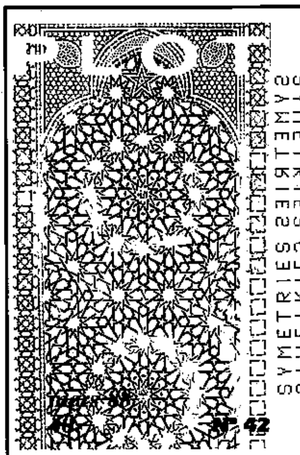


Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Michel Clinard, Jacqueline Collet,
Roger Crépin, Luce Dossat,
René Gauthier, Georges le Nezet,
Ginette Mison, Serge Parpay,
Raymond Torrent.

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Éditeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest, Caen et Clermont-Ferrand
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du
Centre National des Lettres

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

Le premier numéro de l'année porte sur le thème «Symétrie» en chantier depuis deux ans.
En supplément, il est accompagné :
— d'un dossier pour la classe : **«Pavages et kaléïdoscopes»** dont vous trouverez le sommaire page 49,
— d'une plaquette de matériels : **«Pavages et coloriages»** avec des pavages à colorier, des kaléïdoscopes ou des pièces à pavages à faire soi-même.

Pourquoi autant sur un sujet apparemment si connu ?

Essentiellement pour des raisons d'actualité :
Mathématiques à venir, thème du colloque de décembre dernier dont la presse a largement fait écho devrait être le maître mot de l'année 1988.
En effet, quels que soient les changements politiques de ce printemps, les orientations de l'éducation et de la formation semblent cette fois dans tous les esprits :
— 74 ou 80 % d'une classe d'âge au bac au lieu de 40 !
— quatre Terminales C pour une terminale D dans tous les lycées dès la rentrée prochaine, et moins de sections B, G, des sections F mieux ciblées,
— un recrutement fortement accru d'enseignants, en particulier en mathématiques, ou une autre façon d'organiser les services (!!)
— une part beaucoup plus grande donnée à la géométrie dès le collège...
Tout cela participe d'une même nécessité : accroître fortement le niveau scientifique et technique de tous, par la formation et la culture.
Le thème **symétrie,** par les développements scientifiques qu'il connait actuellement, en fait largement partie. A une condition, ne pas en rester à la perception première de la symétrie miroir mais aller au contraire à la recherche de tout ce qui est invariant par des transformations de toutes sortes.

INFO-DERNIÈRE

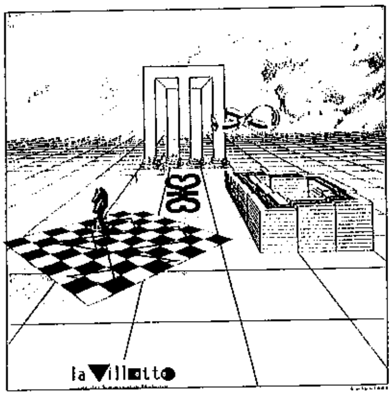
Colloque «Sciences au Moyen Age»
IREM D'ORLÉANS - 22/23 Avril 1988

LE PRIX D'ALEMBERT 1987

Décerné par la Société mathématique de France,
à l'exposition itinérante «HORIZONS MATHÉMATIQUES».

«Ce prix récompense, tous les deux ans, un livre, une émission de radio ou de télévision, un scénario de film ou tout autre réalisation, initiative ou projet, destinés à mieux faire connaître et comprendre les Mathématiques et leurs développements récents».

Ce prix, attribué cette année à l'exposition «Horizons Mathématiques», récompense tous ceux qui, depuis 1979, ont apporté leur idées, leurs moyens, lors de chacune des manifestations «Horizons Mathématiques» en France et à l'Étranger.



En 1988, l'exposition sera :
- à Bordeaux en février, mars,
- à Bastia et Ajaccio en avril, mai
- à Clermont-Ferrand en juin,

et dans toute la région Centre (où elle est née) à la rentrée prochaine.
Elle continue à itinérer en Afrique
- de l'Ouest (Sénégal, Mali...)
- sous l'équateur (Madagascar, Rwanda, Burundi, Réunion...)
- en Afrique du Nord où elle commencera par le Maroc en Avril,
- en Asie : Taiwan, Singapour, Vientiane, Séoul et la Chine avant d'aller en Inde,
- au Brésil, elle commence une longue itinérence avec Sao-Paulo jusqu'en Avril puis Rio de Janeiro jusqu'en juin,
- en Europe, après l'Allemagne, elle sera en Italie et en Espagne pour au moins un an à partir de septembre.

