | $l_2 = 24$ | $l_3 = 36$ | $l_4 = 54$ | $l_5 = 81$ |

c) Ils devaient découvrir le coefficient 3/2 qui apparaît dans $l_2 = 3/2 \times l_1$

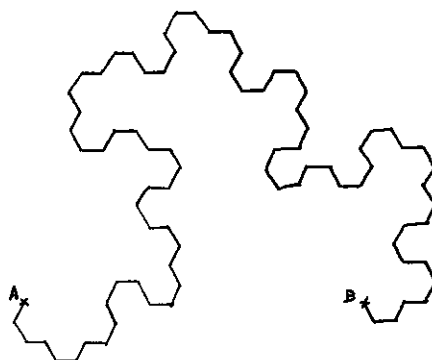
$$l_3 = 3/2 \times l_2 \dots$$

$$l_n = 3/2 \times l_{n-1}$$

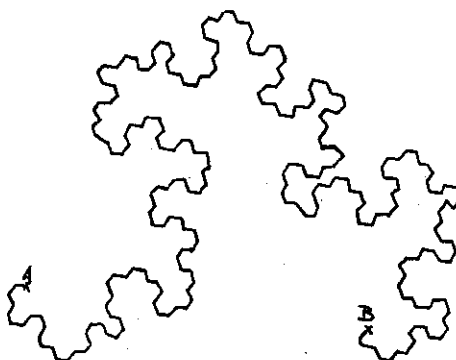
puis les puissances de 3/2 dans $l_3 = (3/2)^2 \times l_1 \dots l_n = (3/2)^{n-1} \times l_1$

d) Ils pouvaient facilement prolonger le tableau essai n° 6, essai n° 7... et calculer les longueurs correspondantes.

e) Ils devaient faire le dessin de la fractale proposée pour l'essai n° 6 et suivant leur imagination fabriquer d'autres lignes fractales Kerolay (voir dessins n° 5 et 6).

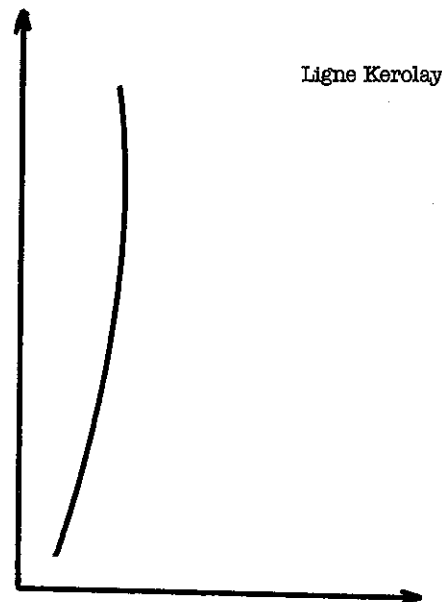
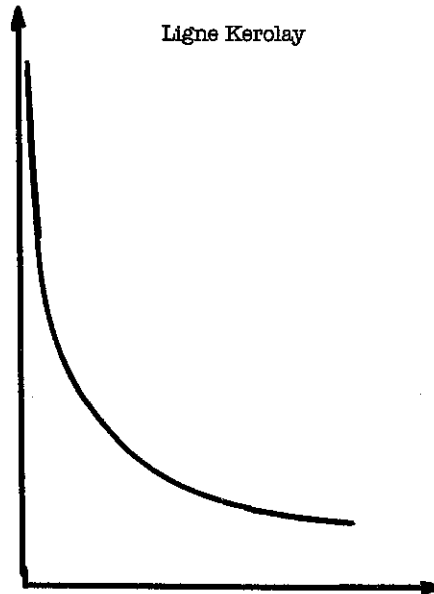


Dessin n° 5



Dessin n° 6

f) Interprétation graphique des tableaux. Comme pour les mesures de côtes deux représentations graphiques furent faites. La première : longueur de la ligne en fonction du pas. La deuxième : longueur de la ligne en fonction du numéro des essais. (voir dessins n° 7 et 8).



Comportement des élèves :

Les élèves ont été tous intéressés par la fabrication des dessins, nous avons eu de belles et de nombreuses réalisations.

C'est seulement à l'aide des machines que nous avons pu faire assez facilement découvrir le nombre 1,5; le nombre 3/2 étant fractionnaire n'était guère retenu bien que mis en évidence dès le premier dessin. Un seul élève sur deux classes présentes a vu les puissances successives de 1,5.

Ils préférèrent écrire

$$l_5 = 5,0625 \times l_1 = 81/16 \times l_1 \text{ et } l_5 = 1,5^4 \times l_1$$

au lieu de $l_5 = (3/2)^4 \times l_1$.

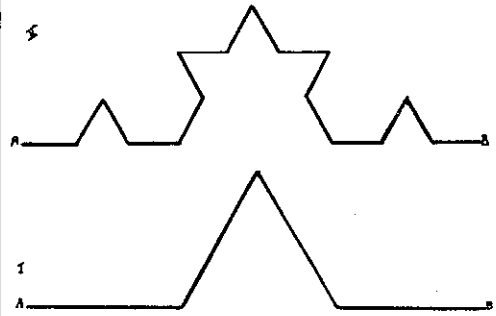
Les courbes obtenues dans les graphiques étaient des courbes mathématiques, les points que l'on utilisait étaient des points exacts et ici on ne pouvait ni les éviter, ni passer à côté; cet exercice fut assez difficile

pour certains élèves, mais tous étaient d'accord pour reconnaître que les graphiques obtenus à partir de la ligne fractale Kerolay ressemblaient à ceux obtenus à partir des mesures de la côte. On constatait encore que plus le pas diminue plus la longueur augmente.

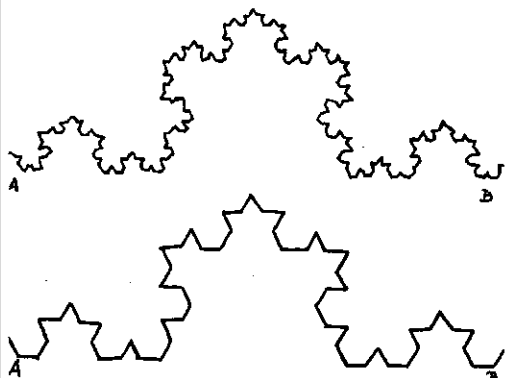
Quatrième étape : courbe de Koch

Étude de la ligne fractale Koch

A l'aide de dessins fournis par nous aux élèves, nous avons fait découvrir la façon de dessiner une ligne fractale Koch (voir dessins n° 9 et 10).



Dessin n° 9



Dessin n° 10

Le tableau de données numériques suivant fut réalisé :

| n° des essais | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| x (pas en cm) | 27 | 9 | 3 | 1 | 1/3 |
| y (longueur en cm) | $l_1 = 27$ | $l_2 = 36$ | $l_3 = 48$ | $l_4 = 64$ | $l_5 = 256/3$ |

Le coefficient 4/3 devait être trouvé dans : $l_2 = 4/3 \times l_1$; $l_3 = 4/3 \times l_2$; ... $l_n = 4/3 \times l_{n-1}$

Puis les puissances de 4/3 dans : $l_3 = (4/3)^2 \times l_1$; ... ; $l_n = (4/3)^{n-1} \times l_1$.

Les interprétations graphiques des tableaux ont été réalisées comme dans l'étape précédente.

Comportement des élèves :

Encore beaucoup de dessins cela plait toujours, les dessins sont soignés, précis.

Pour beaucoup d'élèves la mise en évidence du coefficient $4/3$ fut lente... $4/3$ n'était pas un décimal la machine devenait presque inutile, et certains élèves ont alors décroché, ils préféraient dessiner.

Ceux qui sont restés ont trouvé assez rapidement la loi donnant l_n en fonction de l_1 et cette quatrième étape fut assez vite faite contrairement à la précédente.

Cinquième étape : Échelle logarithmique

Notre problème était maintenant d'expliquer aux élèves une nouvelle échelle, celle des log, pour avoir des graphiques plus faciles à exploiter.

Au cours d'un exercice fait en classe nous avons travaillé sur les puissances successives de 10, de 5, de 2. Nous avons demandé de représenter pour x naturel f_1, f_2, f_3 telles que
 $f_1(x) = 10^x; f_2(x) = 5^x, f_3(x) = 2^x$.

En quatrième un exposant ne peut être qu'entier, pourtant la plupart des élèves ont relié les points et ont obtenu trois courbes. Ils avaient l'habitude de ces courbes, ont-ils dit, avec les fractales.

A l'aide des machines et du graphique ils ont découvert que des puissances comme

$2^{4,5}; 5^{2,5}$ ou $10^{1,8}$ existaient (lecture sur le graphique, vérification à la machine).

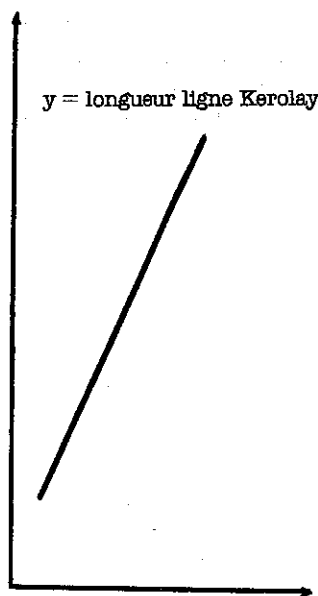
A l'aide des machines et en utilisant les touches log et y^x nous avons alors calculé des puissances de 10 à exposant décimal ; par exemple $10^2 = 100$,
 $10^{1,8} = 63,09...$ $10^{3,2} = 1584,89..$
 puis constaté $\log 100 = 2$
 $\log 63,09.. = 1,8$ $\log 1584,89.. = 3,2$.

Nous avons alors admis que tout nombre positif pouvait s'écrire sous forme d'une puissance de 10 et que l'exposant était indiqué par la touche log de la machine.

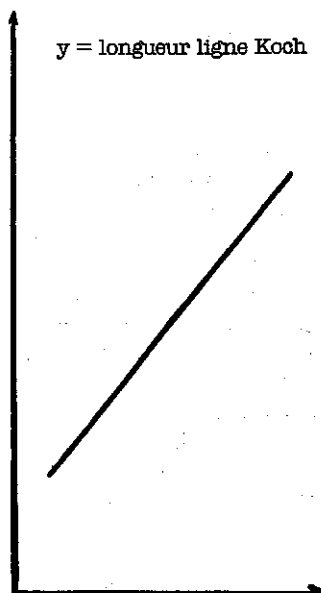
Cette partie a donné beaucoup de soucis aux professeurs, mais les élèves ont très bien accepté cela : pour eux la machine ayant naturellement raison.

En utilisant les machines, il a été facile de compléter les tableaux de données numériques faits pour les fractales de Kerolay et de Koch en y ajoutant une ligne exprimant le log de la longueur appelé log y .

Pour chaque cas une représentation graphique a été construite, exprimant log y en fonction du numéro des essais (voir dessins n° 11 et 12).



Dessin n° 11



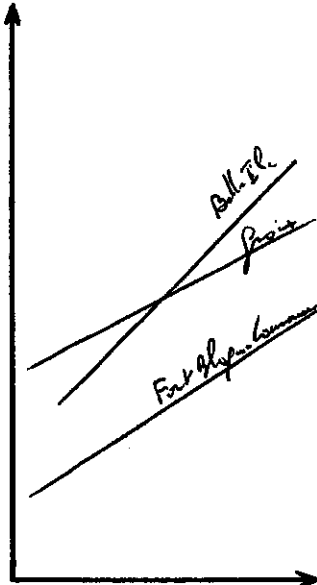
Dessin n° 12

La découverte par les élèves des points alignés les a satisfaits, enfin une courbe facile à construire !

Nous avons pu avec certains trouver une longueur de la ligne des essais n° 7, 8, 9 en utilisant le graphique et la machine.

Sixième étape : retour à la côte

Pour chacune des côtes étudiées nous avons complété le tableau en ajoutant comme pour les fractales une ligne indiquant le log de la longueur et nous avons demandé aux élèves de représenter dans un même plan log l en fonction du numéro des essais pour les trois côtes. Les points sont sensiblement alignés et nous avons pu alors écrire, la côte est une fractale ! (voir dessin n° 13).



Dessin n° 13

Conclusion :

Une dizaine d'élèves ont été vraiment passionnés par ce travail, nous les avons vus servir de guide à leurs parents lorsque ceux-ci sont venus voir l'exposition au collège et les explications qu'ils donnaient étaient complètes. Pour beaucoup d'autres les dernières parties furent difficiles, le projet était peut être alors devenu trop ambitieux pour des élèves moyens de quatrième. Mais tous les élèves ont pris plaisir à travailler sur les cartes, à faire les dessins, ils ont mieux compris la construction d'une ligne fractale que le calcul de sa longueur à un stade précis.

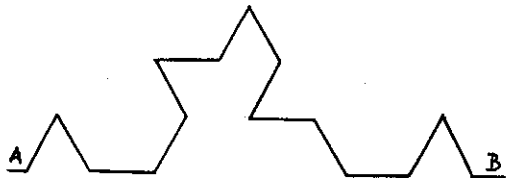
D'autre part ce travail nous a permis de travailler sur des graphiques, de prévoir des résultats, de se servir des machines pour expliquer de nouvelles notions puis pour les vérifier ; les élèves aiment beaucoup les machines.

Septième étape : dessins en LOGO

Il s'agissait d'utiliser l'outil graphique informatique fourni par LOGO pour dessiner rapidement un grand nombre de fractales, et faire un travail expérimental sur les paramètres pour se rapprocher du contour d'une côte naturelle.

L'idée de base était très simple : introduire dans des fractales basées sur des triangles, comme la courbe de Koch :

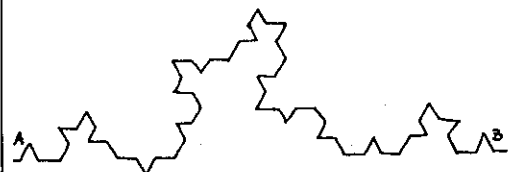
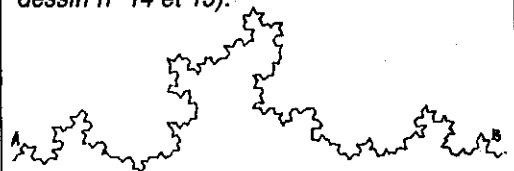
- le hasard : on décide au hasard si les triangles vont être rentrants ou sortants,
- un paramètre, l'angle du triangle.



Dessin n° 14

Si l'angle vaut 60°, on tombe sur des variantes de la courbe de Koch, telles que les ont dessinées les élèves.

Si l'angle prend d'autres valeurs, on obtient des tracés plus ou moins « rocheux ». (Voir dessin n° 14 et 15).



Dessin n° 15

LES PROGRAMMES LOGO

Ils peuvent être réalisés sur TO7.

a) KOCH

Le programme pour la courbe de Koch est bien connu :

```

POUR KOCH :L :N
SI :N = 0 [STOP]
SI :N = 1 [AV :L]
KOCH :L/3 :N - 1 TG 60
KOCH :L/3 :N - 1 TD 120
KOCH :L/3 :N - 1 TG 60
KOCH :L/3 :N - 1
FIN
    
```

Le programme est récursif : le programme Koch à la n -ième étape appelle quatre fois le programme Koch à la $n-1$ -ème étape, toutes les longueurs étant divisées par $1/3$ d'une étape à l'autre (voir dessin n° 16).

b) KOCHA

On introduit le paramètre de l'angle : on ne tourne plus de 60° , mais avec le choix de l'angle. On peut penser à l'image suivante : on a un mètre pliant plus ou moins replié.

```

POUR KOCHA :L :N :A
SI :N = 0 [STOP]
SI :N = 1 [AV :L]
KOCHA :L/3 :N - 1 :A TG :A
KOCHA :L/3 :N - 1 :A TD :A*2
KOCHA :L/3 :N - 1 :A TG :A
KOCHA :L/3 :N - 1 :A
FIN
    
```

(Voir dessin n° 17)

c) HKOCHA

On introduit le hasard : à chaque fois qu'on doit tourner on «tire à pile ou face» de quel côté on tourne.

```

POUR HKOCHA :L :N :A
SI :N = 0 [STOP]
SI :N = 1 [AV :L]
DONNE «H HASARD 2
SI :H = 0
(HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TG :A [
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TD :A*2
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TG :A
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A]
(HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TD :A [
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TG :A*2
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A TD :A
HKOCHA :L/3 :N - 1 :A]
FIN
    
```

(voir dessin n° 18)

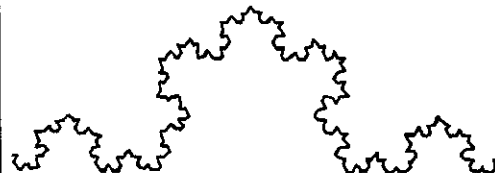
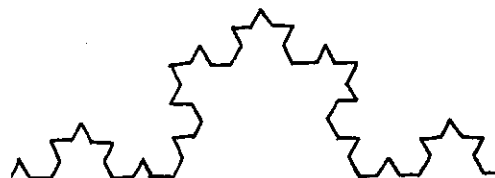
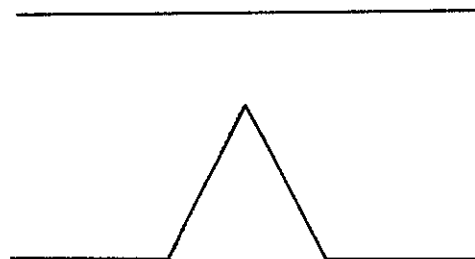
Le travail avec les élèves de quatrième

Aucun enseignant du collège n'a participé à la mise au point des programmes qui ont été réalisés à l'IREM. Une séance de fin de trimestre a été organisée. On a montré aux élèves les différentes courbes obtenues, sur Mac Intosh.

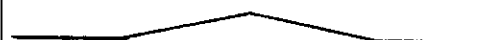
Les élèves ont été intéressés par les dessins. Ils ont dit «c'est une plage» quand l'angle était petit, et sont tombés d'accord que ce qui ressemblait le plus à une côte rocheuse était obtenue pour un angle entre 40° et 50° . (voir dessin n° 19).

Conclusion :

Il est un peu dommage que ce travail n'ait pu être relayé par des enseignants du collège. Un élève en particulier souhaitait mettre au point les programmes sur TO7, mais il a été arrêté par des problèmes techniques.



Dessin n° 16



Dessin n° 17

Des dessins sur ordinateur en couleur, parus dans Sciences et Avenir, ont été utilisés sur les panneaux réalisés par les élèves en raison de leur esthétique.

a) Koch 243 1

b) Koch 243 2

c) Koch 243 4

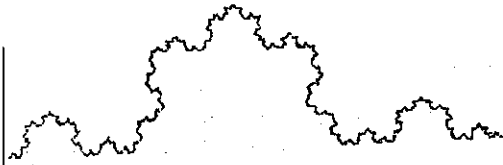
d) Koch 243 6

a) Kocha 243 2 10

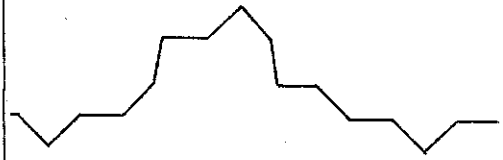
b) Kocha 243 2 50

c) Kocha 243 5 30

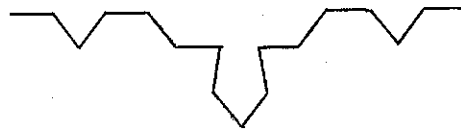
Kocha 243 5 50



Hkocha 243 3 40



Hkocha 243 3 50



Dessin n° 18

a = 15 Plage



a = 45 Rocher



Dessin n° 19

VERS LA NOTION DE DIMENSION FRACTALE

Les lignes qui suivent n'ont plus de rapport direct avec les activités des élèves, mais correspondent au travail théorique fait par les enseignants associés au projet, et qui les a conduits au seuil de l'étude du concept de dimension fractale.

Le travail des élèves a dégagé que lorsqu'on fait des graphiques sur les côtes rocheuses ou sur les courbes Kerolay et Koch un graphique portant en abscisse le numéro des essais et en ordonnée le log de la longueur fait apparaître des droites. Cela signifie qu'on a mis en évidence une loi du type suivant : « quand la longueur du pas diminue dans une proportion fixe, la longueur augmente dans une proportion fixe ».

Cette loi donne un contenu précis à l'impression qualitative qu'on a en regardant une côte rocheuse : la partie est semblable au tout.

Mais on constate aussi que la pente des droites obtenues est différente suivant l'objet considéré : cette pente est plus importante pour Belle-Ile que pour l'Ile de Groix. Quand on réfléchit un peu, on comprend que si la pente est plus grande, c'est que la longueur augmente plus dans un cas que dans l'autre, c'est-à-dire, par exemple, que Belle-Ile est plus rocheuse que Groix.

Inversement, des objets qui produisent la même pente de droite, même s'ils sont différents dans les détails, donneront la même impression qualitative : « c'est rocheux pareil ». Ceci correspond à l'expérience faite par les élèves sur écran d'ordinateur, ceci explique aussi l'intérêt des fractales abstraites pour la simulation visuelle des objets naturels !

La notion de dimension fractale est liée à la pente de la droite : deux courbes donnant la même pente auront la même dimension fractale ; cette dimension fractale généralise la notion usuelle de dimension, mais n'est plus en général un nombre entier.