Et chaque fois, des conférences, des animations, des discussions avec le grand public sur les mathématiques et leur impact pour l'avenir de chacun.

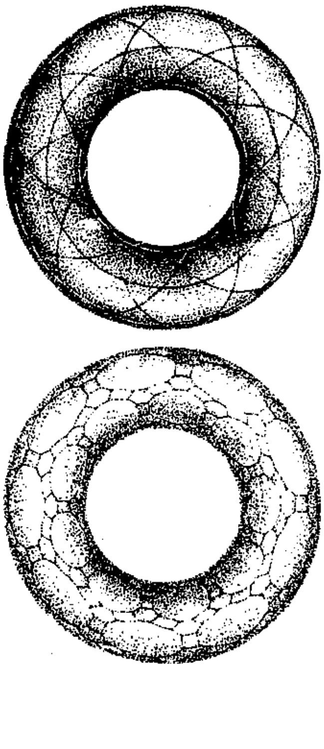
PRIX D'ALEMBERT

Ein Taschenspieler mit den Planeten. 137 x 95
Un prestidigitateur avec les planètes.

décerné par la Société Mathématique de France

SYMÉTRIES

«L'ordre ne crée pas la vie» *Saint-Exupéry*
«mais il la simplifie» *Claude Bardet.*



Harmonie, mesure des formes, dès l'origine du mot, la symétrie a partie liée avec le sens de la beauté. Elle est présente partout : dans les arts, les lois physiques, dans les objets les plus simples, dans les galaxies, dans les domaines les plus abstraits comme l'a montré Evariste Galois pour les équations algébriques ou comme le cherchent les physiciens dans les quasi cristaux ou l'antimatière.

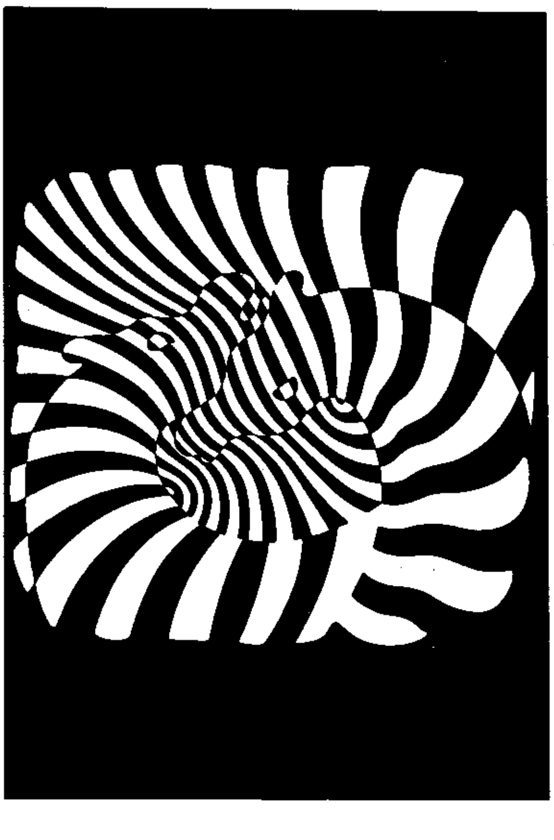
Les articles de ce numéro du PLOT traitent des différents aspects de symétries du plan, de la symétrie miroir aux pavages non périodiques rendus célèbres par la construction des quasi cristaux. Nous réservons à un autre numéro du journal les symétries d'homothétie illustrées par les courbes fractales de Mendelbrot.

Comme l'a remarquablement montré Escher, le plan euclidien, la sphère ou le plan hyperbolique, toutes les géométries sont concernées par ce sujet.

Jean Lefort nous propose en primeur un long article qui fait le tour de ce problème pour les géométries de dimension 2.

D'autres surfaces peuvent encore être étudiées, comme le montrent les figures de gauche.

«Il est dans le grand ordre
qu'il y ait un peu de désordre»
Leibniz



SYMÉTRIE D'UN ESPACE PLAN

«Un bon paveur sait paver sans erreur»

Jean LEFORT - Colmar

Il y a symétrie et symétrie

Tout le monde croit savoir ce qu'est la symétrie, mais les exemples *(fig. 1)* montrent

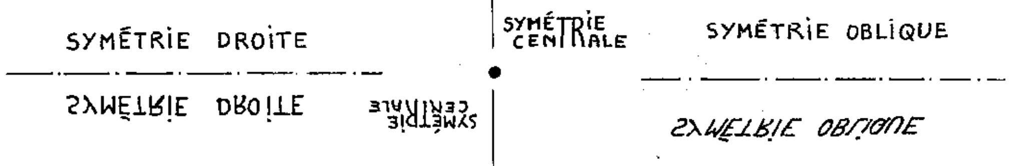
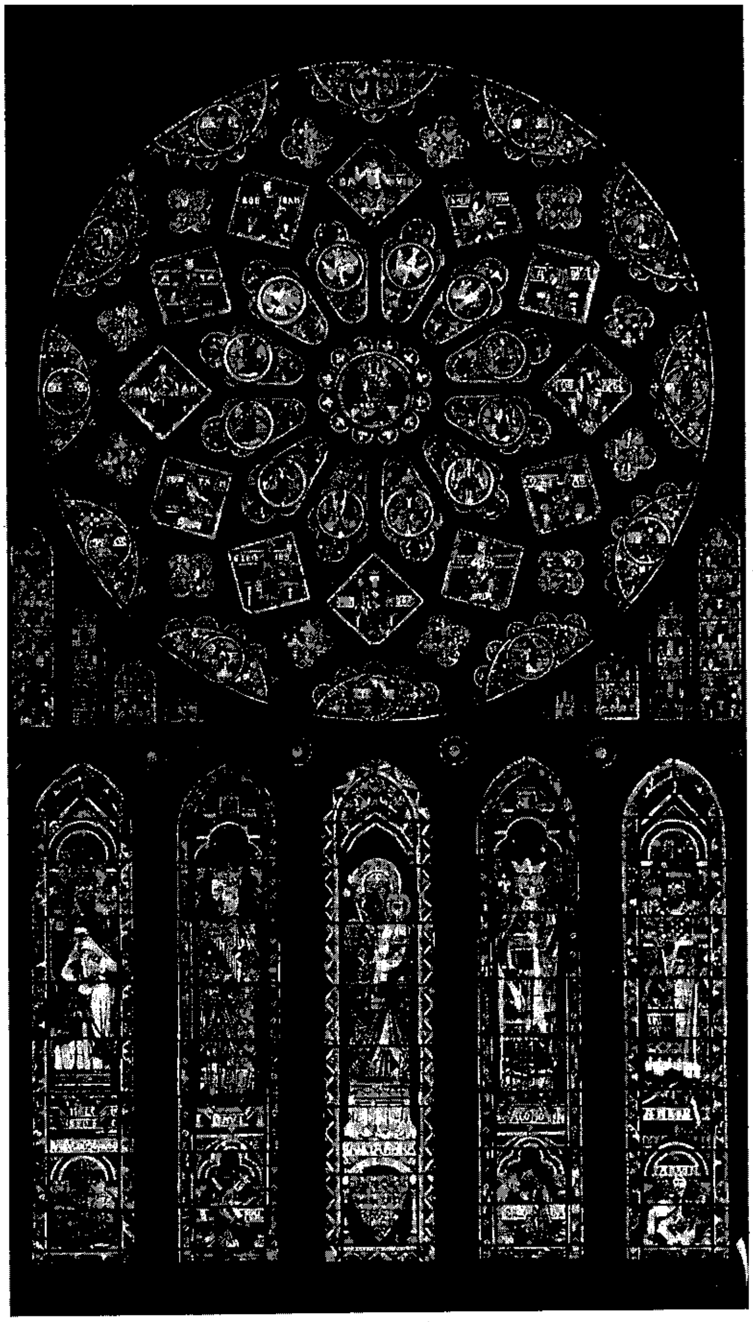


Fig. 1

déjà trois types de symétrie. Dans chacun de ces cas, si on répète deux fois la symétrie on revient au point de départ. Dans notre société habituée à la mesure, la symétrie oblique semble déformer les objets (et en un certain sens, le sens de la mesure justement, les objets sont déformés mais tout à fait reconnaissables).



Vitraux du transept nord de la cathédrale de Chartres.