Sur les fractales et leur dimension, deux références :

une bande dessinée :
Jan Stewart *Les Fractals (Chroniques de Rose Polymath)* Belin

un livre : Benoît Mandelbrot *Les objets fractals* Flammarion.

et pour les abonnés au journal :
un article de JP Kahanne in PLOT n° 38
un dossier de l'IREM d'Orléans.

«Suites de nombres, suites de figures»

Cet article est l'un des nombreux articles de la brochure «Autour d'une exposition» publiée par l'IREM et la régionale APMEP de RENNES

ÉVALUER QUOI ? POUR QUI ? POURQUOI ?

Daniel BUSNEL - Paris

L'essentiel des travaux sur l'évaluation porte sur « comment évaluer » à commencer par les travaux en docimologie. Avec l'évolution des recherches, l'évaluation est apparue comme un « rouage » favorisant l'apprentissage et des résultats mettent en évidence les effets de certains types d'évaluation sur la gestion du savoir. L'élève n'étant pas seulement un consommateur de savoir mais aussi un consommateur de réussite, c'est sur ce deuxième point que devaient s'étendre les réflexions suscitées par cet atelier. Je ne peux en quelques lignes et en peu de temps présenter par écrit le modèle théorique qui devait servir de départ aux réflexions et aux échanges et avait pour but d'être producteur de problématiques et d'axes de recherche. Je présente ici une liste de questions auxquelles devait conduire l'exposé ainsi qu'une liste de propositions de recherches qui auraient pu donner lieu à un prolongement du travail entrepris dans cet atelier.

DES QUESTIONS

- L'élève va-t-il à l'école plutôt pour apprendre ou plutôt pour réussir ?*
- Comment interagissent pratiques d'évaluation et pratiques d'enseignement ? (hors sujet).
- Évaluer mieux est-ce évaluer juste ? Qu'y-a-t-il sous cette idée de justice ?
- Comment la négociation professeur-élève autour du savoir se déplace-t-elle en une négociation autour de la réussite ? (ou du pouvoir ?). Dans quelle mesure ce déplacement est-il faste ?
- L'évaluation collective (conseil de classe...) nécessite une synthèse d'évaluations, évaluations de quoi ? Quels sont les outils de synthèse ?
- Orienter c'est sélectionner mais l'orientateur sait-il vers quoi il oriente ?
- Y-a-t-il un quatrième sommet au triangle didactique ?

DES PROPOSITIONS

- Trouver des exemples de rupture de contrat autour de la sélection, de leurs répercussions sur le contrat didactique.



- Mettre en place des moyens de recherche permettant de mieux connaître la population scolaire, par exemple « savoir comment les élèves en fonction des paramètres organisent leur représentation du savoir et leur représentation de la réussite » ceci afin de mieux comprendre leur stratégie au sein du système scolaire.*
 - Analyse des évaluations rapportées et mise au point d'instruments de synthèse au niveau de l'évaluation collective.
 - Retracer l'histoire d'une évaluation en soulignant ses effets positifs ou négatifs sur l'enseignement, la sélection et le confinement.
 - Regarder ce qui est évalué sur les bulletins trimestriels.
- Analyser par rubrique : comportement, travail...etc...

Hors contexte ces propositions manquent de clarté cependant j'espère qu'elles donneront au lecteur une idée de ce qui aurait pu être l'amorce d'une réflexion et d'un travail poursuivi dans le temps. J'espérais recueillir sur le vif des réactions, d'autres propositions et proposer la création d'un groupe de travail sur ces propositions au sein de la commission évaluation. Cette idée tient toujours ainsi que celle de proposer cet atelier aux futures journées nationales, les collègues intéressés peuvent me faire part de leurs remarques, suggestions et préparer avec moi le futur atelier en me contactant.

(*) Sur ces points un sondage à déjà été effectué à petite échelle en voici les résultats :

Résultats d'un sondage effectué auprès de 76 élèves de 3^e en septembre 87.

1) Choisir la réponse 1 ou 2.

Pourquoi l'école est-elle obligatoire jusqu'à seize ans ?

- 1 : Parce qu'il y a trop de chômage, 95 %
- 2 : Parce qu'il y a trop de professeurs, 3 %
- 1 : Parce qu'il y a beaucoup de choses à apprendre 55 %
- 2 : Pour que les jeunes ne traînent pas dans les rues 36 %

A quoi sert l'école ?

- 1 : Apprendre des choses utiles 71 %
- 2 : Obtenir des diplômes 25 %
- 1 : Préparer à la vie professionnelle 76 %
- 2 : Comprendre le monde dans lequel nous vivons 20 %
- 1 : Passer dans les classes supérieures 34 %
- 2 : Transmettre la culture aux jeunes 63 %

- 1 : Trier les élèves pour donner aux meilleurs les meilleurs métiers 0 %
- 2 : Donner à tous les élèves les moyens de réussir quand ils seront plus grands 99 %

- 1 : Apprendre aux enfants ce que les parents ne peuvent pas leur apprendre 93 %
- 2 : Occupier les enfants pendant que les parents travaillent 3 %

Aller à l'école c'est :

- 1 : Suivre tous les cours 88 %
- 2 : Retrouver ses camarades 7 %
- 1 : Pour obtenir de bonnes notes 28 %
- 2 : Pour trouver des réponses aux questions qu'on se pose 67 %

- 1 : Pour approfondir les sujets qui nous intéressent 76 %
- 2 : Pour passer dans la classe supérieure et pour faire plaisir aux parents 20 %

- 1 : Risquer échecs et punitions 8 %
- 2 : Pour le plaisir d'apprendre des choses nouvelles 91 %

- 1 : Profiter des enseignements pour être plus cultivé 53 %
- 2 : Mettre son avenir en jeu 42 %

Les cours :

- 1 : C'est le moment où l'on apprend des choses nouvelles 76 %
- 2 : Servent à préparer les contrôles 21 %
- 1 : C'est le moment où l'on doit montrer au professeur que l'on est un bon élève 12 %
- 2 : C'est le moment idéal pour poser des questions 83 %

Les contrôles :

- 1 : C'est pour vérifier ce que l'on est capable de faire 95 %

- 2 : C'est pour avoir des notes et faire des moyennes 4 %

Les notes :

- 1 : C'est ce qui permet de se situer par rapport à la classe 16 %
- 2 : C'est ce qui permet de savoir si on a plus ou moins compris un sujet 83 %
- 1 : C'est ce qui permet de passer ou non dans la classe supérieure 26 %
- 2 : C'est ce qui permet de connaître ses points faibles et d'organiser son travail personnel 68 %

Les conseils de classe

- 1 : C'est le moment où les professeurs donnent des conseils aux élèves et aux familles 45 %
- 2 : C'est le moment où les professeurs décident de l'avenir des élèves 47 %

2°) Classer dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, le plus important.

| | Pour moi | | | | | | Pour mes parents | | | | | | | | | |
|---|----------|----|----|----|----|----|------------------|----|----|----|----|----|----|----|---|---|
| Ce que j'apprends en cours. | 7 | 2 | 9 | 7 | 5 | 3 | 0 | 1 | 3 | 4 | 9 | 16 | 14 | 11 | 1 | 2 |
| Ce que pense de moi le professeur. | 0 | 5 | 14 | 20 | 26 | 30 | 5 | 4 | 14 | 25 | 16 | 24 | 3 | 4 | | |
| Mes moyennes. | 8 | 18 | 34 | 20 | 9 | 5 | 2 | 28 | 22 | 13 | 13 | 7 | 3 | 1 | | |
| Ce que j'apprends en faisant mes devoirs. | 1 | 4 | 12 | 14 | 18 | 9 | 3 | 3 | 18 | 11 | 21 | 26 | 5 | 5 | | |
| Les décisions du conseil de classe. | 7 | 18 | 16 | 28 | 20 | 7 | 4 | 16 | 20 | 20 | 16 | 11 | 3 | 3 | | |
| De bien m'entendre avec mes camarades. | 8 | 5 | 11 | 9 | 18 | 45 | 6 | 0 | 3 | 0 | 5 | 7 | 7 | 1 | 6 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | |

3°) Pour décider du passage dans une classe supérieure,

Qu'est ce qui vous semble le mieux :

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|
| Laisser décider les professeurs de la classe. | 47 | 24 | 12 | 2 | 1 |
| Laisser décider les familles. | 4 | 11 | 26 | 45 | 4 |
| Faire passer un examen à tous les élèves. | 13 | 30 | 17 | 24 | 3 |
| Laisser une commission décider à la lecture des bulletins trimestriels. | 21 | 21 | 28 | 14 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |

4°) Questions ouvertes

— Pourquoi allez-vous à l'école ?

On trouve : «Se cultiver, s'instruire» dans 38 % des réponses ; «apprendre des choses nouvelles, utiles» dans 25 % ; «apprendre» dans 16 % ; «se préparer à la vie professionnelle» dans 50 % ; «réussir, avoir un avenir» dans 22 % , «avoir des diplômes» dans 9 %.

Que faut-il changer à votre avis ?

Peu de réponses, beaucoup pensent qu'il ne faut rien changer, pour 14 % il faut améliorer les emplois du temps, la relation avec les professeurs est assez souvent évoquée.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES ET RÉOLUTION DE PROBLÈMES CHEZ LES ENFANTS DE 5 à 8 ANS

Équipe INRP DP1 - MATH - École Normale des Hauts de Seine

Dominique VALENTIN

L'atelier proposé avait pour but, d'une part d'apporter un minimum d'information sur les travaux menés sur ce sujet par l'équipe de l'I.N.R.P. à laquelle j'appartiens, et d'autre part d'engager un débat sur les questions des participants.

LA QUESTION DU SENS

Nous avons choisi d'aborder les apprentissages numériques chez des enfants de 5 à 8 ans, à partir de la question «à quoi servent les nombres?».

Sans entrer, dans le cadre de cet article, sur l'ensemble des réponses que l'on peut apporter à une telle question, nous retiendrons deux aspects principaux :

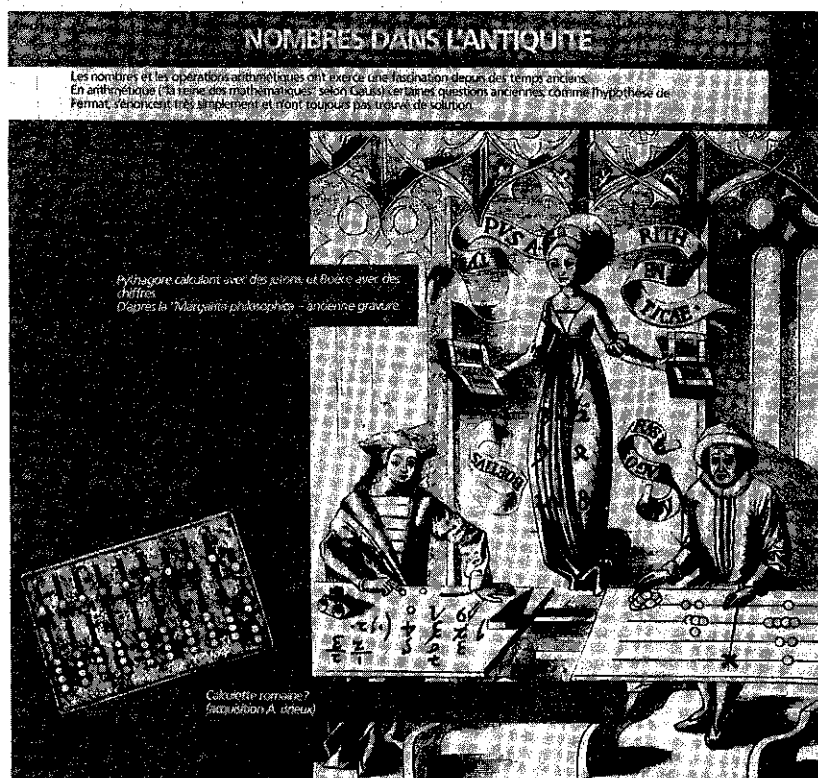
- le nombre, c'est la MÉMOIRE de la quantité,
- le nombre, c'est la possibilité d'ANTICIPER sur l'action.

Notre travail consiste alors :

- à repérer les situations dans lesquelles les enfants seront amenés à utiliser des nombres comme mémoire ou pour anticiper, dans le cadre de problèmes à résoudre ;
- à examiner leurs procédures initiales ;
- à chercher comment faire évoluer ces procédures de manière à les rendre de mieux en mieux adaptées, de plus en plus sûres, de plus en plus disponibles.

On trouvera une présentation de notre problématique dans le numéro de MAI-JUIN 1987 du Journal des Instituteurs édité par les éditions Nathan.

D'autre part un prochain numéro de la revue «Rencontre Pédagogique» (INRP) sera entièrement consacré à cette recherche. Enfin, nous travaillons actuellement à une publication, destinée aux enseignants et consacrée à ces apprentissages en maternelle.



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Formant l'hypothèse que les connaissances mathématiques se construisent dans les problèmes qu'elles permettent de résoudre de manière efficace, nous sommes amenés à nous intéresser à l'apprentissage à la résolution de problèmes.

Il nous semble indispensable de prendre en charge ce type d'apprentissage dès les premiers contacts avec la résolution de problèmes et quels que soient ceux-ci. Trois points ont retenu particulièrement notre attention ;

- la recherche et le traitement de l'information,
- la prise de conscience et l'organisation de stratégies,
- la capacité de contrôler son action en cours ou en fin de recherche.

On trouvera un compte rendu de nos travaux dans la brochure : «Apprentissage à la résolution de problèmes au Cours Élémentaire», éditée par le C.R.D.P. de Grenoble.

L'ATELIER

L'atelier, qui s'est tenu lors de la première des journées, a réuni vingt personnes, formateurs d'instituteurs (IDEN, PEN, CPAIDEN) à l'exception de quatre collègues, professeurs de collèges ou de lycées, dont j'ai beaucoup apprécié la présence et de qui j'aurais particulièrement aimé avoir les réactions... L'interruption des journées nous a empêché, d'une part de développer la partie concernant l'apprentissage par et à la résolution de problèmes, et, d'autre part, d'avoir un débat indispensable. Personnellement je regrette vivement l'absence de ce débat qui aurait pu permettre à ceux qui le désiraient d'apporter la contradiction aussi bien que d'obtenir des précisions.

Pour ceux qui sont restés sur leur faim, et bien qu'elle ne puisse remplacer un complément d'information ou un débat, je propose, en annexe, une courte bibliographie sur ces sujets.

**« APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES
ET RÉOLUTION DE PROBLÈMES
CHEZ LES ENFANTS DE 5 à 8 ans »**

BIBLIOGRAPHIE (Novembre 1987)

**Sur les compétences numériques
des enfants**

- M.P. CHICHIGOUD ; «Le développement du concept de nombre chez le jeune enfant» Grand N n° 36 Déc. 85.
- N. BEDNARZ, B. JANVIER. «La Numération : les difficultés suscitées par son apprentissage» Grand N n° 33 Nov. 84.
- J.P. FISCHER. «L'enfant et le comptage» 1982 «La dénomination des nombres par l'enfant» 1984 IREM de Strasbourg.
- R. GELMAN, C.R. Gallistel. «Les bébés et le calcul». La Recherche n° 149 Nov. 1983.
- C. MELJAC «Décrire, agir et compter» PUF 1979.

**Sur l'enseignement du concept
de nombre et de la numération**

- M. BASQUET, B. GUERITTE-HESS «Le Nombre et la Numération» ISOSCEL 82 av. Niel 75017 Paris 1982.
- N. BEDNARZ, B. JANVIER «La Numération : stratégie didactique» Grand N n° 34.
- A. BESSOT, C. COMITI «Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération» Recherche en didactique des Mathématiques 1985 vol. 6/2 - 3.
- H. EL BOUAZZAOUI «Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération» IREM de Bordeaux 1982.
- ERMEL (Équipe de Recherche Mathématique Élémentaire INRP) «Apprentissages Mathématiques CP» Hatier 1977.
- M. FAYOL. «Nombre, numération et dénombrement» Revue Française de Pédagogie 1986.
- P. KERGMARD (1886-1974) «L'éducation maternelle dans l'école» Hachette.
- R. NEYRET «Activités de partage en Maternelle» Grand N n° 33 1984.

Sur la résolution de problème

- J. CI. GUILLAUME, J.L. PORCHERON. «Peut-on apprendre à résoudre un problème que l'on n'a pas appris à résoudre ?» Rencontres Pédagogique : «Comment font-ils ?» INRP.
- R. CHARNAY. «Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6^e» IREM de Lyon 1987.
- Équipe Math INRP «Apprentissage à la résolution de problèmes au Cours Élémentaire». CRDP Grenoble 1987.

Sur l'apprentissage

- J.S. BRUNER «Savoir faire, savoir dire» PUF.
- Ch. GEORGE, J.F. RICHARD. «Contributions récentes de la psychologie de l'apprentissage à la pédagogie» Revue Française de Pédagogie.
- F. SMITH «Compréhension and learning» 1975.

Sur la numération

- G. GUITTEL «Histoire des numérotations écrites» Flammarion 1975.
- G. IFRAH «Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention» R. Laffont 1984.

QU'EST-CE QUE C'EST!!
C'EST
LA BOSSE
DES MATHS
LOCALE??



TRAVAUX PRATIQUES EN TERMINALES SCIENTIFIQUES

IREMI DE STRASBOURG

Un peu plus d'un an après la brochure consacrée aux « Travaux Pratiques en Premières Scientifiques », voici celle destinée aux élèves de Terminales Scientifiques.

Elle a été élaborée par la même équipe et dans le même but : faire travailler les élèves sur des documents qui leur permettent de :

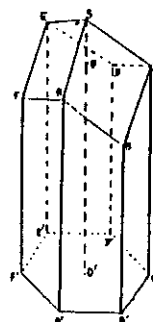
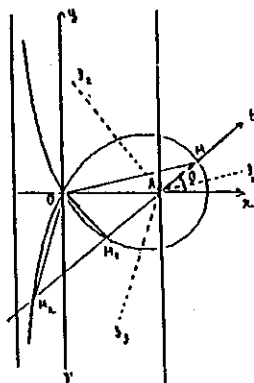
- mettre en jeu les notions du programme, progresser dans la maîtrise des concepts et acquérir des méthodes de démonstration ;
- résoudre de vrais problèmes mathématiques (dont certains sont historiques, d'autres liés aux sciences expérimentales) ;
- Développer leur culture scientifique, si modestement que ce soit.

L'équipe de rédaction, composée de professeurs enseignant en Terminales C ou Terminales D, y a été vivement encouragée par les utilisateurs de la brochure publiée l'an dernier. Les Travaux pratiques relatifs aux parties communes aux programmes (Analyse, Algèbre, Géométrie, mettant en œuvre les acquis de Première) de Terminales C, D ou E ont été conçus à l'intention des élèves de ces trois sections.

On trouvera dans cette brochure des documents :

- rédigés pour les élèves ;
- directement utilisables dans le cadre des travaux pratiques inscrits explicitement aux programmes ;
- expérimentés, pour quelques-uns, dans une cinquantaine de classes ;
- couvrant bon nombre de rubriques ;
- faisant une place de choix aux activités graphiques et aux problèmes et méthodes numériques, comme le demandent les commentaires ;
- visant, pour certains, un aspect spécifique du programme, alliant, pour les autres, plusieurs points de vue : algébrique, géométrique, historique, graphique, numérique...

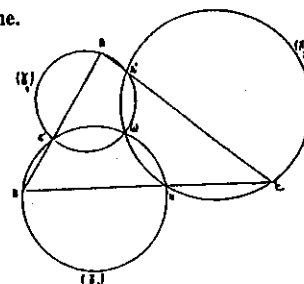
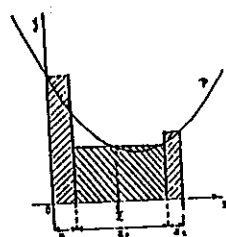
Ces documents sont de difficultés et de longueurs très variées. Chacun peut être étudié partiellement ou dans sa totalité. Chacun peut être complété, modifié, amélioré, rejeté... Comme ceux de Première, ils ne prétendent nullement être exhaustifs. Puissent-ils encourager les collègues à en confectionner d'autres !



Suite à la brochure
de Travaux Pratiques
en Première Scientifique,

est parue depuis Juin 1987 une brochure de
TRAVAUX PRATIQUES en TERMINALES C, D, E.

Elle contient de nombreuses activités
rédigées pour les élèves
utilisant les nouveaux
éléments du
programme.



Construction d'un polygone régulier - solution « approchée » -

Le problème de la construction des polygones réguliers de n côtés à la règle et au compas remonte à l'Antiquité. On sut, très tôt, construire ainsi le triangle équilatéral, le carré, le pentagone et l'hexagone réguliers. La construction classique de la bissectrice permet en outre de construire un polygone régulier de $2n$ côtés à partir d'un polygone régulier de n côtés.

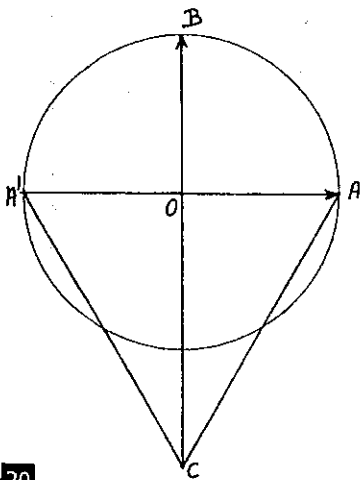
Ce n'est qu'en 1796 que le mathématicien allemand Gauss (âgé de 19 ans) décrivit une construction du polygone régulier de 17 côtés. Peu après Gauss énonça le résultat général suivant :

Un polygone régulier de n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance entière de deux par un ou plusieurs nombres premiers de Fermat.

N.B. : Ces « Travaux Pratiques » ont été rédigés pour être utilisés en classe avec l'aide orale du professeur. Si celui-ci veut donner l'un ou l'autre en travail à la maison, il sera nécessaire d'apporter des compléments à la rédaction. Ajoutons que ces « T.P. » n'ont pas été conçus pour être donnés à faire en temps limité.

Table des matières

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Trajets en temps minimum 2. Les autoroutes de Monsieur Fermat 3. La duplication du cube 4. Le problème des abeilles 5. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ par la méthode du point fixe 6. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ par la méthode de Newton 7. Un problème d'échelles 8. Exemple d'itérations d'une fonction trinôme du second degré 9. Paradoxe 10. Un calcul d'aire dans l'évolution historique des mathématiques 11. Calcul d'aires : Méthode de Simpson 12. Calcul d'aires : Méthode de Hermite 13. Trois utilitaires classiques pour calculatrices programmables 14. Intégrations par parties répétées 15. Encadrements de fonctions par des fonctions rationnelles 16. Circuit oscillant 17. Calcul numérique et fonction exponentielle 18. Dérangements 19. Somme de puissances entières des p premiers naturels non nuls | <ol style="list-style-type: none"> 20. Un procédé de calcul numérique de logarithmes népériens 21. Équations du troisième degré 22. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ à l'aide de la trigonométrie 23. Construction (à la règle et au compas) de polygones réguliers 24. Construction d'un polygone régulier «solution approchée» 25. Où l'on retrouve l'angle des abeilles 26. Étude d'une configuration à l'aide de barycentres 27. Étude d'une configuration à l'aide de nombres complexes 28. Plusieurs méthodes pour un même problème de construction 29. Alignement et cocyclicité 30. La trisection de l'angle 31. A propos de la trisection 32. Problème de réservoir 33. Inverses de coniques 34. Réflecteurs micro-ondes 35. Zone d'audibilité 36. A la recherche d'un triangle rectangle 37. Coniques, constructions et lieux géométriques 38. Solution «approchée» d'un système 39. Un peu de trigonométrie sphérique |
|---|--|



Quels sont ces nombres premiers de Fermat ? Ce sont les nombres premiers de la forme :

$$F_p = 2^{(2^p)} + 1 \quad (p \text{ entier})$$

Ainsi $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$ etc...

Attention, un nombre de cette forme n'est pas toujours premier, ainsi : $F_5 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641.

Nous allons étudier ici une construction à la règle et au compas d'une solution «approchée» du problème posé, c'est-à-dire d'un polygone «presque régulier».

Analyse du problème

Soit C le cercle trigonométrique de centre O et le repère orthonormé direct (O, OA, OB) . On appelle A' le point diamétralement opposé à A et C le troisième sommet du triangle équilatéral direct $AA'C$ de côté $|AA'|$.

On désigne par P_n le polygone régulier de n côtés inscrit dans C , et dont l'un des sommets est le point A .

Soit A_n le sommet de P_n défini par $(OA, OA_n) = 2\pi/n$

M_n le point d'intersection de la droite (CA_n) avec l'axe $(O; OA)$.

Question 1 :

- a) Construire sur trois figures différentes les polygones :
 P_3 (triangle équilatéral)
 P_4 (carré)
 P_6 (hexagone).

- b) Calculer AM_3 , AM_4 et AM_6 ; Vérifier que dans chaque cas, on a : $AM_n = 4/n$, et $OM_n = 1 - 4/n$.

On étudie maintenant le cas où n est un entier quelconque.

Question 2 :

- a) Calculer en fonction de n l'abscisse x_n du point M_n .
 b) Pour n variant de 3 à 12 (par exemple) et $n = 17$, compléter le tableau suivant :

| n | x_n | $1 - 4/n$ |
|-----|-------|-----------|
| | | |

On écrira les valeurs approchées de x_n et de $1 - 4/n$ par arrondi avec 3 chiffres après la virgule, à l'aide de la calculatrice.

Pour les valeurs de n envisagées, celles de x_n et de $1 - 4/n$ sont «très voisines». Ceci conduit à étudier la suite (e_n) définie par : $e_n = x_n - (1 - 4/n)$

Pour cela, on étudie les variations de la fonction f définie sur $[4; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{\cos \frac{2\pi}{t}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{t}} - 1 + \frac{4}{t}$$

Question 3 :

a) Vérifier que pour tout t de $[4; +\infty[$, on a : $0 \leq 2\pi/t \leq \pi/2$

b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

c) Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ est du signe de :

$$\alpha'_n - 2 \sin^2(2\pi/t) + (3\pi - 4\sqrt{3}) \sin 2\pi/t + \pi\sqrt{3} - 6.$$

d) On pose $X = \sin 2\pi/t$; étudier le signe du polynôme

$$g(X) = -2X^2 + (3\pi - 4\sqrt{3})X + \pi\sqrt{3} - 6$$

e) Soit X' et X'' les racines de $g(X)$; on appelle t' et t'' les nombres de l'intervalle $[4; +\infty[$ définis par :

$$X' = \sin 2\pi/t' \text{ et } X'' = \sin 2\pi/t''$$

Donner le tableau de variations de f .

f) Démontrer alors que tout n supérieur ou égal à 3, on a : $|e_n| < 10^{-2}$ pour obtenir ce résultat on fera confiance à la calculatrice.

Construction d'un polygone « presque régulier »

Les résultats précédents nous indiquent pour $n = 5$ ou $n \geq 7$, une construction à la règle et au compas d'un polygone P'_n « presque-régulier » de n côtés inscrit dans C et dont l'un des sommets est A .

Construction de P'_n

On partage le diamètre $[A'A]$ en n parties égales.

Soit M'_n le deuxième point de la subdivision compté à partir de A . La droite (CM'_n) coupe le cercle C en deux points; soit A'_n celui des deux qui a la plus grande abscisse.

$[AA'_n]$ est un côté du polygone P'_n .

Question 4 :

Faire la construction de P'_7 à la règle et au compas.

Question 5 :

Soit n un entier égal à 5 ou supérieur à 7.

a) Quelle est l'abscisse de M'_n ?

b) Soit $(X_n; Y_n)$ les coordonnées de A'_n . Calculer X_n et démontrer que :

$$X_n = \frac{2(n-4)}{3n - \sqrt{n^2 + 16n - 32}}$$

c) On pose $\alpha'_n = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'_n})$.

On a donc : $\text{tg } \alpha'_n = Y_n / X_n$ démontrer que :

$$\frac{Y_n}{X_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$$

d) On pose $\alpha_n = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_n})$

Pour n variant de 5 à 12 et $n = 17$, compléter le tableau suivant ;

| n | α_n | α'_n |
|-----|------------|-------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

On écrira les valeurs de α_n et de α'_n exprimées en degrés, minutes et secondes, données par la calculatrice.



Pour aller plus loin

Au paragraphe 1, on a étudié l'erreur e_n commise sur l'abscisse de M_n lorsqu'on remplace M_n par M'_n . On conçoit aisément que l'erreur \mathcal{E}_n commise alors sur l'angle $(\overline{OA}, \overline{OA}_n)$ soit du même ordre de grandeur.

Mais le fait que e_n soit petite (inférieure au centième) ne signifie nullement que le polygone P'_n «approche bien» le polygone P_n , pour les grandes valeurs de n ; en effet l'angle $2\pi/n$ est alors, lui aussi, «petit». Pour avoir une idée de la qualité de cette approximation, il faut étudier l'erreur relative commise sur l'angle $2\pi/n$. Celle-ci, $\mathcal{E}_n/(2\pi/n^3)$ fait intervenir une fonction qui n'est pas au programme.

Aussi va-t-on étudier $E_n = e_n/(2\pi/n)$ dont l'ordre de grandeur sera le même.

Question 6 :
Montrer que si $3 \leq n \leq 17$, alors $E_n < 0,03$

Pour $n > 17$, nous allons étudier la fonction g définie sur $]18, +\infty[$ par $g(t) = f(t)/(2\pi/t) = (1/2\pi) t \cdot f(t)$
Pour plus de facilité, on pose $\pi/t = X$.

Question 7 :
a) démontrer que l'on a :

$$g(t) = - \frac{\sqrt{3} \sin X + \cos X}{\sqrt{3} + \sin 2X}$$

$$\frac{\sin X}{X} + \frac{2}{\pi} \quad \text{avec } X = \frac{\pi}{t};$$

b) En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.

On a : $2\pi g'(t) = f(t) + t \cdot f'(t)$
On étudie le signe de $g'(t)$!

Question 8 :
a) Montrer que $2\pi g'(t) = h_1(X) + h_2(X)$, avec

$$h_1(X) = -2 \frac{\sqrt{3} \sin X + \cos X}{\sqrt{3} + \sin 2X} \sin X$$

$$h_2(X) = 2\sqrt{3} \times \frac{1 + \sqrt{3} \sin 2X}{(\sqrt{3} + \sin 2X)^2}$$

b) Utiliser le résultat :
 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin X \leq X$,

pour démontrer que :

$$h_1(X) + h_2(X) \geq \frac{2X}{(\sqrt{3} + \sin 2X)^2} \times$$

$$[(1 + \sqrt{3} \sin 2X) \sqrt{3} - (\sqrt{3} \sin X + \cos X) (\sqrt{3} + \sin 2X)]$$

c) Déduire du même résultat que :

$$(\sqrt{3} \sin X + \cos X) (\sqrt{3} + \sin 2X) \leq \sqrt{3} + 5X + 2\sqrt{3} X^2$$

d) Utiliser le résultat

$$\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}] , u - \frac{u^3}{6} \leq \sin u^*$$

pour démontrer que :

$$\sqrt{3} (1 + \sqrt{3} \sin 2X) \geq \sqrt{3} + 6X - 4X^3$$

e) Déduire des résultats précédents que, pour tout $t \geq 18$, on a :

$$g'(t) \geq \frac{\pi}{t^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3} + \sin \frac{2\pi}{t})^2} \cdot (1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{t} - \frac{4\pi^2}{t^2})$$

Question 9 :
a) Démontrer que pour tout $t \geq 18$, $1 - 2\pi\sqrt{3}/t - 4\pi^2/t^2 > 0$

b) En déduire que la fonction g est croissante sur $]18, +\infty[$ et par conséquent que :

$$\forall t \in [18, +\infty[,$$

$$g(t) < \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t).$$

Question 10 :
Conclure que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a : $E_n < 0,06$ (on fera confiance à la calculatrice).

Ce dernier résultat montre la qualité de l'approximation des polygones P_n par les polygones P'_n , quelle que soit la valeur de n .

* On peut admettre ce résultat.
On peut aussi le démontrer en se reportant à la question 5b) du T.P. intitulé :
«Intégrations par parties répétées».

INFORMATIQUE ET HÉTÉROGÉNÉITÉ EN 6^e ET 5^e

A. LE GALL et Y. LÉGER - Rennes.

Plutôt que de tenter de présenter par écrit ce que nous aurions proposé aux participants des mémorables journées de Loctudy, nous souhaitons inciter le lecteur à se plonger de manière critique dans les deux polycoplés de l'IREM de Rennes «INFORMATIQUE et HÉTÉROGÉNÉITÉ».



Tome 1.

— l'INFORMATIQUE

pour une approche didactique des mathématiques en complément des OUTILS TRADITIONNELS.

Tome 2

— un mode de traitement de l'HÉTÉROGÉNÉITÉ des élèves de 6^e et 5^e grâce, en partie, au LANGAGE LOGO ;

Ces titres annoncent assez clairement les intentions.

Toutefois, nous aimerions mettre l'accent sur l'un des éléments essentiels du travail accompli durant ces cinq dernières années par notre équipe, à savoir, la définition (puis la mise en œuvre) d'une démarche didactique. Voici donc, en extrait du Tome 2, l'exposé de la démarche.

LA DÉMARCHÉ

Considérons, pour simplifier, que l'acte pédagogique réside essentiellement dans la relation «enseigner-apprendre». Notre principal souci, au cours de ces deux années d'expérimentation à grande échelle, a été de tenter de rendre cette relation optimale.

Dans le thème 0 du tome 1, nous avons mis en avant deux aspects de cette entreprise :

— **Une méthodologie** dont :

- * la structuration met en évidence les étapes d'un processus d'enseignement ;
- * la mise en œuvre permet d'appréhender le processus d'apprentissage développé tout au long des thèmes de ce tome ;

— **Une démarche** proposée aux élèves pour acquérir des connaissances ou des savoir-faire nouveaux. Elle se traduit par une méthode d'essais-erreurs et une approche du raisonnement déductif. Les enfants vivent, en situation de recherche, des expériences qui les conduisent à éliminer d'eux-mêmes les pistes infructueuses et à conserver celles qui aboutissent aux résultats escomptés. Pour résumer, nous dirons que cette démarche est assez proche de celle du «chercheur» et, comme le recommandent vivement les instructions officielles, différente de celle adoptée lors d'une progression purement axiomatique.

Il semblerait donc que, par les développements que nous avons accordés aux unes et aux autres, nous ayons favorisé les procédures d'apprentissage aux dépens de celles d'enseignement.

Afin de mieux rendre compte de notre conception du processus d'enseignement, nous souhaiterions, cette fois, mettre l'accent sur un mode de fonctionnement que nous tentons de mettre en place très progressivement.

Toutefois, nous insistons bien, d'entrée, sur le fait que l'objet du Tome 2 n'est pas de relater la mise en œuvre de ce mode de fonctionnement dans son entier, mais simplement d'en décrire certains points. Nous essayons ici, tout au plus, de mieux situer les activités traitées par la suite dans leur contexte didactique global qui dépasse de loin le simple cadre de ce document. Nous y reviendrons à la fin de cette présentation.

La démarche vers laquelle nous tendons, et qui évoluera sans doute encore au fil des expérimentations, est la résultante :

— d'un effort de documentation concernant en particulier certaines publications des équipes de :

* Philippe MEIRIEU (Lyon), DE CORTE (Belgique) en didactique,

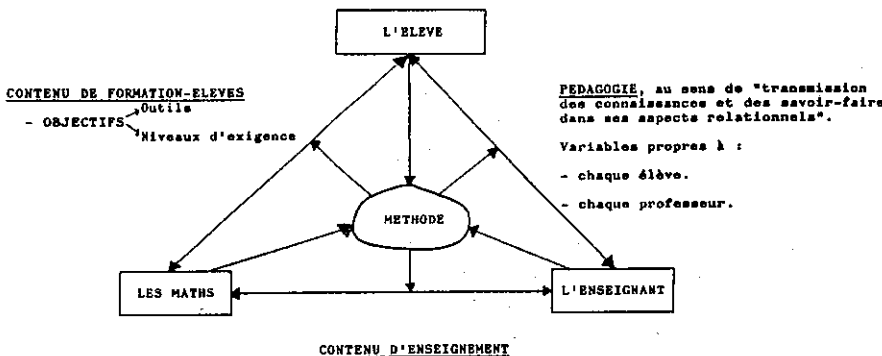
* VERGNAUD (CNRS), BROUSSEAU (Bordeaux), BALACHEF (Grenoble) en didactique des mathématiques ;

— de constats à caractères essentiellement empiriques nés de notre pratique quotidienne dans les classes.

TRIPOLE DE BASE

En un premier temps, nous avons essayé de définir puis de schématiser un mode de gestion des trois données essentielles de toute méthode pédagogique.

TRIPOLE DE BASE



CONTENU D'ENSEIGNEMENT

Réflexions sur le sens des contenus et savoir-faire mathématiques.

Naissance des LIGNES DIRECTRICES

LES LIGNES DIRECTRICES

Ce cadre étant fixé, il nous a semblé indispensable ensuite d'approfondir collectivement le CONTENU D'ENSEIGNEMENT afin de définir clairement les LIGNES DIRECTRICES que chacun devra avoir présent à l'esprit :

- au cours de l'élaboration des fiches-micro,
- pendant leur mise en œuvre,
- tout au long des activités dont nous ne faisons pas mention explicitement dans ce document bien qu'elles constituent une part déterminante du travail à accomplir avec les élèves.

Nous présentons, au début de chaque thème, un résumé de nos principales conclusions sous la rubrique «lignes directrices». Certaines de ces réflexions sem-

bleront peut-être décalées par rapport aux activités décrites immédiatement après, d'autres moins. Dans les deux cas, elles correspondent à une partie du contenu d'enseignement de la classe de 5^{ème}. Toutefois, suivant les objectifs à atteindre, l'ordinateur n'est pas forcément le meilleur outil à mettre en œuvre (voir TOME 1). Par voie de conséquence, leur traitement n'apparaît pas dans nos compte-rendus. Cependant, il nous semblerait dangereux de proposer une quelconque progression au micro sans rappeler le contexte hors-micro dans lequel elle s'effectuera réellement dans les classes.

LE CONTENU DE FORMATION-ÉLÈVES

Ce contenu découle directement du CONTENU D'ENSEIGNEMENT ainsi que des programmes des classes concernées. Il est traduit en termes d'OBJECTIFS de connaissances ou de savoir-faire.

Chaque fois que c'est possible, nous définissons quatre niveaux d'appropriation de chacune de ces connaissances :

1. **Le repérage** (selon Ph. MEIRIEU). Ce niveau est atteint quand l'élève est capable de percevoir de quoi il s'agit, voir d'énoncer la règle ou la loi, mais ne peut pas, pour autant, en maîtriser les applications les plus simples.

2. **La connaissance**. La performance est reproduite intégralement dans les conditions de son apprentissage. L'élève résout de manière satisfaisante les exercices d'application.

3. **La reconnaissance**. L'apprentissage fait l'objet d'une utilisation dans un autre cadre. En géométrie par exemple, après avoir étudié isolément le triangle équilatéral, l'élève utilise judicieusement les propriétés de cette figure dans l'analyse d'une configuration plus complexe comme l'hexagone régulier ou un pavage particulier.

4. **Le réinvestissement**. La connaissance est mobilisée, de manière originale et non prévisible, en dehors des champs convenus de son utilisation, par exemple : le repérage au service de la translation.

L'étape ultime en serait celle de la **modélisation** (selon Guy BROUSSEAU). L'élève se constituerait un modèle qu'il serait capable d'échanger avec d'autres.

LES SITUATIONS FONCTIONNELLES

Leur mise en place prend en compte quatre composantes essentielles :

1. **Les objectifs** et leurs niveaux d'exigence (voir chapitre 3) ;

2. **L'outil** à mettre en œuvre :

*écrit-oral ;

*instruments traditionnels en géométrie ;

*ordinateur (langage Logo) ;

*matériels divers... ;

3. **La situation** la mieux appropriée à l'apprentissage considéré :

*impositive collective : le professeur s'adresse à la classe entière ;

*interactive : les élèves travaillent en groupe ;

*individualisée ;

*interactive minimum (binômes), situation particulièrement fréquente dans la salle des ordinateurs ;

4. **L'évaluation** adaptée à la situation et aux objectifs :

*formative à des fins de remédiations ou d'approfondissements ;

*sommative, en fin de thème.

Le tableau de la page suivante regroupe les principaux types de situations fonctionnelles que nous mettons en place.

| SITUATIONS FONCTIONNELLES | | | |
|--|--|------------------------------------|-------------------------------------|
| Outils | Niveaux d'exigence des objectifs | Situations | Évaluations |
| Activités préparatoires | | | |
| Micro | <ul style="list-style-type: none"> — Repérage — Connaissance — Reconnaissance Niveaux A et B | Binômes (quelques élèves seuls) | |
| Introduction de certaines notions | | | |
| Micro - Parole (gd écran) - Écrit (tableau) | — Connaissance d'une notion pour laquelle les conventions implicites risquent d'être insuffisantes. | Impositive Collective | ...des impressions... |
| Synthèses | | | |
| Parole - Écrit Intruments traditionnels ponctuellement gd écran | <ul style="list-style-type: none"> — Connaissance — Reconnaissance de notions découvertes (ou non) intuitivement | Impositive collective | ...des impressions... |
| Résolution de problèmes | | | |
| Écrit Intruments traditionnels | <ul style="list-style-type: none"> — Connaissance — Reconnaissance | Élève seul Seul - En groupe | |
| Intruments traditionnels Micro | — Réinvestissement (Niveau C au micro) | Seul - en binôme En groupe | Évaluation sommative (fin de thème) |

LES VARIABLES AFFÉRENTES SOIT A L'ÉLÈVE SOIT AU PROFESSEUR

(cf. Ph. MEIRIEU
Vers une didactique différenciée):

Différencier son enseignement serait une opération relativement simple si l'on devait se contenter de prendre en compte uniquement les variables afférentes à l'objectif poursuivi... En réalité, nous savons bien qu'il existe, à côté de ces dernières une série très importante de variables afférentes aux élèves d'une part et aux professeurs d'autre part.