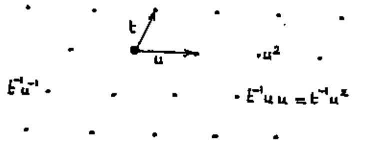


Fig. 7

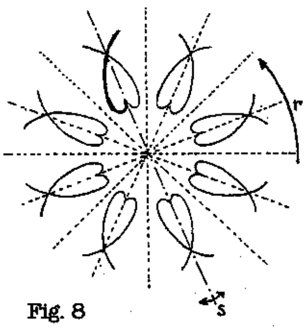


Fig. 8

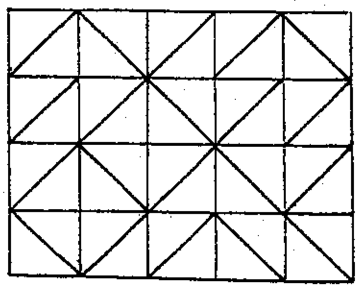


Fig. 9

Un seul type de pavé :
un triangle rectangle isocèle.

Dans les deux autres exemples de symétrie, la forme reste la même et l'image est retournée, mais pas de la même façon dans chaque cas. Dans la symétrie droite, pour retrouver le texte dans le sens habituel, il faut lire la feuille en regardant à partir du verso par transparence (et la tête en bas !) ou bien avec un miroir. Dans la symétrie centrale il suffit de faire faire un demi-tour au journal, sans avoir à tourner la page.
La symétrie droite est l'analogue, dans le plan de la feuille, du miroir. L'image miroir d'un objet est retournée par rapport à cet objet. On parlera donc aussi bien de symétrie droite que de symétrie miroir.
La symétrie centrale, nous l'avons vu, correspond à un demi-tour. Et si nous avions fait un quart de tour ou un septième de tour... Eh bien nous aurions eu une «symétrie d'ordre 4» ou «une symétrie d'ordre 7»... ce qui implique que la symétrie centrale est une symétrie d'ordre 2.

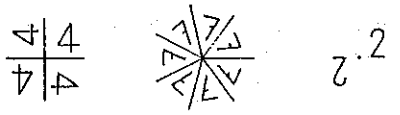


Fig. 2

Toutes ces nouvelles «symétries» ne sont rien d'autres que des rotations de $2\pi/4$ radians (ou $360/4 = 90°$), de $2\pi/7$ rd (ou $360/7 \simeq 51°,42...$) et d'une façon générale de $2\pi/n$ rd où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Reconnaissons qu'au vu de figures comme celles de la fig. 3, on affirme, sans réflexion, qu'elles

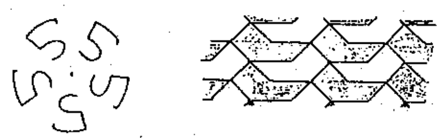
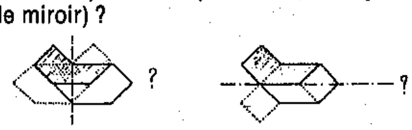


Fig. 3

sont «symétriques». Nous venons de voir ce qu'il faut penser du premier dessin. Quant au deuxième, on voit là aussi apparaître une répétition, mais d'une autre nature. Il y a des translations d'une même figure : celle-ci

ou celle là :

Ces deux figures de bases paraissent se déduire l'une de l'autre par une symétrie droite (ou symétrie miroir). Mais où placer l'axe de symétrie (ou le miroir) ?



verticalement ? non — horizontalement ? non

Fig. 4

En réalité il s'agit d'une nouvelle race de symétrie : la symétrie glissée.

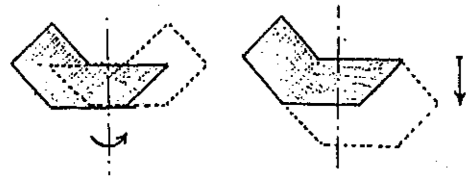


Fig. 5

Premier temps : une symétrie droite.
Deuxième temps : une translation (glissement) parallèle à l'axe de la symétrie.

Notions de groupe de transformation.

Déjà bien généralisée au paragraphe précédent, la notion de symétrie se retrouve de façon encore plus large dans l'étude des groupes de transformation. Considérons un ensemble de transformations géométriques, par exemple des translations et des symétries centrales. On peut appliquer successivement l'une ou l'autre de ces transformations à une même figure et voir ce qu'elle devient au bout du compte

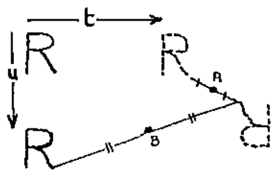


Fig. 6

Exemples :
On considère les translations t et u et les symétries centrales a et b par rapport à A et B. Si on effectue t puis a puis b, on obtient le même résultat que si l'on effectuait directement u ; on note u = t.a.b et on dit qu'on a composé t, a et b pour obtenir u.
On dit qu'un ensemble (T) de transformations géométriques forme un groupe, si les conditions suivantes sont réalisées :
1. Le composé de deux transformations de l'ensemble (T) est une transformation de l'ensemble (T).
2. A toute transformation α de l'ensemble (T) on peut associer une transformation α' également dans (T) telle que si on applique α puis α' à une figure on revient à la figure initiale (α' est l'inverse de α).
Exemples :
- Si α est une symétrie centrale alors $\alpha' = \alpha$ car en appliquant deux fois une symétrie centrale on revient au point de départ.
- Si α est la translation de 5 cm vers la gauche, α' est alors la translation de 5 cm vers la droite.