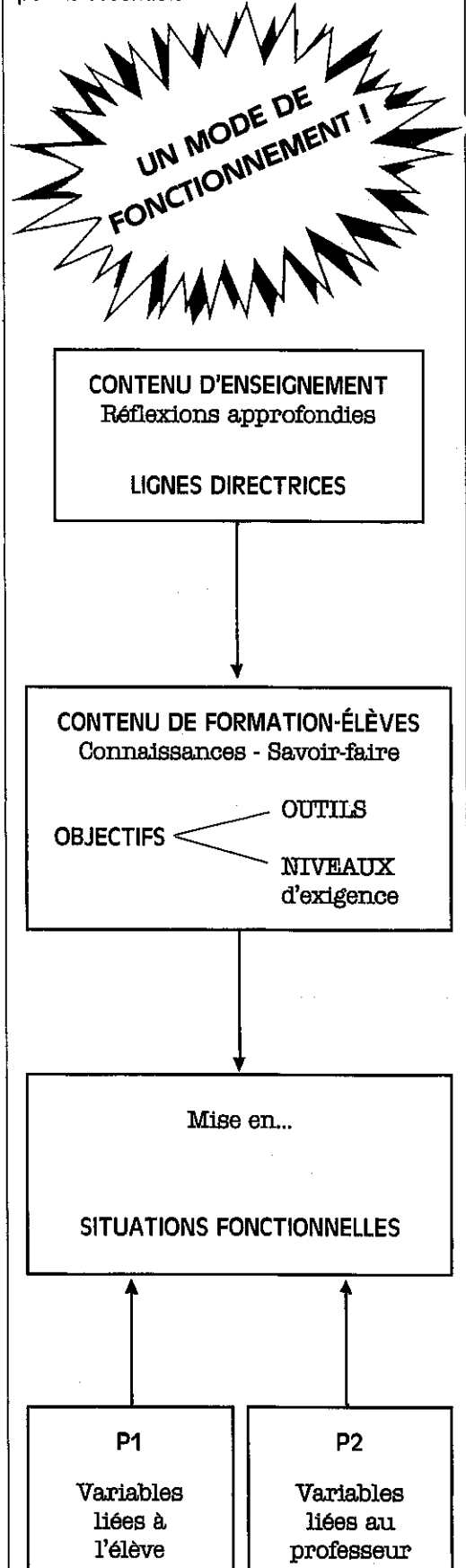
Nous n'avons pas de réponses satisfaisantes à chacune des interrogations qu'elles suscitent mais nous pensons qu'il serait dangereux de ne pas les évoquer pour autant. Nous en énumérons donc les principales dans les deux tableaux suivants.

| P1 |
|--|
| Variables afférentes à l'élève |
| <p>* Sur le plan cognitif :</p> <ul style="list-style-type: none"> — Le choix de l'outil dépend en partie de l'acceptation ou du refus de cet outil par l'élève. — Le degré de guidage requis influe sur la situation à mettre en œuvre. — Le rythme d'apprentissage doit être pris en compte dans le dispositif mis en place <p>* Sur les plans sociologique, psychologique et affectif, de très grandes disparités existent au sein d'une même classe et justifient qu'on y soit très attentif.</p> <p>Cependant: l'exploration rigoureuse des questions d'ordre COGNITIF et leur traitement méthodique contribuent largement à résoudre, par ricochet, bien des problèmes touchant à ces domaines.</p> |

| P2 |
|--|
| Variables afférentes au professeur |
| <p>* Contraintes matérielles :</p> <ul style="list-style-type: none"> — Espace, matériel disponible... — Limites de l'emploi du temps <p>* Dépendances institutionnelles.</p> <p>* Contraintes personnelles.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Potentiel propre. — Compétences. <p style="text-align: center;">etc</p> <p>Le travail en équipe est une forme de réponse à certaines de ces contraintes mais ne saurait tout résoudre. Par ailleurs :</p> <p>Est-il souhaitable que chaque enseignant soit aussi impersonnel que possible ? Robotisable ?</p> |

RÉSUMÉ

L'organigramme suivant schématise assez fidèlement la démarche que nous tentons d'adopter tout en mettant l'accent sur ses points essentiels.



UNE AUTRE APPROCHE

Christian FRATTINI - Le Cannet

La partie exposition ne se raconte pas, on peut dire seulement que les collègues qui ont participé à l'atelier, ont été épatés de voir ce qu'un élève est capable de faire quand on ne lui demande pas. On trouve, par exemple, plusieurs panneaux avec des lignes de calculs sur des suites, des séries ou des puissances, avec calculs de sommes partielles... pour arriver à des nombres de 10 à 15 chiffres, tous exacts...

Vous trouverez ci-après un article écrit après l'exposition au C.D.I. Une partie concerne les recherches libres (objet de l'atelier).

«... organiser, seul ou en groupe, ses diverses tâches de façon autonome et créatrice.»

Extrait de la lettre du Ministre de l'Éducation Nationale au Doyen de l'inspection générale B.O. n° 38 du 31 octobre 1985.

PROLOGUE

DRRRRIIIIIIIING... «Oh! NON...; M'sieur, on n'a pas fini...» Qui n'a pas rêvé de ça? Et quand le rêve devient réalité... Oui c'est possible mais cela demande une recherche de tous les instants pour trouver des situations motivantes à travers lesquelles les élèves pratiquent les notions acquises ou en cours d'acquisition et découvrent les notions à acquérir.

Sans supprimer pour autant les leçons, les exercices répétitifs, ..., on peut prendre une partie du temps pour ces travaux qui touchent à plusieurs notions en même temps et qui permettront d'approfondir d'une classe à l'autre, d'une année à l'autre, voire d'un élève à l'autre, des notions différentes.

Et si telle notion (prévue par l'enseignant) n'est pas acquise (ou même abordée) à la fin de l'activité? Et bien c'est que l'apprenant n'était pas prêt et qu'une autre activité, différente, lui sera utile pour passer ce cap.

Ne pas se bercer d'illusions : la leçon bien apprise et bien sue est bien vite oubliée si le travail d'acquisition n'était pas un travail de profondeur et celui-ci n'est possible que si le terrain a été bien préparé.

Les frises évolutives :

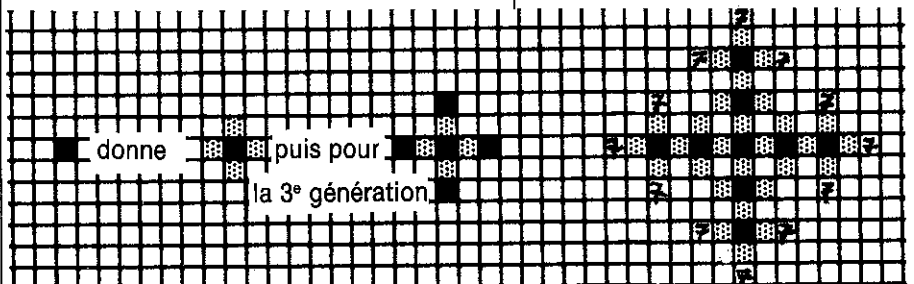
Sur papier quadrillé :

1. Choisir une «liste de couleurs» (minimum deux).
2. Choisir une case départ et la colorier (couleur n° 1).
3. Choisir une LOI D'ÉVOLUTION.

cf. PLOT N° 19

On colorie en respectant la loi et le fait qu'une case coloriée ne peut provenir de deux cases d'une génération précédente, et en changeant de couleur à chaque nouvelle génération (toutes les cases d'une même génération sont de la même couleur).

exemple de loi :



à la 6^e génération on aurait : les cases à colorier ensuite : 7.

Et sur une feuille 21 × 29,7 il faut environ 30 générations pour finir.

Cet exercice développe la logique (raisonnement déductif), fait travailler sur les symétries centrales et axiales, les homothéties...

Les jeux «mathématiques»

ou les problèmes amusants trouvés dans divers livres ou revues.

- Jeu de Marienbad (cf plus loin)
- Les Wari africains (voir bibliographie)
- Puzzles genre tangram avec lesquels on peut faire travailler la proportionnalité, les fractions, les aires, des comparaisons et des classements...



- Jeu de dés (problème du chevalier de Méré...) (cf plus loin) qui peuvent permettre de pratiquer l'orientation de l'espace en cherchant les divers dés possibles, les probabilités et les statistiques, les arbres de choix, les rangements et classements ainsi que des dénombrements, en cherchant tous les développements du « cube-dé ».
- Reversi Combi et autres jeux qui développent une pensée stratégique.

Les problèmes concrets

trouvés dans certains manuels comme «faire des mathématiques» chez CEDIC ou dans des brochures de l'A.P.M.E.P. comme «Du quotidien à la mathématique» ou dans «le grenier mathématique» (de l'IREM de Rouen)... qui sont réellement motivants pour les élèves car ils y retrouvent des problèmes de tous les jours et n'ont pas l'impression de faire des mathématiques mais de les utiliser comme un outil indispensable et ils cherchent donc à se l'approprier.

Les problèmes apportés par les élèves

ou pris dans la vie courante ou l'environnement.

- plan de la ville (distribué gratuitement par l'office de tourisme en grande quantité)
- compteur d'eau
- tarif de gaz (distribué gracieusement en quantité raisonnable par EDF-GDF en expliquant le but de la demande).
- enquête au supermarché du coin.

Le choix du manuel dans lequel on trouve ces activités et des problèmes autres que les applications directes du cours ne permettant pas de chercher autre chose que l'application de la notion prévue.

Les livrets auto-correctifs et les livrets de libre recherche de la C.E.L. (cf bibliographie).

Les pavages (en 4^e-3^e en particulier mais dès la 6^e). Par exemple, au niveau 4^e l'étude des dessins d'Escher (chinois par exemple). Toute la classe travaille, en groupes de 2 à 4, sur le sujet; chaque groupe ayant une tâche déterminée après un temps de recherche collective. On construit ainsi le «cours» sur les vecteurs, les translations, les symétries centrale et orthogonale, la propriété de Thalès, les quadrilatères, le dénombrement... à partir des découvertes des élèves. Évidemment en 6^e 5^e se contente d'une première approche. (cf. PLOT n° 42)

LA RECHERCHE LIBRE

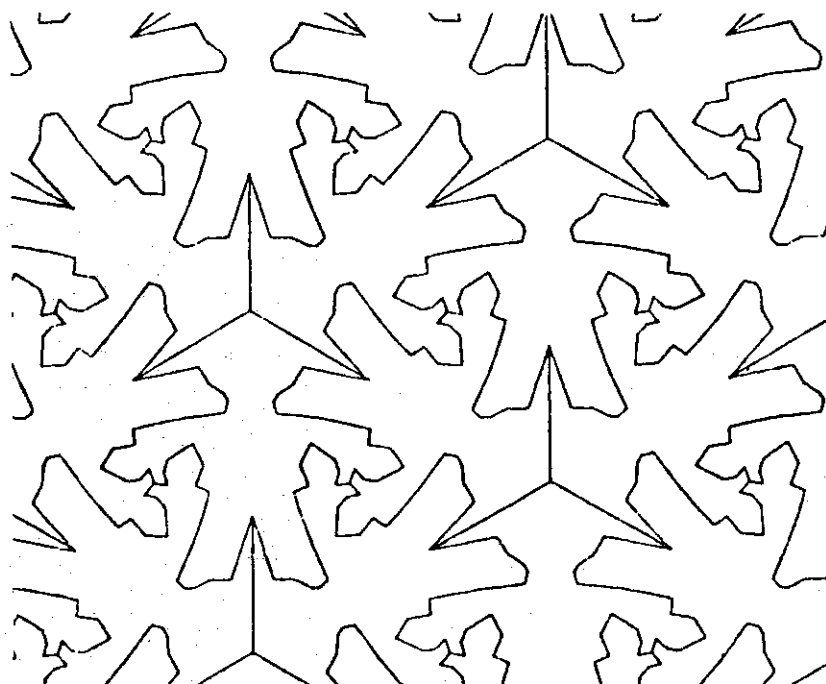
Par groupes de deux à quatre, les élèves choisissent un sujet sur une liste proposée par le professeur ou sur des propositions d'élèves de leur classe.

Ils ont 8 à 10 heures de travail en groupe, à raison d'une heure par semaine pendant le premier trimestre, pour confronter le travail fait par chacun dans la semaine, à la maison ou au C.D.I. ou encore à la bibliothèque municipale; et avancer la recherche.

L'aide de l'enseignant se limite à un encouragement par des questions, pour relancer la motivation et les amener à organiser leurs travaux et résultats, et à prendre conscience de l'importance de leurs conjectures.

Le moment le plus délicat est celui où ils ont envie d'abandonner. C'est là que l'enseignement **NE DOIT PAS FLANCHER**: l'erreur serait de leur donner la réponse ou de les aider trop. Il faut leur faire prendre conscience de ce qu'ils ont déjà découvert, leur redonner courage, les aider à changer de piste (sans leur donner la piste), les motiver en leur permettant une analyse de ce qu'ils ont déjà découvert, une structuration et une organisation du travail et des résultats obtenus.

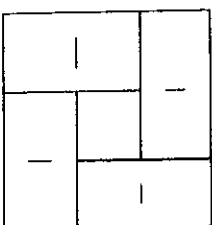
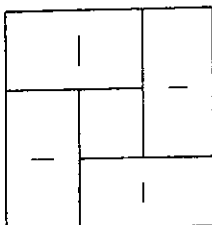
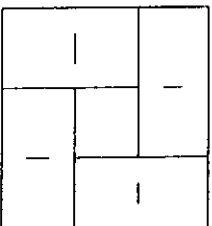
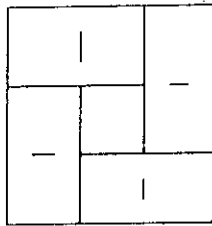
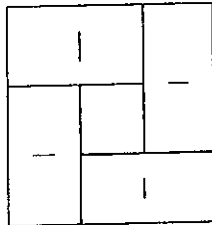
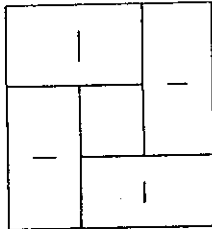
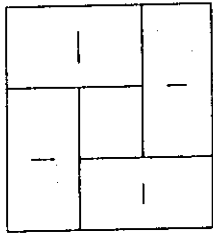
Au second trimestre, à raison d'une heure pas semaine, les élèves exposeront dans leur classe, les résultats de leurs recherches et il s'en suivra des exercices pour toute la classe, pour pratiquer la notion découverte ou pour tenter, ensemble, de répondre aux questions en suspens. Éventuellement un bilan, noté dans le classeur, servira de leçon.



Les fameux chinois d'ESCHER.

Exemple de sujets

| TITRE | Libellé | Notions sous-jacentes |
|---------------------------------------|--|---|
| Étude d'un texte. | Choisir un texte, compter les a, les e,..., se poser des questions. | Pourcentages, constructions de tableaux et graphiques, analyse de données,... |
| Chemins | Combien y a-t-il de chemins pour aller d'un point d'un quadrillage à un autre, en suivant les lignes ? | Triangle de Pascal Repérage Vecteurs Suites |
| Cube | Développements | Relation d'équivalence Relation d'ordre, géométrie dans l'espace |
| Trimino | Sur un triangle équilatéral, on marque, dans chaque coin, 0, 1, 2 ou 3 points. Combien peut-on construire de tels triangles ? Les construire, jouer. | Relation d'équivalence Relation d'ordre Organisation de l'espace Isométries du plan... |
| «Quadrillage» triangulaire | | Utilisation des outils de la géométrie, tracés de parallèles. Translations, symétries. |
| Planche à clous | Se poser des questions | Triangle de Pascal, Heuristique, hasard, ... |
| Mosaïque | Sur des carrés, on trace les diagonales et on colorie avec trois couleurs, se poser des questions. | Classement, rangement, pavage, raisonnement logique,... |
| Écureuil de Corée Hamster | Prolifération | Suites (Fibonacci), calculs, «grands» nombres, présentation en tableau ou arbre,... |
| | Points et lignes dans le plan | Découverte d'une formule, conjectures, confirmation ou... |
| Dés à jouer | | Orientation de l'espace, géométrie dans l'espace, dessins en perspective, statistiques, probabilités. |
| Problème du chevalier de Méré | Combien a-t-on de chance de ne pas faire un double six avec deux dés en 24 coups | Calculs sur des «grands» nombres ; pronostics, probabilités, statistiques, tableaux,... |
| Jeu de Marienbad | Des allumettes sont disposées en 4 rangées. On joue à deux, IIIIII chacun à son tour, prend autant d'allumettes IIII qu'il veut dans une seule rangée (au moins une). III Celui qui ramasse la dernière a perdu I Comment gagner à coup sûr ? | Raisonnement logique, déductions, stratégie, graphique, codage,... |
| Dominos | On égare le domino (1, 2). On forme une chaîne Comment sont les extrémités ? | Ordre, équivalence, déductions,... |
| Billard | Sur quadrillage on dessine un rectangle. La «boule» part d'un coin, se déplace toujours sur les diagonales des carreaux, rebondit sur les bords, s'arrête en atteignant un coin. Peut-on prévoir le sommet d'arrivée, la longueur du trajet, le nombre de segments du trajet ? | P.G.C.D. - P.P.C.M., Formules, Organisation de données, Logique, ... |
| Polyèdres | | Développements d'un objet, constructions, dessin en perspective, calculs d'aires, de volumes, découverte de formules. |
| Légende de l'inventeur du jeu d'échec | On met 1 grain de blé sur la première case, 2 grains sur 2 grains sur la deuxième, 2 sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois. Combien y aura-t-il de grains en tout ? | Puissances Calculs sur des grands nombres, propriétés des puissances... |
| Boulier | | Découverte d'un outil performant, algorithme de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, écriture décimale, division et multiplication par 10, 100,... |



LES RÉSULTATS OBTENUS

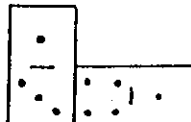
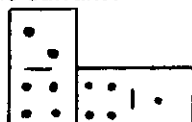
Les sujets proposés ci-dessus sont ceux choisis par une classe de 6^e et deux classes de 5^e en 85/86 au collège Carnot à Cannes. Les élèves de 6^e ont inventé des «graphismes» qui étaient des représentations graphiques (schémas cartésiens et diagrammes en bâtons ou à barres), d'autres ont découvert le triangle de Pascal et ont poussé assez loin les calculs à la main puis ont fait des pronostics sur certaines lignes du «tableau» et ont été amenés à travailler sur des suites particulières. Certains ont travaillé sur les suites et ont représenté les termes sous forme de tableau ou d'arbre pour atteindre des nombres inquiétants quant à la taille de la cage nécessaire pour les hamsters issus d'un couple au bout de 20 ans... de plus lorsqu'il a fallu recommencer les calculs car l'enseignant avait repéré une erreur dans l'un des premiers résultats, les élèves de 6^e ont sorti la calculatrice et ont trouvé un algorithme permettant d'éviter les manipulations répétitives.

EXPLOITATION DE L'EXPOSÉ

Un exemple : «les dominos». L'enseignant a laissé chercher les élèves pendant quelques heures. Ils ont alors, seuls, éprouvé le besoin de connaître le nombre de dominos et le pourquoi de ce nombre et ont donc fabriqué les cas «inutiles» ($3/5 = 5/3$). Puis ils ont vu qu'ils pouvaient faire une chaîne ouverte sans le $1/2$ et se sont contentés de ce résultat (l'enseignant ne leur a pas fait remarquer que les extrémités de la chaîne étaient justement 1 et 2), l'enseignant leur a dit de remettre le $1/2$ et a enlevé le $4/3$ sans le leur montrer : «Lequel ai-je enlevé ? «Au bout de plusieurs essais les élèves ont trouvé et en ont déduit qu'on peut faire une chaîne fermée avec tous les dominos. Ce fut tout pour la recherche.

Lors de l'exposé un élève a demandé : «Mais pourquoi ?» L'enseignant a alors traduit : «Prouvez qu'on peut toujours deviner lequel a été enlevé !».

Les élèves ont alors découvert que la proposition du professeur était fautive pour les doubles puis ont cherché, avec l'aide de l'enseignant, à systématiser. Ils ont donc mis en évidence le fait que si on enlève $1/2$ alors on laisse $.../1 \quad 2/...$ et que pour former la chaîne il faut nécessairement que chaque numéro se retrouve en nombre pair pour pouvoir les associer. Une preuve bien ajustée fut alors apportée par la classe et chaque élève a eu ensuite à résoudre le problème suivant :



BON

MAUVAIS

EPILOGUE

«Le point de départ est la curiosité naturelle de l'enfant : c'est parce qu'il a envie de savoir qu'il va être motivé pour chercher. «On ne fait pas boire un cheval qui n'a pas soif» disait Freinet. Ce que l'élève a découvert au cours de ses tâtonnements multiples et variés a plus de poids et de ce fait est mieux acquis, car il s'est approprié la connaissance» (paru dans «l'éducateur»).

Le rôle de l'enseignant est de créer cette soif, cette envie, ce besoin. Lorsque l'élève a besoin de bien connaître les vecteurs pour expliquer ce qu'il a découvert, il est motivé et du même coup il est prêt pour assimiler cette notion.

BIBLIOGRAPHIE

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin plein d'idées et des brochures dans lesquelles on peut puiser des problèmes concrets et motivants «Du quotidien à la mathématique» brochure n° 35 ; «Activités mathématiques au collège» brochure n° 58 ; «Géométrie au premier cycle» ; «Activités mathématiques en 4^e-3^e» ; ...

On trouve à l'I.R.E.M. de Rouen : «Le grenier mathématique» 6^e-5^e.

En manuel chez CEDIC «Faire des mathématiques».

Une source d'idées chez CEDIC «Modèles mathématiques».

Pour les jeux de stratégie chez CEDIC «War et solo» col Distracts.

Pour plus d'informations sur les recherches libres : chez Casternan «Pour une mathématique populaire» de E. Lémery.

A la C.E.L. *(coopérative de l'enseignement laïc ; B.P. 109 06322 Cannes-la-Bocca cedex) : des livrets de libre recherche et création mathématique. Et aussi : «Pourquoi, comment ?» n°5 et des livrets autocorrectifs.

A l'I.R.E.M. de Lyon : «La pratique du problème ouvert».

Mais comment évaluer ?

C'est une bonne question !

On pourra d'ailleurs lire à ce sujet :

«Autour du collège coopératif Jules Valles de la Ricamarie» édité par I.R.E.M. de Lyon - O.C.C.E. Loire.

«Essai d'évaluation des acquis des élèves de 6^e en mathématiques» par C.N.D.P. - C.R.D.P. Poitiers.

«L'éducateur» Revue de l'I.C.E.M. - Pédagogie Freinet (édité par la C.E.L.).

«Des élèves responsables c'est possible». Une expérience de travail autonome dans une classe de 3^e par M.L. BOLLE au groupe d'Enseignement Mathématiques à Louvain-la-Neuve en Belgique.

* Lire «P.E.M.F. (Les publications de l'école moderne française ; B.P. 109 06322 Cannes-la-Bocca Cedex)».

RÉALISEZ UNE EXPOSITION DE MATHÉMATIQUES AVEC VOS ÉLÈVES

Annie BERTÉ - Talence

L'idée de faire des expositions avec les élèves m'a été donné par Emma Castelnuovo. Elle a réalisé, devant moi, deux expositions à Niamey (Niger) avec des élèves de collège, en 79 et 80. Enhardie par son exemple, je me suis lancée dans une exposition en 83 avec les étudiants en mathématiques de l'École Normale Supérieure de Bamako (Mali) sur le thème: «Soleil et mathématiques», exposition qui a soulevé un grand enthousiasme chez les étudiants et les collègues.

J'ai présenté, à Rennes, puis à Bordeaux (en 88) deux expositions que j'ai réalisées avec des élèves de deux lycées de Bordeaux en classes de Seconde, Premières A2, B et S.

La première a pour thème: «Mathématique et phénomènes de croissance» et elle est centrée sur le problème du choix du modèle mathématique adéquat pour saisir «la réalité».

La seconde a pour thème: «Pythagore» et pour objectif de replacer, à partir d'un exemple, un sujet mathématique dans une perspective historique et philosophique.

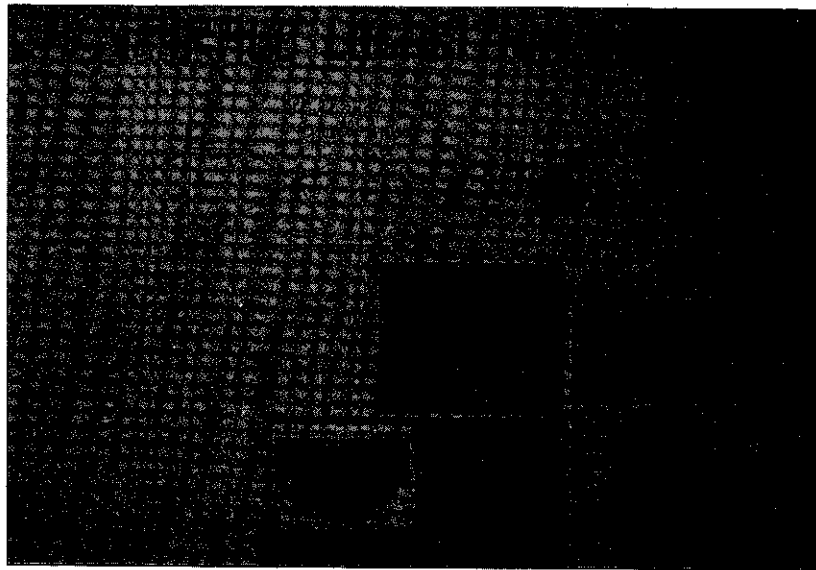
CONTENU DES EXPOSITIONS

Dans les deux cas, le contenu fait partie du programme normal de la classe, les sujets étant choisis spécifiquement dans ce but.

A titre d'exemple: dans l'exposition sur la croissance, la partie intitulée: croître selon la proportionnalité a été faite par les secondes, alors que la partie sur l'exponentielle était plutôt du ressort des 1° B.

Dans l'exposition sur Pythagore, la partie sur la découverte des irrationnels a été faite par les secondes, alors que la partie: théorème de Pythagore après transformations affines, a été faite par les 1° S.

Ainsi, toutes mes classes, bien que de niveau différents, ont pu collaborer à la même réalisation, sans qu'il soit nécessaire d'étudier des notions hors du programme de la classe.



Seule la confection matérielle des panneaux peut se faire en partie hors des heures de cours et même hors de la présence du professeur pour les travaux de finition.

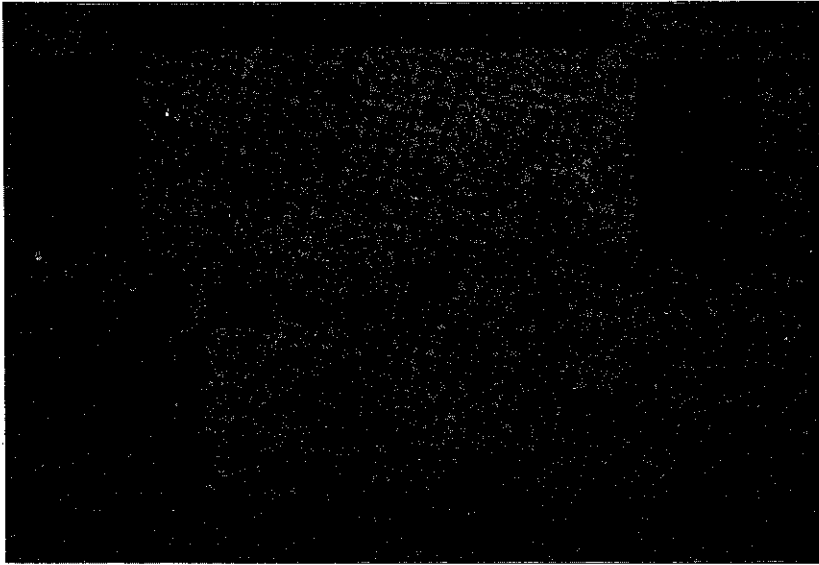
Je ne peux pas faire une description précise de tous les panneaux (il y en a 35 pour chaque exposition.). J'en donne simplement la liste en annexe. J'espérais que les panneaux seraient visibles aux journées de l'APMEP de Pont l'Abbé (octobre 87).

INTERET POUR LES ÉLÈVES

Comment peut-on espérer intéresser suffisamment nos élèves aux mathématiques, au point qu'ils acceptent de faire l'effort de construire eux-mêmes leurs connaissances? Il y a deux possibilités qui se complètent:

On peut les écouter et valoriser leur production en leur redonnant confiance en eux-mêmes.

Les élèves que nous recevons, ont dans leur grande majorité, perdu la confiance en soi. On peut organiser des situations en classe qui les conduisent à agir, expliciter, prouver. Mais souvent ce sont toujours les mêmes élèves, plus sûrs d'eux que leurs camarades, qui sont les plus actifs et donc qui progressent, de sorte que, quelle que



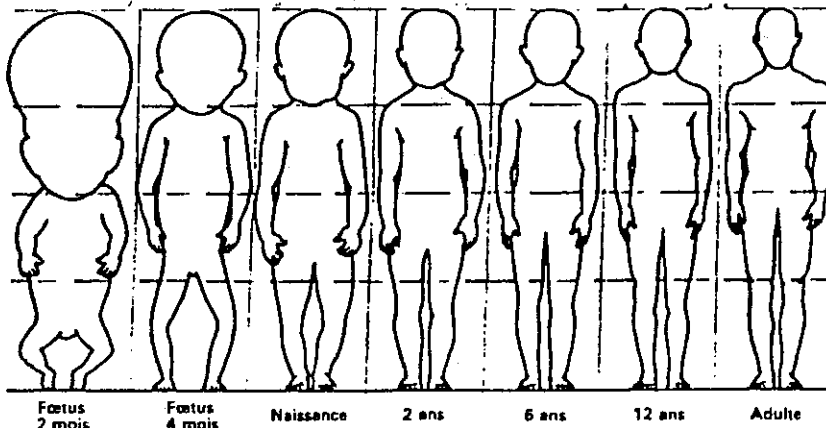
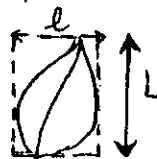
soit la méthode d'enseignement, la majorité des élèves cherche des recettes pour se rassurer, sans apprendre vraiment. Une rupture s'impose. Varier les activités est nécessaire pour valoriser tous les élèves. Dans la réalisation matérielle de l'exposition, d'autres qualités se font jour (dessinateur en particulier) qui changent les rapports avec le maître et l'ambiance de la classe.

Enfin, les élèves expliquent l'exposition aux autres élèves et à leurs professeurs, ce qui est un bon exercice d'expression, de plus très valorisant pour les jeunes.

On peut leur « parler » d'eux-mêmes (parfois sans paroles), les amener à se rendre compte qu'ils sont concernés par les mathématiques, l'espace et le temps étant des a priori pour tous les hommes.

Pour la croissance, on voit la proportionnalité dans la croissance des feuilles.

Pour les petites feuilles comme pour les grandes, L/l est à peu près constant, alors que pour les enfants, la hauteur totale divisée par la hauteur de la tête n'est pas un rapport constant; l'enfant jeune a une grosse tête par rapport à son corps.



Dans l'exposition de Pythagore, on voit que la mathématique est une science en évolution et qu'il y a encore des problèmes non résolus (problème des nombres parfaits à propos de la mystique du nombre), donc une ouverture pour les jeunes.

D'ailleurs, le professeur ne sait pas tout et apprend parfois en même temps qu'eux. Dans cette exposition, on parle aussi beaucoup de l'infini et de ses paradoxes.

INTERET POUR LES MAITRES

J'ai beaucoup appris moi-même, en faisant cette exposition. Je crois que les collègues de mathématiques et mêmes certains collègues d'autres disciplines ont appris avec nous. Il y a eu émulation dans les deux établissements où j'ai fait ces expositions car, dans chaque cas, un autre collègue scientifique a réalisé une autre exposition à la suite, ce qui ne s'était jamais produit, les expositions étant seulement le fait des littéraires.

REALISATION MATERIELLE

Le matériel :

Panneaux de carton blanc, pas trop lourds, cartons de couleur pour les titres, feutres, photocopies en couleur, grandes règles et équerres à tableau pour tirer les lignes.

Temps :

On peut commencer à parler de l'exposition avant les vacances de Noël, terminer tous les panneaux avant les vacances de février, exposer à la rentrée de ces vacances. Cela ne m'a jamais empêché de terminer les programmes.

Organisation du travail :

Faire un plan avec le titre des panneaux et un petit dossier pour chacun. Donner la liste aux élèves en classe, les volontaires choisissent leur panneau par groupe de deux ou trois. Ils en seront désormais responsables et pourront signer leurs panneaux.

On commence les brouillons avec les volontaires en classe. Pendant ce temps, les non volontaires font les titres et, à la fin, tout le monde se retrouve volontaire !

Après le brouillon, on commence à écrire le panneau au crayon. On peut travailler en classe une heure par semaine et le reste hors des cours.

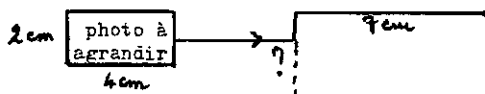
Il est possible de s'intégrer dans un PAE ou de susciter un PAE pour le paiement de quelques heures au professeur et l'achat du matériel de toutes façons peu onéreux.

RÉFLEXION DIDACTIQUES

Il est clair que faire une exposition avec les élèves ne résoud pas tous les problèmes de l'enseignement des mathématiques. La réflexion didactique est essentielle et je m'y consacre aussi. Une partie transparait dans les deux expositions.

Par exemple, au sujet de l'agrandissement de la photo (croissance selon la proportionnalité), voici ce qui se passe même en seconde :

On a un rectangle de 4 cm sur 2 cm.
Passer à un rectangle de longueur 7 cm.
Quelle doit être sa largeur ?



Une grande partie de la classe propose 5 cm car $7 = 4 + 3$ et $5 = 2 + 3$. Le modèle additif fait obstacle au modèle multiplicatif (voir Guy Brousseau). Si ces élèves n'ont pas franchi cet obstacle en fin de seconde, ils seront définitivement en échec, en mathématiques.

Toujours sur le même panneau, les élèves ont choisi eux, comme dimension de base pour découper des rectangles tous proportionnels, 10 cm sur 6 cm, de sorte que $10/6 \approx 1,6$ voisin de la proportion idéale du nombre d'or. Ceci traduit une définition implicite du rectangle : un grand côté et un petit côté dans un rapport voisin de 1,5. Même en seconde, un carré, ou un rectangle très allongé, ne sont pas perçus comme des rectangles.

Sur un des panneaux de démonstration du théorème de Pythagore, on voit un autre obstacle rencontré par les élèves.

Avec deux carrés de même côté en faire un seul :

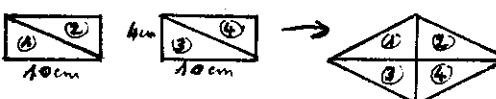


Si le côté de chaque carré est a , son aire est a^2 donc l'aire du grand carré est $2a^2$ et le côté de ce grand carré est $a\sqrt{2}$.

Ceci donne la solution pour calculer la diagonale de tous les carrés.

Comment trouver la diagonale de tous les rectangles ? Les élèves font ceci :

l'aire du losange est deux fois celle d'un rectangle, donc : $40 \times 2 = 80$ «donc le côté du losange est $\sqrt{80} \dots$!»



Comme ceci est effectivement réalisé par les élèves avec du papier, ils se rendent vite compte que le côté du losange cherché doit être supérieur à 10, en le mesurant effectivement parfois, donc leur résultat est faux. Comprendre ce qui se passe leur a demandé du temps et une autre activité avec le parallélogramme articulé. En effet, les erreurs sur l'aire du parallélogramme proviennent de modèles implicites très forts que j'ai pu étudier (relation aire-périmètre, parallélogramme comme «rectangle penché» par correspondance bijective, point par point.

CONCLUSION

La réalisation d'une exposition dépasse, sans doute, le cadre strict de l'enseignement des mathématiques et nous oblige à une optique fondamentalement interdisciplinaire.

Au sujet de la croissance, nous avons parlé des croissances exponentielles néfastes (vente d'armes, pollution...). Nous avons vu la croissance selon la fonction logistique quand un maximum ne peut être dépassé. On démarre en croissance exponentielle, mais la présence du point d'inflexion et de l'asymptote donne à réfléchir.

Au sujet de Pythagore, nous avons parlé philosophie avec les philosophes, remise en question d'une théorie, histoire de la pensée mathématique.

La formation civique, spirituelle, me semble un volet essentiel de notre travail. On ne peut pas découper les rôles de façon trop stricte dans l'enseignement, sous peine de ne plus rien enseigner vraiment.

Exposition «mathématiques et croissance»

présentée par les élèves
du Lycée François Mauriac.

Introduction

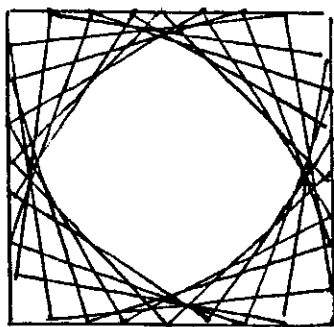
1. On n'est pas des bœufs
2. Ouvrez les yeux

Croître selon la proportionnalité

1. Rectangles proportionnels-Photos grand théâtre
2. Poupées russes et poupées ashanti
3. Format 21 sur 29,7
4. Mouvement uniforme : parachute
5. Croissance des feuilles
6. Et notre croissance ?

Croître selon la fonction puissance.

1. Loi parabolique - Peinture du mur carré
2. Vers la notion de dérivée (Newton/Leibniz)
3. Volume du cube (cubes en carton)
4. Chute libre des corps (Galilée)
5. Croître et décroître : problème des rectangles avec la ficelle
6. Croître et décroître : problème de vente de petits pois.

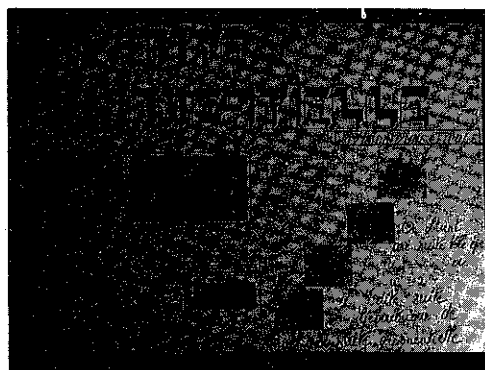


Croissance exponentielle

1. Suite exponentielle : Cellule - Radioactivité
2. Problème du nénuphar
3. Spirale logarithmique
4. Caisse d'Épargne
 - l'écuireil
 - calcul des intérêts
 - intérêt trimestriel - remboursement
5. Fonction exponentielle
6. Résultats d'une croissance exponentielle
 - population
 - croissance exponentielle néfaste
7. La croissance quand un maximum ne peut être dépassé (paramécies-moutons).

Croissance d'une famille de lapins

1. Problème des lapins de Fibonacci
2. Nombre de pétales d'une fleur
3. Échangeons nos pions (même modèle)
4. Une suite construite à partir de la suite de Fibonacci
5. Rectangle d'or et spirale
6. Un peu de trigonométrie (spirale avec des triangles)
7. Développement en fraction continue et homme de Vinci.

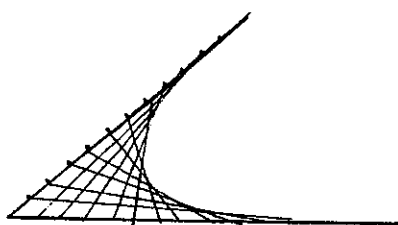


Exposition «Pythagore» présentée par les élèves du Lycée Magendie.

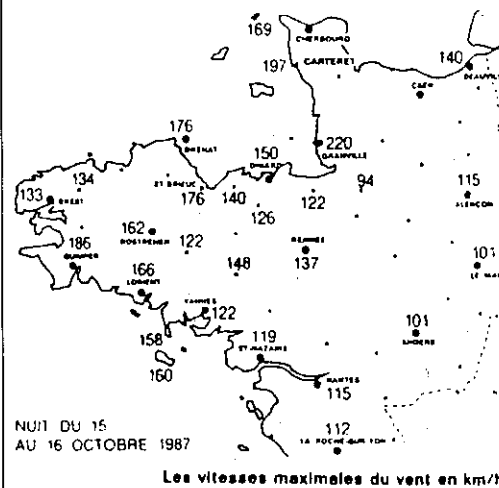
1. Pourquoi cette exposition ?
Replacer les mathématiques dans une perspective historique et philosophique.

2. Première partie : l'école de Pythagore

3. Qui était Pythagore ?
 4. Nombres et géométrie : Quelques démonstrations de Pythagore.
 5. Nous avons aujourd'hui des outils que Pythagore n'avait pas
 - la numération décimale de position
 - notation des variables par des lettres.
 6. Calcul au temps de Pythagore : les chiffres grecs - la table à compter.
 7. Notation moderne des variables (Viète et Descartes)
 8. Les Pythagoriciens pensaient que le nombre est l'essence de toutes choses, d'où leur science, leur philosophie et leur religion basées sur les nombres entiers et les fractions.
 9. La mystique du nombre chez les Pythagoriciens : nombres parfaits, nombres amis.
 10. La sphère, forme harmonieuse pour Pythagore.
 11. Harmonie et musique.
 12. Les cinq solides de Platon.
 13. Pour les pythagoriciens, la découverte des irrationnels qui ne peuvent se réduire à des fractions d'entiers a été un choc.
 14. $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction : deux preuves par l'absurde (preuves formelles).
 15. $\sqrt{2}$ développée en fraction continue (preuve constructiviste)
- Les incommensurables.



16. En divisant par $\sqrt{2}$: deux beaux dessins.
17. A la même époque, les Éléates se heurtaient aussi au problème de l'infini.
18. Deux paradoxes de Zénon d'Élée.
19. Autres crises en mathématiques. La découverte de l'irrationalité a provoqué, chez les Grecs, une crise de la pensée. Les mathématiques progressent par crises :
 - Géométries non euclidiennes (Riemann)
 - Théorie des ensembles (Cantor).
20. **Deuxième partie : Le théorème de Pythagore.**
21. En Égypte : la corde à nœuds (triangle 3, 4, 5).
22. Les tablettes de Mésopotamie (problème de l'échelle).
23. Le théorème de Pythagore a fait le tour du monde : problème du roseau Chine -Inde.
24. Démonstration du théorème de Pythagore par les élèves. Correction d'une erreur.
25. Démonstration d'Euclide dans les «Éléments».
26. Autres démonstrations du théorème.
27. Amusons-nous avec notre théorème : le pont aux ânes - la chaise de la mariée.
28. Un puzzle : avec deux carrés, en construire un troisième.
29. Les triplets Pythagoriciens : (équation diophantienne - théorème de Fermat).
30. Généralisation du théorème par similitude.
31. Les lunules d'Hippocrate.
32. Généralisation par glissement : une peinture moderne.
33. Généralisation par transformation affine :
 - le dessin sur la toile élastique
 - l'ombre au soleil du triangle rectangle et des carrés.
34. Problème de Pappus : sur les côtés d'un triangle quelconque, construire trois parallélogrammes de sorte que la somme des deux aires soit égale à l'autre.
35. Généralisation au triangle quelconque :
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
36. Aire du carré de côté variable dans la figure étudiée au panneau 23.
37. Un problème d'enveloppes de droites quand le carré varie à l'intérieur de l'autre.
Parabole réalisée avec des fils tendus.
38. Le dessin fait par l'ordinateur.
Le programme que l'on doit lui fournir en basic.



PROBLÈMES OUVERTS

Jacques VERDIER - Nancy

Travail de groupe en séquences longues : démarche de recherche sur problèmes ouverts.

EXEMPLES D'ÉNONCÉS

Pour permettre de mieux comprendre ce que nous entendons par «problèmes ouverts», voici deux exemples d'énoncés, tirés de (1) (cf. bibliographie).

*Bonjour !
C'est presque à la vitesse de l'éclair que je réponds à votre proposition d'article relatif à mon atelier.
Bien amicalement.*

OBJETS FRACTALS

Bibliographie : La recherche, janvier 1978
Encyclopedia Universalis (Fractales)
Petit Archimède nos. 49-50 et 57-58.

Courbe de Peano.

Sur cette figure due à Peano chaque segment est partagé en 5 parties,



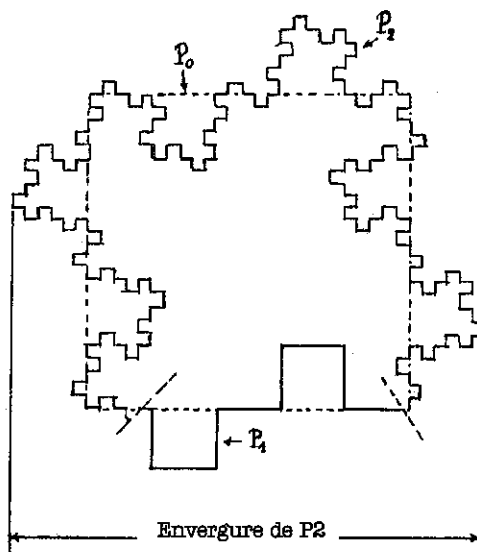
et se transforme en cette ligne brisée :



et ainsi de suite.

En supposant que le carré P_0 de départ a pour côté l'unité, déterminer la surface, la longueur et l'envergure de P_n .

Représenter graphiquement la longueur, puis l'envergure, de P_n en fonction de n .



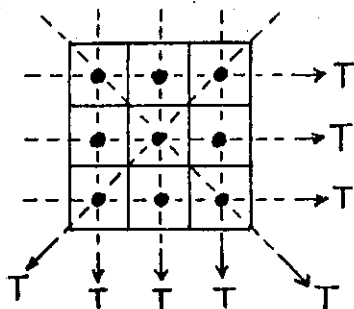
CARRÉS MAGIQUES

Voici deux carrés magiques :

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 8 | 5 |
| 8 | 5 | 2 |
| 5 | 2 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Dans ce T.D., on appellera «carré magique» tout carré de 3×3 cases, comprenant 9 nombres entiers, tels que les totaux des 3 lignes horizontales, des 3 colonnes verticales et des 2 diagonales soient égaux (sur les deux exemples ci-dessus, cette somme vaut 15).



Le problème est le suivant :
Connaissant le total T , peut-on déterminer combien il existe de carrés magiques correspondant à ce total T ?

LES OBJECTIFS POURSUIVIS

Ils sont triples.

Le plus important est l'**acquisition d'une démarche de recherche**.

La plupart du temps, les élèves se contentent de recettes menant au résultat, et fuient - pour différentes raisons - le travail de recherche de ces solutions.

Ce type de problème devrait leur permettre d'oser «se lancer» dans la résolution d'un problème ;
de reconnaître des situations déjà rencontrées ;
de réinvestir dans un domaine a priori éloigné leurs connaissances et savoir faire antérieurs ;
et de faire la distinction entre une solution empirique et une démonstration mathématique (au sens de **preuve**).

Le second objectif est de **travailler sur la restitution**.

L'élève n'a pas l'habitude de rendre compte de sa démarche aux autres élèves, ni au professeur.

La restitution donnera l'occasion de travailler la clarté, la lisibilité, l'expression en général (cf. infra).

Ce travail se faisant en groupes, il permet également d'atteindre des **objectifs de socialisation** :

être le plus autonome possible par rapport aux apprentissages ; travailler dans un groupe et y prendre des responsabilités ; susciter un comportement spécifique de travail en groupe (mettre en doute la parole de l'autre, demander des éclaircissements, rendre fructueux les désaccords, prouver que l'on a raison, etc...).

LE MODE DE FONCTIONNEMENT

a) le temps.

La question de la gestion du temps est très importante : mettre les élèves dans une telle situation de recherche est-il ou non une perte de temps ?

La réponse à cette question déterminera la durée de l'activité dans l'année. Il est d'autant plus difficile d'y répondre que le professeur a souvent tendance à privilégier le court terme, et à trouver que les «choses ne vont pas assez vite».

Pour nous, le temps passé à ce type d'activités (travail de recherche en groupes) a varié selon les années, en seconde, de 2 h par semaine à 2 h par quinzaine (parfois en demi-classe, parfois en classe non doublée).

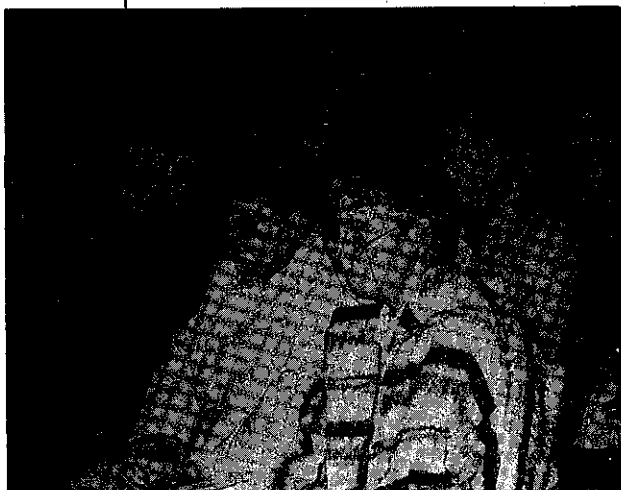
b) le choix des sujets.

Les sujets sont dans un classeur, contenant une cinquantaine de «fiches problèmes ouverts», qui reste en permanence dans la salle de classe, dans une armoire ouverte aux élèves. Outre ces «fiches problèmes», dont certaines sont présentées dans (1), d'autres étant directement recopiés à partir des brochures I.R.E.M. ou A.P.M.E.P., il y a un grand nombre de fiches de documentation (histoires des mathématiques, thèmes en rapport avec le programme de la classe etc...).

Un certain nombre de ces fiches ont été inspirées par des travaux d'élèves de 2^e T du Lycée Blaise Pascal de Rouen, qui avaient alors Marcel Dumont comme professeur : sa classe était entrée «en correspondance» avec ma classe de seconde.

Les élèves travaillent par petits groupes (deux, trois, ou au maximum quatre). Ces groupes sont libres d'évoluer dans le temps : ce sont le plus souvent les affinités individuelles qui président à leur constitution.

Chaque groupe choisit, dans le «stock» de fiches, celle sur laquelle il va travailler ; le professeur intervient pour que les élèves ne choisissent pas un travail trop difficile (en début d'année par exemple), ou trop semblable à un travail déjà fait par ce même groupe. Tous les groupes travaillent donc sur des sujets différents.



c) le suivi du travail.

A la fin de chaque séance, les élèves remplissent la page du jour du «Livre de Bord», ainsi conçue :

| | | | Date |
|------------------|-------------|---|--|
| Élèves du groupe | Nom du T.D. | Qu'avez-vous fait aujourd'hui ? Quelles difficultés avez-vous rencontrées ? | Que comptez-vous faire la prochaine fois ? |

C'est ce «livre de bord» qui permet le suivi du travail réalisé, car j'y apporte également mes appréciations et commentaires sur le travail réalisé (ou non réalisé!) dans la semaine.

d) Plusieurs types de restitution possibles.**L'exposé oral.**

Il n'est, le plus souvent, que la lecture d'un document écrit (il aurait fallu travailler en classe sur les techniques de l'exposé oral, ce qui aurait pris du temps, et ne faisait pas alors partie de mes priorités).

D'autre part, les résultats d'une démarche ne «passionnent» pas forcément ceux qui n'y ont pas participé : l'exposé n'est alors d'aucun profit pour le reste de la classe.

Le compte-rendu écrit (destiné au professeur)

Les élèves doivent y exposer le problème posé, leur démarche de recherche, les «pistes» sur lesquelles ils ont travaillé, la solution qu'ils ont trouvée, etc...

Il est cependant très difficile d'exiger des élèves qu'ils rédigent correctement (leur principal argument, bien connu de tous les enseignants, étant : «mais **vous**, vous avez parfaitement compris ce que **nous** voulions dire» ; une des grandes difficultés est de faire comprendre aux élèves la nécessité de faire un plan.

Recours à une tierce personne

Pour permettre de résoudre cette difficulté de rédaction, un autre professeur (celui de

français en l'occurrence) peut intervenir «en doublette» avec le professeur de mathématique, jouant le rôle du «candide» :

Cela aide les élèves à **explicit**er leur démarche de recherche ou leur raisonnement (le simple fait de devoir l'expliquer oralement au «candide» leur permettant de mieux en concevoir la structure, de mieux l'analyser, voire de mettre en évidence des points qu'ils croyaient avoir compris).

Il aide également les élèves à **rédiger**.

ÉDITION D'UN JOURNAL

Depuis 1984, j'ai proposé aux élèves d'éditer un «journal de Mathématiques» (interne à la classe), dans lequel chaque groupe publierait le compte-rendu de son T.D.

L'objectif est alors que la rédaction soit faite **en fonction** du public visé : les camarades de la classe (de même niveau mathématique, mais qui n'ont pas cherché le problème exposé).

Ce Journal a été très motivant, et a incité les élèves à rédiger correctement. C'est grâce à lui que les objectifs suivants ont -enfin- pu être atteints :

- rendre compte de sa démarche ;
- s'exprimer correctement par écrit (plan, phrases, clarté, lisibilité,...)
- présenter avec soin un travail.

L'ÉVALUATION DES ÉLÈVES

Les recherches et compte-rendus réalisés par les élèves lors de leurs T.D. font partie intégrante de leur travail et, à ce titre, doivent faire l'objet d'une évaluation ayant la même «valeur» que les tests de contrôle, les travaux sur ordinateur, etc...

Ces compte-rendus ne sont pas notés, mais sont évalués en fonction des objectifs énoncés.

Chaque élève a une «feuille de route» sur laquelle il inscrit tous les travaux qu'il a réalisés, et sur laquelle il reporte les notes, les appréciations et les commentaires du professeur (commentaires qu'il peut d'ailleurs lui-même commenter!).

Ce système d'évaluation - dont l'idée m'avait été donnée par José Maria, de la régionale APMEP de Nice - s'est révélé extrêmement formateur. Il pourrait encore être amélioré par un suivi plus approfondi des «types d'erreurs» faites par les élèves et des progrès réalisés.

En fin de trimestre, l'appréciation et la note portées sur le bulletin constituent un «résumé» des informations figurant sur cette feuille de route (la note du bulletin n'est donc pas QUE la moyenne des tests et contrôles notés).

Voici, en exemple, le début de la feuille de route d'un élève :

Claudine

| Date | Note | Nature du travail | Appréciations des profs | Votre commentaire |
|----------|------|--|---|-------------------|
| 17.09.83 | | Test de calcul (ordre des opérations - fractions). | L'ordre des opérations (la division surtout) n'a pas été respecté. | |
| 20.09.83 | 19 | Devoir sur les fractions | Tous les calculs sont exacts. Mais tu pouvais simplifier plus tôt les fractions. | |
| 26.09.83 | | Devoir à la maison | T. insuffisant. Tu n'as pas répondu aux questions posées dans (1) : les égalités sont fausses sur un exemple cela ne prouve nullement qu'elles sont toujours fausses. | |
| 27.09.83 | 18 | Devoir sur ordinateur | | 9 justes sur 10 |
| 10.10.83 | | Devoir à la maison | Des fautes de calcul qui n'auraient pas dû apparaître dans le 3 ^e exercice. Pour les deux autres exercices, les réponses ne sont pas entièrement justifiées : il faut apporter la preuve de ce que tu avances. | |
| 24.10.83 | | Td n° 1 en groupe : L'indice des prix | Les calculs sont exacts, mais la rédaction est très insuffisante. Imaginez que vous avez à faire paraître ce compte-rendu dans une revue de consommateurs : qui vous comprendrait ? | |

Bibliographie

(1) Jacques VERDIER, «Travail de groupe en séquences longues : démarche de recherche sur problèmes ouverts», publication de l'A.P.M.E.P. Lorraine, 1986, 84 pages, 30 F (40,90 F port compris).

Compte-rendu d'une expérience menée pendant plusieurs années en classe de seconde (mais adaptable à d'autres niveaux) : les objectifs du travail, la gestion de la classe, des exemples commentés de réalisations d'élèves. Avec 35 fiches-problèmes.

(2) G. ARSAC, G. GERMAIN, M. MANTE, D. PICHOD, «La pratique du problème ouvert», publication de l'I.R.E.M. de Lyon, 1984, 68 pages 20 F.

Les objectifs didactiques des problèmes ouverts ; leur place par rapport au programme (au collège notamment) ; le rôle du professeur ; l'influence sur la «pédagogie traditionnelle» ; quelques conseils ; des rapports d'expérimentation.

LE DÉVELOPPEMENT OPÉRATOIRE DE L'ENFANT

Guy DUMOUSSEAU, Hervé LONDEIX - Bordeaux

De 12 à 14 ans, ses rapports avec les acquisitions mathématiques et avec les processus de raisonnement. Cet atelier devait être une possibilité de discussions, d'échanges.

N

otre intervention s'appuyait sur un travail publié par l'I.R.E.M. de Bordeaux, en 2 tomes vendus ensemble 40 F.

Nous rendons compte, dans ces 2 tomes, de la recherche sur 5 ans d'un groupe de collègues auquel s'était joint un psychologue, et qui a bénéficié de l'aide d'un informaticien. En moyenne 260 élèves, chaque année, ont été concernés par les différents tests psychologiques des mathématiques.

Deux exigences ont été respectées : L'ancrage de nos observations dans un champ théorique précis fut-il lui-même en chantier.

Une démarche résolument méthodique : formulation d'hypothèses, élaboration d'instruments d'observations, mise au point de conditions d'observations et d'interprétations, choix des méthodes de traitements de données etc...

NOS HYPOTHÈSES DE TRAVAIL

Elles ont subi, au cours des 5 années de travail, des modifications importantes liées à des objectifs de plus en plus précisés et à une méthodologie rendue plus efficace.

Première formulation :

L'acquisition de connaissances mathématiques, la réussite en mathématiques dépend du niveau opératoire de l'enfant, au sens de Piaget ; bien entendu, cela n'est pas suffisant, la connaissance mathématique dépend, en fait, de bien d'autres variables : acquis antérieurs structurés, apprentissage, échecs antérieurs, perception, imagerie disponible, intérêt du milieu social, curiosité, acceptation des règles du jeu...

Mais, pour nous, une cause nécessairement importante est l'accès à un certain niveau opératoire.

Sans ignorer les thèses de Wallon, de Gessel, les idées de Bachelard, nous avons pris le sujet épistémique de Piaget comme modèle structural.

Nous avons donc admis l'idée de discontinuité structurale, l'existence des stades concret, préformel et formel. Placés devant le même problème, des enfants de niveaux opératoires différents n'ont donc pas les mêmes stratégies de réponse.

Au cours du développement, les structures dépassées ne disparaissent pas, mais elles sont intégrées aux suivantes... avec des régressions possibles non signalées par Piaget.

Nous avons utilisé la notion de schèmes opératoires, et particulièrement le schème des opérations combinatoires.

Simultanément à ces choix théoriques, des épreuves ont été mises au point en référence à la théorie de Piaget, des conditions d'observations ont été fixées : interviews ou épreuves papier crayon.

Deuxième formulation :

Dès que l'on passe du niveau épistémique à l'observation du sujet psychologique, c'est-à-dire que l'on quitte l'expérience de laboratoire pour observer le sujet dans des situations plus naturelles et séquentielles, on s'aperçoit que le modèle piagétien sous-estime trop un certain nombre de paramètres de nature différentielle (affectivité, régression, conditions pédagogiques, motivations,...) et que la stabilité d'un niveau opératoire, pour un sujet donné, est utopique.

Nous avons donc intégré à nos hypothèses le modèle de Longeot et de la psychologie différentielle.

On constate un asynchronisme intra-stade imputable, en termes factorialistes, soit à un facteur de groupe opératoire (schèmes différents, domaines), soit à un facteur spécifique à chaque élève (difficulté, motivation, représentation).

De plus, la connaissance mathématique nous semble s'effectuer dans un cadre par nature différentiel. En mathématique, les mécanismes propres à la pensée naturelle (sémantisation, centration, motivation, perception,...) interviennent en même temps que des processus de formulation logique, et sont aussi en relation avec des mécanismes de représentation liés à l'infra-logique (éléments de continus spacio-temporels : temps, vitesse, imagerie spatiale ou fonction spatiale... souvent avec des idées de globalité).

Sur le plan pratique, quelques contraintes pour l'examineur ont été précisées.

— Identifier les procédures d'action que le sujet met en œuvre, et repérer les remaniements opératoires de sa pensée au fur et à mesure que s'accroît la complexité de la tâche.

— Examiner la manière dont une même opération se généralise à des contenus variés, à l'intérieur d'un même domaine cognitif.

— Vérifier les synchronismes des opérations de même nature.

Les résultats des épreuves opératoires ou de mathématiques ont subi deux traitements :

● l'un, informatique, à partir des réussites ou échecs aux réponses à une grille d'analyse ;

● l'autre, procédurable, à caractère différentiel.

LES ÉPREUVES

Elles ont été très remaniées au cours des années de recherche.

Les épreuves opératoires ont été passées à partir de tests ou connus ou créés, de niveaux raisonnablement admis (concret, préformel, formel).

On a multiplié les tests de même structure, mais d'habillages différents.

Les épreuves mathématiques ont été choisies de caractère scolaire classique, mais avec des énoncés simples, ne demandant qu'un raisonnement déductif, et sans questions multiples, mais exigeant, par suite de la représentation, des réinvestissements de propriétés trouvées.

Les textes, leurs préparations, les grilles d'analyse, les traitements informatiques, leurs analyses et celles des procédures sont données dans les fascicules déjà signalés.

Quelques remarques à la suite de ces travaux :

— Il ne suffit pas que des épreuves soient de difficultés croissantes pour qu'il y ait apparition d'une succession de stades opératoires. Il faut qu'il y ait rupture, remaniement des manières de répondre.

Il nous a fallu multiplier les épreuves de même structure pour étudier la stabilité d'un stade.

— L'analyse procédurale a montré qu'à quelques exceptions près, tout travail d'élève révèle une recherche logique plus ou moins bien suivie ; il y a donc pratiquement toujours des éléments positifs apportés par l'élève et qui donnent à l'enseignant des possibilités d'action.

— Nous rendons compte aussi d'une expérience didactique qui nous a paru très efficace.

Un élève étant en échec sur une question, une suggestion motivante, sans discours et sans apport pédagogique, portant sur la difficulté rencontrée, l'amenant à réexaminer sa réponse, entraîne assez souvent une restructuration qualitative de sa démarche, une relance de sa recherche.

— La méthodologie que nous avons utilisée les deux dernières années nous a paru exploitable.

En particulier : savoir ce que l'enseignant demande dans une situation proposée, et analyser ce que fait réellement l'élève, confronter sa logique à la sienne.

— Rien n'a été observé permettant de mettre en doute l'essentiel des théories de Piaget, mais la non stabilité d'un stade, les rythmes différents de franchissement de ces stades, les régressions provisoires, etc... sont des réalités.

Des différences intra-individuelles et inter-individuelles, variables dans le temps sont indéniables.

— La connaissance se fait par déclics (Bachelard) et le professeur a un rôle très important par l'introduction de situations conflictuelles ou l'élève, dans sa recherche, va être obligé de restructurer sa pensée par une action propre.

— Pour démontrer, il faut qu'il y ait nécessité ressentie... c'est évident... et pourtant !

Et quand l'élève a tous les éléments pré-alables à une déduction alors sauf exception le raisonnement est fait.

— Après ce qui a été constaté, l'orientation a besoin d'être très réfléchie. Celle de fin de 5^e est-elle justifiée ?

LOGICIELS D'AIDE A LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Régis GRAS, Marie-Danielle FONTAINE
Italo GIORGIUTTI, Annie LARHER (1)

Problématique.

Même si l'ensemble des activités d'apprentissage ne s'y réduit pas, la résolution de problèmes demeure l'activité majeure constitutive des connaissances en mathématiques. Or, aussi bien en fin du 1^{er} cycle (4^e et 3^e) qu'au début du 2^e cycle (2^e) secondaires, la résolution de problèmes, nécessitant élaboration et rédaction de preuves «intellectuelles», rencontre différents obstacles, souvent réhibitoires pour certains élèves :

- la figure est comprise comme une tâche en soi, traduction objective d'informations textuelles et, de ce fait, difficilement appropriable et opératoire ;
- l'enjeu de la résolution et de l'apport de preuve n'agit pas comme moteur d'engagement de l'élève, fonctionnant avec son économie propre, lorsque l'évidence ou bien l'invraisemblance d'une propriété, la distance entre données et but à atteindre sont trop élevées ;
- les silences du contrat didactique conduisent souvent l'élève à se demander ce que le maître veut ou à tenter de décalquer servilement des procédures modèles ;
- la structure de la solution exige la découverte et l'organisation d'éléments rationnels intervenant dans la preuve ;
- la démonstration, dans sa composante sociale, contraint au respect de certains canons, d'une certaine rhétorique ;
- de façon plus générale, le statut épistémologique de l'étude des figures change brusquement de la classe de 5^e (étude expérimentale et descriptive) à la classe de 4^e et suivantes (connaissance déductive des propriétés et relations).

QUELQUES HYPOTHÈSES PSYCHODIDACTIQUES

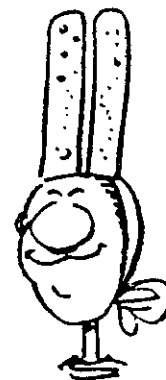
Nous citerons seulement celles que nous avons tenté d'opérationnaliser dans les logiciels :

CONGRÈS DES PROFS DE MATHS EN
PAYS BIGOUDEN..

SOUVENIR



GOUDEN



BiGOUDEN

- l'apprentissage de la traduction graphique d'une situation géométrique décrite par un énoncé est source de structuration du problème et point de départ de conjectures (à niveau de certitude compatible avec l'existence d'un enjeu au risque acceptable) ;
- le conflit socio-cognitif modifie la densité des conjectures et, donnant un sens à l'argumentation, fait avancer la structure de la solution ;
- le découpage en sous-problèmes est la démarche-type de la pensée du sujet dans sa recherche organisée.
- la mise à jour constante de l'état d'avancement permet à l'élève de garder le cap et de dissymétriser les données, les acquis et les objectifs à atteindre (i.e. en général, des propriétés nécessaires).

RÉALISATIONS LOGICIELLES

Nous avons envisagé deux types de problèmes de géométrie :

- les problèmes «à démonstration»,
- les problèmes de construction.

Nous présenterons à Rouen la réalisation d'aide relative au premier type. Le logiciel, écrit en Prolog pour Macintosh, a la propriété intéressante d'admettre de façon très simple tout problème de nature affine pour lequel une banque d'une douzaine de théorèmes suffit. Ainsi l'utilisateur peut, à son gré, modifier un texte déjà intégré ou entrer lui-même un nouveau problème du même type. Le logiciel est constitué de plusieurs modules :

1) module «consignes-énoncé» ;

2) module «exploration de la figure» dans lequel l'élève émet des conjectures et se déclare apte ou non à en apporter la preuve ;

3) module «démonstration» dans lequel l'élève conduit sa preuve suivie strictement par un démonstrateur de théorème, module duquel il peut sortir pour retourner au précédent ou pour consulter l'état actuel du pas de preuve dans lequel il est engagé ;

4) module «bilan» ou «contrat» qui, consultable à tout moment, contient l'état de la situation générale : propriétés déclarées vraies, démontrables et propriétés démontrées ;

5) module «remise à zéro» qui permet d'annuler le précédent et repartir sous un nouveau bilan.

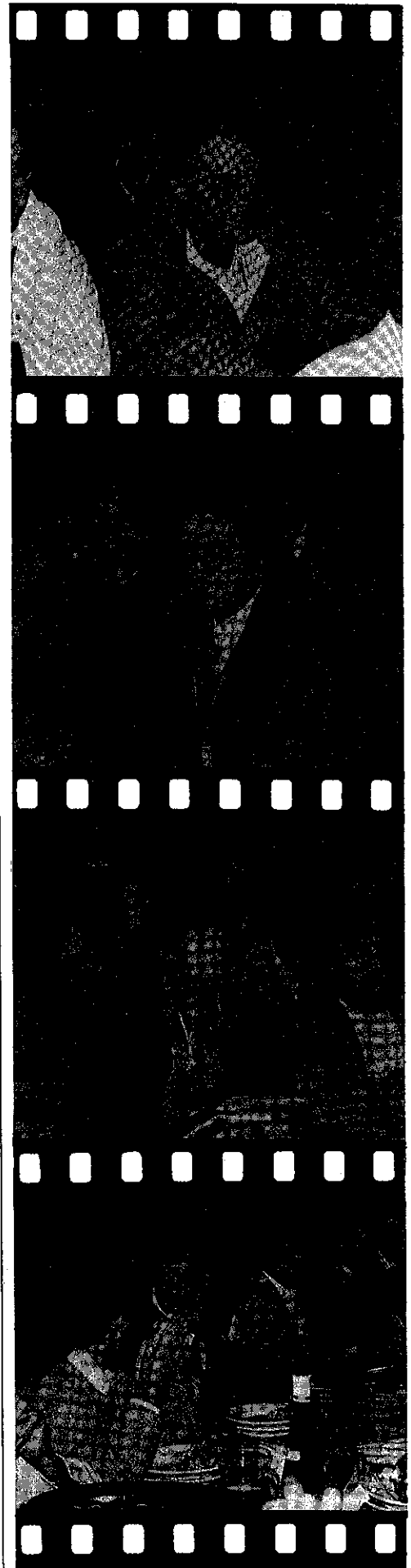
Ce logiciel a été expérimenté dans différentes classes de 4^e, 3^e et même 2^e.

QUELQUES PERSPECTIVES

Outre l'expérimentation du logiciel dans l'état actuel, nous en envisageons une évolution selon 3 directions, à charge au secteur privé d'en assurer la finition et la diffusion :

- une direction permettant de varier les programmes de construction de la figure afin de faire percevoir différemment les propriétés en jeu ;
- une direction visant à analyser succinctement le langage de l'élève et à prendre en compte ainsi le langage naturel employé, au prix sans doute d'une reformulation synonymique en langage plus formalisable ;
- Une direction plus orientée vers l'élaboration pour T07-70 ou M05 de produits d'aide à l'apprentissage de la démarche de preuve mathématique et compatibles avec la philosophie précédente.

(1) Groupe de Didactique de l'U.F.R. Mathématiques et Informatiques de l'Université de Rennes I.



STATISTIQUES OU PROBABILITÉS : POUR QUI ? POUR QUOI ?

Paul-Louis HENNEQUIN - Clermont-Ferrand

J'aurais souhaité que cet atelier soit l'occasion de débattre des deux questions suivantes :

Les «nouveaux» programmes de Terminales éliminent de la plupart des sections la statistique de deux variables et gardent une toute petite «initiation aux probabilités».

— Les programmes du lycée gardent-ils alors une cohérence et un sens dans ce domaine ?

— La formation des maîtres est-elle enfin satisfaisante sur ce point ?

Je propose donc à tous ceux qui comptent participer à l'atelier ou qui liront ces lignes, en particulier s'ils enseignent en lycée de m'indiquer par écrit les problèmes que leur pose cet enseignement et ce qu'ils répondent à ces deux questions.

Je m'engage en contrepartie à retourner à chacun une synthèse des textes reçus, à répondre dans la mesure du possible aux questions posées et à transmettre celles qui concernent d'autres interlocuteurs (Ministère, GREM, Bureau,...).

Afin de lancer le débat par un apport positif, je donne ici une bibliographie (qui avait été demandée il y a deux ans aux journées nationales de Port Barcarès) qui pourra aider en particulier les candidats aux CAPES (externe et interne) (partie I et II) et à l'agrégation (III, IV, V, VI) et les enseignants des classes préparatoires (SUP-BIO, HEC).

Malgré le caractère arbitraire de toute classification et en particulier de la séparation entre probabilités et statistiques, nous avons réparti les ouvrages cités ici en neuf rubriques :

1. Initiation : Cours de DEUG ou classes préparatoires.
2. Initiation : Recueils d'exercices ;
3. Théorie de la mesure - intégration (Maîtrise).
4. Théorie des probabilités (Maîtrise).
5. Théorie des processus et fonctions aléatoires.
6. Statistique Mathématique.
7. Analyse des données.
8. Algorithmes et programmes informatiques.
9. Applications (Biologie, Économie, Sciences Humaines).

Nous n'avons cité ici que des ouvrages en langue française, parus, réédités, réimprimés, ou traduits depuis 1980 (l'année indiquée est celle de la dernière impression ou de la traduction). Les ouvrages sont rangés dans chaque paragraphe suivant l'ordre alphabétique du 1^{er} auteur.

Nous n'avons pas cité les recueils de séminaire (comme celui de Strasbourg ou l'École d'Été de Saint-Flour) car cela conduisait à analyser tous les périodiques et aurait augmenté considérablement le volume de ce texte.

I. Initiation

(cours de D.E.U.G. ou classes préparatoires).

A.I.D.E.P. (Association interentreprises pour le développement de l'enseignement programmé) et **C.I.E.F.O.P.** (Centre Interentreprises d'Études de Formation et de Perfectionnement). Probabilités et Statistiques : cours programmé à l'usage des cadres 384 p. Dunod 1981.

BERTAUD M., CHARLES B. Initiation à la Statistique et aux probabilités. 360 p. Eyrolles 1980.

BOULEAU N. Probabilités de l'Ingénieur : variables aléatoires et simulation. 392 p. Herman 1986.

CALOT G. Cours de Calcul des Probabilités. 496 p. Dunod (Décision) 1986.

CALOT G. Cours de statistique descriptive. 512 p. Dunod (Décision) 1984.

DEHEUVELS P. La probabilité, le hasard et la certitude. 128 p. PUF «Que sais-je ?» n° 3. 1982.

GOUJET C. et NICOLAS P. Probabilités, initiation à la Recherche Opérationnelle (B.T.S. 2^e année) 272 p. Masson 1986.

GRAIS B. Statistique descriptive. 288 p. Dunod. 1986

GRAIS B. Méthodes Statistiques. 396 p. Dunod. 1986

HAMMAD P. Cours de Probabilités. 230 p. Cujas 1985.

HENOCQ C. Cours de probabilités et statistiques mathématiques. Prép. Vét. 96 p. Ellipses 1987.

JAFFARD P. Probabilité. 68 p. Masson 1984.

JAFFARD P.
Statistiques 56 p. Masson 1981.

LEBOEUF C, ROQUE J.L., GUEGAND J.
Cours de probabilités et de statistiques. 288 p. Ellipses 1983.

LJORZOU A.
Initiation pratique à la Statistique. 324 p. Eyrolles 1985.

MANOUKIAN E.A.
Guide de Statistique Appliquée. 224 p. Hermann 1986.

ROSS S.M.
Initiation aux Probabilités. 416 p. Presse Polytechniques Romandes. Lausanne 1986.

RUEGG A.
Probabilités et Statistiques. 166 p. Eyrolle 1985.

II. Initiation : Recueil d'exercices

AMZALLAG E., PICCIOLI N.
Introduction à la statistique. Exercices corrigés. 352 p. Hermann (Méthodes) 1978.

BAILLE A., VANCUTSEM B.
Problèmes de probabilités et statistique. (Agrégation 1972-1978) 232 p. Masson 1980.

CALOT G.
Exercices de calcul des probabilités 160 p. Dunod (décision) 1986.

CEHESAT.
Exercices commentés de statistique et informatiques appliqué. 480 p. Dunod 1986.

GRAIS.
Exercices de statistique descriptive. 248 p. Dunod 1985.

HAMMAD P., TARANCO A.
Exercices de probabilités. 232 p. Cujas 1985.

HESS C. de MILLEVILLE H.
Problèmes corrigés de statistiques posés aux examens du DEUG de Sciences Économiques 1^{er} et 2^e année. 128 p. Ellipses 1982.

LABROUSSE C.
Statistique. Exercices corrigés avec rappels de cours.
Tome 1 - 1^{er} année de Sciences Éco. 320 p. Dunod 1986
Tome 2 - 2^e année de Sciences Éco. 304 p. Dunod 1987

LANDRY P. et al.
Exercices corrigés de Probabilités. 160 p. Ellipses 1984.

LIPSCHUTZ.
Probabilités. Cours et problèmes. 500 exercices résolus. Série Schaum 161 p. Mc. Graw Hill 1984.

SPIEGE L.R.M.
Probabilités et Statistiques. Cours et Problèmes. 760 exercices résolus. Série Schaum 396 p. Mc. Graw Hill 1984.

SPIEGEL R.M.
Statistique, Théorie et Application. 875 exercices résolus. Série Schaum 368 p. Mc. Graw Hill 1984.

III. Théorie de la mesure Intégration

MALLIAVIN P.
Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale. Cours. 200 p. Masson 1982.

LETAC G.
Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale. Exercices 152 p. Masson 1982.

VOKHAC K.
Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier. Interprétation dans le langage des probabilités. 256 p. Ellipses 1984.

IV. Théorie des probabilités

DELLACHERIE C, MEYER P.A.
Probabilités et Potentiel
Chapitre I à IV : Espaces mesurables. Lois de probabilités et espérances mathématiques. Compléments de théorie de la mesure. Processus stochastiques. 308 p. Hermann 1982.

Chapitre V à VIII : Théorie des martingales. 496 p. Hermann 1980.
Chapitre IX à XI : Théorie discrète du potentiel. 244 p. Hermann 1983.

Chapitres XII à XVI : Résolvantes, processus de Markov. 392 p. Hermann 1987.

KOROLIOUK V. et al.
Aide mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique. 582 p. Éditions MIR Moscou 1983.

MÉTIVIER M.
Notions fondamentales de la théorie de probabilités. 352 p. Dunod 1985.

MONFORT A.
Cours de Probabilités. *Economica* 1980.

PELLAUMAIL J.
Probabilités, Statistiques, Files d'attente. Cours et exercices résolus. 304 p. Dunod 1986.

POUGATCHEV V.
Théorie des probabilités et statistiques mathématique. Éditions Mir Moscou 1982.

VO KHAC K
Théorie des probabilités. 288 p. Ellipses 1984.

V. Théorie des Processus et Fonctions aléatoires

AZENCOTT R., DACUNHA-CASTELLE D.
Série d'observation irrégulières. 198 p. Masson (Techniques stochastiques). 1984.

BASS J.
Fonctions de corrélation, Fonctions pseudo aléatoires et applications. 288 p. Masson 1984.

BERTRANDIAS J.P., COUOT J., DHOMBRES J., MENDES FRANCE M., PHAM PHU HIEN, VO KHAC KHOAN.
Espace de Marcinkiewicz, corrélations, mesures, systèmes dynamiques, 260 p. Masson 1987.

BLANC LAPIERRE A., PICINBONO B.
Fonctions aléatoires. 440 p. Masson (Technique des Télécommunications). 1981.

DACUNHA CASTELLE D., DUFLO M.
Probabilités et statistiques.
Tome 2 : problèmes à temps mobile. 304 p. Masson 1984.

DACUNHA CASTELLE D., DUFLO M., GENON-CAELOT V.
Exercices de probabilités et statistiques. Tome 2 : problèmes à temps mobiles 148 p. Masson 1984.

DUFLO M., FLORENS-ZMIROU D.
Décisions statistiques pas à pas. 130 p. Les cours du C.I.M.P.A. 1981.

GOURIEROUX C. et MONFORT A.
Cours de séries temporelles. *Economica* 1983.

PRUM B.
Processus sur un réseau et Mesures de Gibbs. Applications 200 p. Masson 1986.

VI. Statistique mathématique

DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M.
Probabilités et Statistiques.
Tome 1 : Problèmes à temps fixe. 224 p. Masson 1982

DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M
Exercices de probabilités et statistiques.
Tome 1 : problèmes à temps fixé. 200. p. Masson 1982.

MONTFORT A.
Cours de statistique mathématique. *Economica* 1982.

TASSI PR
Méthodes statistiques. 370 p. *Economica* 1985.

VO KHAC K.
Estimation et tests paramétriques et non paramétriques. 352 p. Ellipses 1985.

VII. Analyse des données

BENZECRI J.P. (et collaborateurs)
Pratique de l'analyse des données. Dunod.
Tome 1 : Analyse de correspondances. Exposé élémentaire. 464 p. 1984

Tome 2 : Abrégé théorique. Études de cas de modèles. 480 p. 1987.

Tome 3 : Linguistique et lexicologie. 566 p. 1981 (épuisé)

Tome 5 : Économie. 544 p. 1988.

BENZECRI J.P.
Histoire et préhistoire de l'analyse de données. 168 p. Dunod 1982.

BENZECRI J.P.
L'analyse des données. Dunod.

Tome 1 : La taxonomie 644 p. 1984.

Tome 2 : L'analyse des correspondances. 638 p. 1982.

CHANDON J.L., PINSON S.
Analyse Typologique. Théories et applications. 264 p. Masson 1981.

DIDAY E., LEMAIRE J. et autres.
Éléments d'analyse des données. 480 p. Dunod 1985.

FOUCART T.
Analyse factorielle de tableaux multiples. 192 p. Masson 1982.

HERMAN J.
Analyse de données qualitatives. Tome 1 : traitement d'enquêtes, échantillon, répartitions, associations. 192 p. Masson.

LAGARDE (J. de).
Initiation à l'analyse des données. 160 p. Dunod 1982.

LEBART L., MORINEAU A., FENELON J.L.
Traitement des données statistiques. 528 p. Dunod 1984.

LEFEBVRE J.
Introduction aux analyses statistiques multidimensionnelles. 296 p. Masson 1983.

LERMAN I.C.
Classification et analyse ordinale des données. 760 p. Dunod 1981.

TOMASSONE R., LESQUOYE, MILLER C.
La régression, nouveaux regards sur une ancienne méthode de statistique. 184 p. Masson 1983.

VIII. Algorithmes et Programmes informatiques

FOUCART T., BENSABER A., GARNIER R.
Méthodes de la statistique. 286 p. Masson 1981.

FOUCART T., LAFAYE J.Y.
Régression linéaire sur micro ordinateurs. 248 p. Masson 1983.

FOUCART T.
Analyse factorielle : programmation sur microordinateurs. 240 p. Masson 1985.

GENSTAT.
Un langage statistique. INTA.

GUIHUR.
Procédures de tri. Programmes en Basic et en Pascal. Masson 1985.

LEBART L., MORINEAU A., TABARD N.
Techniques de la description statistique. Méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux. 360 p. Dunod 1986.

ROUX M.
Algorithmes de classification : 152 p. Masson 1985.

IX. Applications

● **SCIENCES DE LA VIE.**

DRESS F.
Calcul des probabilités pour les sciences de la nature et de la vie. 144 p. Dunod 1980.

FRONTIER S.
Abrégé de méthode statistique. 248 p. Masson 1981.

GRONTIER S. et AL.
Stratégies d'échantillonnage en écologie. Masson 1983.

HILLION A.
Les théories mathématiques des populations. 128 p. P.U.F. «Que sais-je?» n° 2258. 1986.

JOLIVET E.
Introduction aux modèles mathématiques en biologie. Masson 1982.

SALAMON R.
Abrégé de Statistique médicale. Masson 1987..

● **THÉORIE DU SIGNAL - TÉLÉCOMMUNICATIONS**
DELMAS J.P.
Probabilités et Télécommunications. Exercices et problèmes commentés. 240 p. Masson 1987.

● **ÉCONOMIE - ÉCONOMÉTRIE.**
BATOLA
Statistique et Économétrie. Masson 1983.

COUTROT B. DROESBEKE F.
Les méthodes de prévision. «Que sais-je?» n° 2157, 128 p. PUF 1984.

DUBOS J.
Statistique descriptive en sciences économiques. 342 p. Dunod 1984.

FOURASTIE J., GRAIS B.
Les indices Statistiques. Masson 1984.

FOURASTIE J., LEVY S.
Statistiques Appliquées à l'économie.

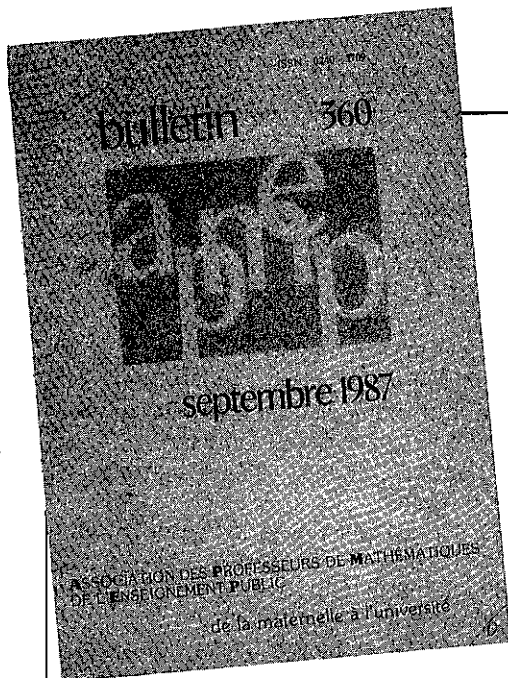
GOURIEROUX C.
Économétrie des variables qualitatives. *Economica* 1984.

● **VIE SOCIALE - SCIENCES HUMAINES.**
BESSIS J.
La probabilité et l'évaluation des risques. 132 p. Masson 1984.

ROUANET H. LE ROUX B. BERT M.C.
statistique en sciences humaines.
Procédures naturelles. 208 p. Dunod 1987.

LE BULLETIN VERT POUR QUI ? POURQUOI ?

P. L. HENNEQUIN - Clermont-Ferrand



Né en 1911, notre «Bulletin Vert» est aussi vieux que notre Association.

Il est en permanence l'objet de critiques souvent contradictoires, et il faut voir là un signe de vitalité. D'ailleurs d'autres publications le complètent : les brochures depuis une vingtaine d'années, plus récemment des publications régionales comme «Plot» ou «l'Ouvert» et le serveur qui met les technologies modernes à la disposition des adhérents tant pour accélérer la circulation des informations que pour en faciliter l'accès par des sélections multi-critères.

Le débat doit être organisé ; il a été relancé par le Comité National dans sa séance du 24 janvier 1987 et j'avais proposé qu'il reprenne aux journées de réflexion de Metz le 9 mai. Je comptais donc que les journées de Loctudy me permettraient d'exposer ce qu'a été le travail de la Commission du Bulletin et de la Commission des Publications cette année et de mieux l'adapter aux vœux de la majorité des adhérents.

La commission des publications, poursuivant sa politique de diversification a décidé de s'élargir à un représentant du serveur afin de mieux coordonner les produits offerts par celui-ci avec les autres publications. Le serveur par exemple pourra reprendre les ouvrages cités dans la rubrique matériaux, ou les index du bulletin afin de permettre leur accès par des entrées diverses (niveau, sujet, auteurs).

ANNEXE I.
MOYENNES ANNUELLES DES CONTENUS DU BULLETIN DE 1979 à 1986

| Rubriques | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Nombre de pages | 177 | 196 | 197 | 180 | 132 | 139 | 190 | 143 |
| Adresses et sommaire | 16 | 14 | 14 | 14 | 16 | 6 | 2 | 2 |
| Editorial et annexes | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 15 | 18 | 13 |
| Journées Nationales | 12 | 12 | 15 | 20 | 7 | 11 | 12 | 10 |
| Echanges | 2 | 3 | 11 | 6 | 8 | 6 | 2 | 11 |
| Etudes | 19 | 22 | 18 | 24 | 15 | 5 | 2 | 11 |
| Etudes didactiques | 13 | — | 9 | — | 6 | — | — | 5 |
| Mathématiques et Société | — | — | — | — | — | — | 2 | 4 |
| Enseignement des maths à l'étranger ici et ailleurs | 3 | 12 | 3 | 0 | 3 | 5 | 2 | 11 |
| Dans nos classes | 11 | 15 | 11 | 16 | 6 | 23 | 30 | 10 |
| Manuels scolaires | 2 | — | — | — | — | 3 | 9 | — |
| Programmes et commentaires, nouveaux programmes | — | — | — | — | — | — | 17 | 4 |
| Enseignement élémentaire | — | — | — | — | 3 | — | — | — |
| Dossiers 1 ^{er} cycle | — | 26 | 17 | 10 | 9 | 1 | 5 | — |
| Dossiers 2 ^e cycle | — | — | — | — | 2 | 4 | 15 | — |
| Examens et concours | 3 | — | — | 1 | 1 | — | 11 | — |
| Enseignement technologique | — | 2 | — | — | — | — | — | — |
| Evaluations | 4 | — | — | — | — | — | — | — |
| Les problèmes | 4 | 6 | 4 | 3 | 3 | 1 | 11 | 9 |
| Formation permanente | — | 1 | — | 1 | — | — | — | — |
| Formation des maîtres | 5 | — | 4 | — | — | 5 | 3 | — |
| Audiovisuel | — | 1 | — | 3 | — | — | — | — |
| Informatique | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | 10 | 9 | 2 |
| Interdisciplinarité | 7 | 2 | — | — | — | — | — | — |
| Jeux et Mathématiques | 1 | 4 | 8 | 6 | 8 | 6 | 1 | 2 |
| Matériaux | 15 | 17 | 14 | 18 | 13 | 15 | 5 16 | 14 |
| Tribune libre | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | — |
| Courrier des lecteurs | 3 | 4 | 4 | 6 | 4 | 3 | 5 | 3 |
| Vie de l'Association | 27 | 31 | 33 | 30 | 4 | 2 | 9 | 1 |
| Vie des régionales | 7 | 6 | 4 | 3 | 1 | — | 1 | — |
| Publicité | 15 | 13 | 16 | 14 | 11 | 12 | 9 | 9 |
| Vie des établissements | — | — | — | — | — | — | — | 3 |
| Fiches de cuisine du tonton Lulu | — | — | — | — | — | 1 | — | 2 |
| Mots croisés | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 |
| 75 ^e anniversaire | — | — | — | — | — | — | 1 | 11 |
| Histoire d'une découverte | — | — | — | — | — | — | — | 3 |
| I.C.M.I. | — | — | — | — | — | — | — | — |

La commission du bulletin a poursuivi l'analyse statistique de son travail, (cf. Bulletin n° 320 p. 547, n° 342 p. 5, n° 355 p. 455).

On retrouvera en Annexe 1 la statistique du contenu du bulletin rubrique par rubrique de 1979 à 1986 et en Annexe 2 les décisions de la Commission pendant la même période.

Elle a par ailleurs décidé une réorganisation qui rentrera en vigueur progressivement à partir du numéro 361 (Février 1987) (Annexe 3).

Sur le fond : Le bulletin sera désormais mieux structuré en rubriques dont chaque responsable aura une large autonomie pour solliciter des articles et les présenter.

Sur la forme : Une consultation va être lancée sur le format (format actuel ou format double A4 = 21 x 29,7 plus moderne) et un concours ouvert pour une nouvelle couverture.

Je demande à tous ceux qui liront ces lignes de m'indiquer dans une petite note précisant leur nom et leur adresse :

1° Toutes les critiques qu'ils ont à formuler sur le bulletin.

2° Les suggestions qu'ils proposent pour que notre bulletin réponde mieux à l'attente du plus grand nombre d'adhérents.

Je m'engage en contrepartie :

1° A retourner à chacun une synthèse de toutes les réponses reçues.

2° A en faire part à la Commission du Bulletin.

ANNEXE 2

DECISIONS DE LA COMMISSION DU BULLETIN 1979-1986

| Date des séances | 1 ^{re} lecture | 2 ^e lecture | bons à publier | Corrections | | en attente | ratulés |
|------------------|-------------------------|------------------------|----------------|-------------|-----------|------------|-----------|
| | | | | mineures | mejsures | | |
| 03.02.79 | 14 | 15 | 8 | 2 | 14 | 2 | 3 |
| 31.03.79 | 21 | 18 | 10 | 2 | 2 | 17 | 8 |
| 23.06.79 | 26 | 19 | 13 | 6 | 5 | 11 | 10 |
| 06.10.79 | 13 | 16 | 4 | 1 | 0 | 9 | 10 |
| 08.12.79 | 8 | 11 | 4 | 0 | 4 | 11 | 1 |
| Total 79 | 82 | 79 | 39 | 11 | 24 | 50 | 32 |
| 26.01.80 | 3 | 13 | 1 | 0 | 2 | 12 | 1 |
| 22.03.80 | 19 | 14 | 2 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| 21.06.80 | 9 | 16 | 4 | 1 | 5 | 8 | 7 |
| 25.10.80 | 19 | 11 | 1 | 5 | 7 | 10 | 7 |
| 13.12.80 | 3 | 18 | 5 | 0 | 1 | 10 | 5 |
| Total 80 | 53 | 72 | 13 | 12 | 22 | 48 | 30 |
| 31.01.81 | 7 | 16 | 4 | 1 | 5 | 7 | 6 |
| 25.04.81 | 17 | 10 | 5 | 7 | 4 | 4 | 7 |
| 20.06.81 | 5 | 13 | 4 | 2 | 1 | 10 | 1 |
| 10.10.81 | 28 | 10 | 11 | 10 | 2 | 1 | 12 |
| 05.12.81 | 13 | 10 | 6 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| Total 81 | 68 | 59 | 30 | 24 | 16 | 27 | 30 |
| 05.02.82 | 11 | 13 | 6 | 3 | 4 | 6 | 5 |
| 20.03.82 | 11 | 13 | 6 | 3 | 4 | 6 | 5 |
| 19.06.82 | 11 | 11 | 6 | 2 | 5 | 6 | 3 |
| 02.10.82 | 10 | 11 | 7 | 4 | 1 | 2 | 7 |
| 04.12.82 | 10 | 6 | 8 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| Total 82 | 53 | 54 | 33 | 15 | 15 | 21 | 23 |
| 27.01.83 | 12 | 5 | 5 | 3 | 3 | 4 | 2 |
| 19.03.83 | 3 | 5 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 28.05.83 | 9 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 08.10.83 | 21 | 2 | 12 | 1 | 2 | 0 | 8 |
| 03.12.83 | 10 | 3 | 7 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| Total 83 | 55 | 17 | 30 | 8 | 10 | 7 | 17 |
| 29.01.84 | 7 | 4 | 5 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 17.03.84 | 6 | 4 | 7 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 26.05.84 | 11 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 06.10.84 | 16 | 5 | 6 | 6 | 5 | 3 | 1 |
| 01.12.84 | 15 | 14 | 7 | 4 | 4 | 8 | 6 |
| Total 84 | 55 | 28 | 29 | 13 | 13 | 16 | 13 |
| 28.01.85 | 15 | 15 | 12 | 5 | 2 | 5 | 6 |
| 09.03.85 | 5 | 13 | 8 | 1 | 1 | 6 | 2 |
| 25.05.85 | 11 | 8 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 |
| 05.10.85 | 23 | 8 | 11 | 2 | 5 | 4 | 9 |
| 07.12.85 | 9 | 8 | 8 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| Total 85 | 63 | 52 | 46 | 10 | 16 | 18 | 25 |
| 25.01.86 | 9 | 3 | 5 | 4 | — | 1 | 2 |
| 08.03.86 | 8 | 5 | 8 | — | 1 | 1 | 3 |
| 11.05.86 | 17 | 2 | 6 | 4 | 3 | — | 6 |
| 04.10.86 | 11 | 3 | 3 | 3 | 5 | 1 | 2 |
| 13.12.86 | 11 | 8 | 5 | 4 | 2 | 6 | 2 |
| Total 86 | 56 | 21 | 27 | 15 | 11 | 9 | 15 |

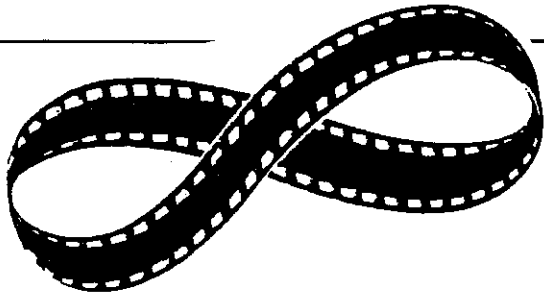
ANNEXE 3

LISTE DES RUBRIQUES ET DES RESPONSABLES

| | |
|---|----------------|
| Editorial | |
| Vie de l'Association | |
| Tribune libre | |
| Journées Nationales | |
| Relations avec les autres associations | |
| | R. AMALBERTI |
| Mathématiques | D. LEHMANN |
| Didactique | H. BAREIL |
| Problèmes | D. ROUX |
| Jeux | F. MINOT |
| Matériaux | A. BADRIKIAN |
| Informatique audiovisuel | M. LEENHARDT |
| Pluridisciplinarité | A.M. PAJUS |
| Vie de la classe. Dans nos classes | C. MORIN |
| Examens et Concours | D. LAZET |
| Formation des Maîtres | D. REISZ |
| Math à l'étranger. Vie des établissements | |
| Math et Société | D. HALGIZEAU |
| Evolution générale des Enseignements | |
| Écoles et Collèges | H. BAREIL |
| Lycées et Lycées Profes | C. ZEHREN |
| Post Baccalauréat | A.M. PAJUS |
| Gourrier des lecteurs | |
| Informations sur le bulletin | P.L. HENNEQUIN |
| Pages vertes et Publicités | F. MAGNA |

Nombre d'auteurs ayant participé au bulletin :

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 |
| 73 | 71 | 82 | 66 | 54 | 81 | 74 | 49 |



FILMS COURTS DE MATHÉMATIQUES

Équipe Maths - CNDP

Brefs, mais denses, ces films sont des «vidéoclips» utilisables par le professeur dans sa classe. Le but est d'ouvrir le store mathématique sur le monde réel et réciproquement.

Une utilisation possible : projeter un film entièrement, demander aux élèves ce qu'ils ont vu, puis reprendre le film séquence par séquence, en l'intégrant au cours : faire varier les paramètres, imaginer d'autres illustrations, s'aider éventuellement de la craie, du crayon, du rétro-projecteur, ...

Analyse - Lycée

CE N'EST QU'UN DÉBUT (6 min 52 s)
Film sur les suites, utilisables dès la 2^{de}.
Auteurs : J-P. Rastoul, A. Demonget, C. Pelé. Réalisateur : M. Baulez.

LES SUITES CONTINUENT (7 min 10 s)
Deuxième film sur les suites : nombreuses représentations graphiques.
Convergence. Divergence. Paradoxe d'Achille et de la Tortue.
Auteurs : J-P. Rastoul, A. Demonget, C. Pelé
Réalisateur : M. Baulez.

LE VOYAGEUR ET L'INFINI (7 min 5 s)
Une approche des différents infinis. Utilisable dès la 2^{de} et dans les sections non scientifiques de 1^{ère} et terminale.
Auteurs : A. Meyer, C. Pelé, A. Demonget.
Réalisateur : M. Baulez.

π , DU PAPIRUS A L'ORDINATEUR (5 min)
La longue marche de π à travers les âges.
Auteurs : A. Meyer, C. Pelé, A. Demonget.
Réalisateur : M. Baulez.

APPROXIMATION DE LA FONCTION SINUS PAR DES FONCTIONS POLYNOMES (4 min 8 s)
Auteurs : J-C. Oriol, J. Martine
Réalisateur : D. Libaud

| | |
|------------------------|---|
| Une cassette 30 min | Analyse VHS : 002 X 1730 300 F U. Matic : 002 Y 1730 450 F |
|------------------------|---|

Chiffres, statistiques, presse-lycée

CHIFFRES A LA UNE (16 min)
D'un côté, un monde foisonnant : la presse écrite, avec ses contraintes de fabrication,

de vente, ses équipes de rédacteurs, de publicitaires, ses concepteurs de la mise en page ; et aussi, bien sûr, sa population de lecteurs, dont chaque journal tente, épisodiquement, de dessiner un profil.
De l'autre, un secteur de mathématiques aux utilisations nombreuses et à l'essor récent : les statistiques.
Auteur : M. Chouchan.
Réalisateur : M. Baulez.

| | |
|------------------------|---|
| Une cassette 16 min | Chiffres à la une VHS : 002 A 6740 240 F U. Matic : 002 B 6740 370 F |
|------------------------|---|

Géométrie Collège

- Effet-miroir I et II (3 min 55 s + 3 min 58 s)
 - A propos de translations et de rotations (4 min 50 s)
 - D'un point à la ligne (4 min 50 s)
 - Impressions diverses (4 min 34 s)
 - Si Thalès m'était projeté I et II (4 min 34 s + 5 min)
- Auteurs : J-P. Bénédicti, D. Boisnard, J. Delerue, J. Delporte, R. Gras, S. Psaume.
Réalisateur : M. Baulez

| | |
|--------------|--|
| Une cassette | Transformations géométriques VHS : 002 S 1664 300 F U. Matic : 002 T 1664 450 F |
|--------------|--|

- Solides et surfaces (5 min)
 - Cônes et cylindres (4 min 34 s)
 - Prismes et pyramides (4 min 35 s)
- Auteurs : J. Delerue, A. Demonget, C. Pelé, C. Pérol. Réalisateur : M. Baulez.

| | |
|--------------|---|
| Une cassette | Géométrie dans l'espace VHS : 002 S 1588 240 F U. Matic : 002 T 1588 370 F |
|--------------|---|

Proportionnalité - CM2, 6^{ème}, 5^{ème}

- LA RÈGLE DE 3 AURA-T-ELLE LIEU ?
 - DES PROPORTIONS PARTICULIÈRES : LES POURCENTAGES
- Des situations de proportionnalité (attention : humour noir), leurs exploitations mathématiques.
Auteurs : Bolon, Demonget, Pelé, Crépin.

| | |
|------------------------|--|
| Une cassette 12 min | Proportionnalité VHS : 002 X 6738 240 F U. Matic : 002 Y 6738 370 F |
|------------------------|--|

En préparation, une cassette contenant deux films de trigonométrie : le train sifflera π fois. Tangentise.

Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1988

Avec réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom ou établissement _____
Adresse complète _____
Code postal et ville _____

Pour les 4 numéros de :
1983 1987
1984 1988
1985 1989
1986 1990

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre

payé par chèque

désire facture

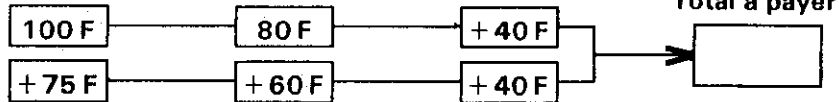
nouvel abonné

Tarif normal et établissement

Membre Apmep

Supplément tarif avion

Pour un an
Par année supplémentaire



Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 88 -

REDUCTIONS 10% pour les abonnés au Plot
10% pour plus de 500 F d'achat

Nom : _____

Adresse : _____

| Prix unitaire - | | Matériel (Nombre) | Dossier (Nombre) | Coût Total |
|-----------------|--|----------------------|--|------------|
| 40F | Polyèdres n° 1 - Dossier technique | | | |
| 40F | Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique* | | | |
| 40F | Aléatoire (PLOT 37) | | | |
| 40F | Papiers accrochés | | | |
| 40F | Pliages et mathématiques | | | |
| 40F | Pavages et symétries | | | |
| 80F | Dossier "Spécial π " (300 p. Adcs) | | | |
| 20F | Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers) | n° 1 | n° 2 | |
| 40F | | n° 3 | n° 4 | |
| 50F | Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique | | | |
| 10F | Affiches pour la classe : «Horizons Mathématiques» | | <input type="checkbox"/> | |
| | 60 x 40 cm «Polyèdres dans l'espace» «l'Univers mathématique» 2 pavages hyperboliques à colorier. | | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | |
| 40F | Pochettes pour rétroprojecteur - n°s 1 à 14 | n°s (4 et 5) : 40 F | | |
| 80F | Pochettes de diapositives - n°s 2 à 6 (n° 1 : 100F) | n° | | |
| | Frais d'envoi forfaitaire : | | | 15 F |
| | | sous-total | | |
| | - 10% pour les abonnés au PLOT | | | |
| | - 10% pour plus de 500 F d'achat | | | |
| | | TOTAL à Payer | | |

* Plot n° 39 ou Géométrie dédéeiste (Rouen)

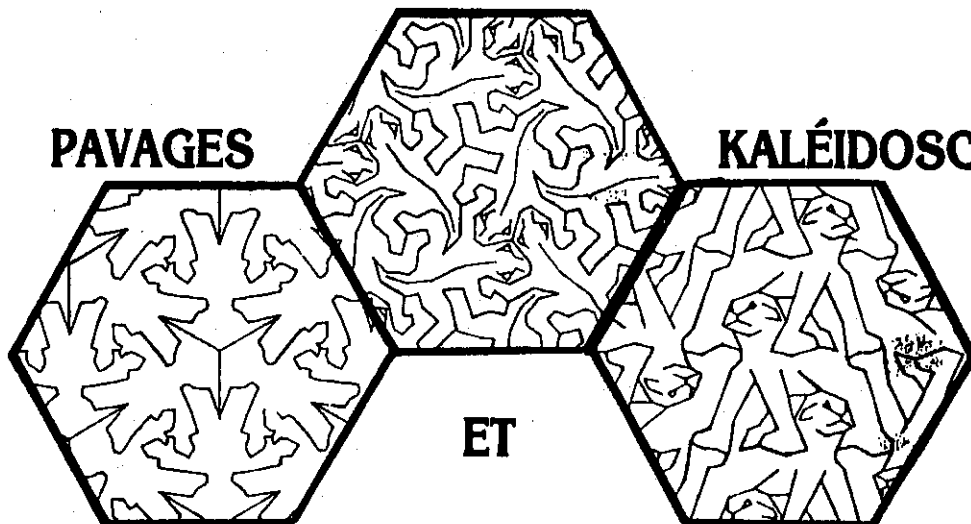
Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

NOUVEAUTÉ

PAVAGES

KALÉIDOSCOPIES

**PLOT
MATÉRIEL
1988
100 pages**



ET

SYMÉTRIES

COLORIAGES