Voici quelques exemples de groupes de transformation :
- Ensemble de toutes les translations.
- Ensemble de toutes les translations de direction donnée.
- Ensemble de toutes les rotations autour d'un point.
- Ensemble de toutes les rotations et translations.

Il existe un moyen simple de fabriquer un groupe de transformation. On se donne un petit nombre de transformations et on les applique (à l'endroit et à l'envers, directement et inversement) autant de fois que l'on veut.

Exemples :

1. On se donne deux translations t et u. On obtient l'ensemble des translations engendrées par deux d'entre-elles. Les images successives d'un point forment un réseau régulier recouvrant tout le plan *(fig. 7 - fig. 8)*.

2. On se donne une rotation r de centre O et d'angle $2\pi/8$. On se donne une symétrie droite s d'axe passant par O. Le groupe de transformations engendré par r et s contient huit rotations (d'angle $\pm 2\pi/8$, $\pm 4\pi/8$, $\pm 6\pi/8$, π et O) et huit symétries régulièrement réparties autour de O. L'image d'une figure conduit à une rosace.

Notions de pavage.

Les fabricants de pavés autoblocants rivalisent d'idées dans la forme des pavés. Mais le principe est toujours le même : il faut pouvoir recouvrir le sol sans laisser de vide entre les pavés et sans avoir besoin d'en casser. Il faut aussi que l'ouvrier chargé de l'opération puisse utiliser une méthode simple pour placer les pavés les uns à côté des autres (choix du pavé → s'il en a de plusieurs formes ou couleurs différentes ; choix de l'orientation du pavé).

La plupart du temps on s'intéresse à un pavage du plan, dont, évidemment, on ne dessine qu'une partie, mais on peut aussi s'intéresser au pavage d'une région plus petite (bande, disque...) ou d'une surface courbe (sphère, cylindre...). Dans tous les cas les pavés doivent être assemblés de façon jointive.

Deux définitions sont importantes pour mieux comprendre ce qui se passe dans les différents cas :

Pavage régulier à n éléments : chaque pavé est identique en forme et en dimension à l'un des n pavés de référence. On dispose donc de n types de pavés, chaque type étant en nombre aussi grand que l'on veut *(fig. 9 - fig. 10 - fig. 11)*.

Pavage périodique : Il existe un groupe de transformations tel que le pavage soit globalement invariant par toute transformation du groupe *(fig. 12 - fig. 13 - fig. 14)*.

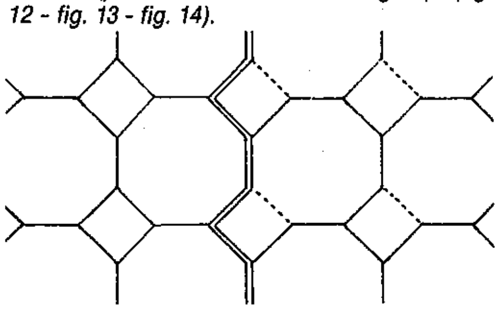


Fig. 11

Le même pavage considéré à gauche comme un pavage régulier à 2 éléments et à droite à 1 élément.

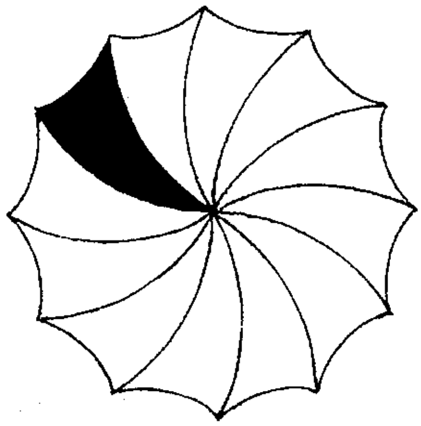


Fig. 12

Pavage périodique avec le groupe des rotations d'angle $k\pi/6$.

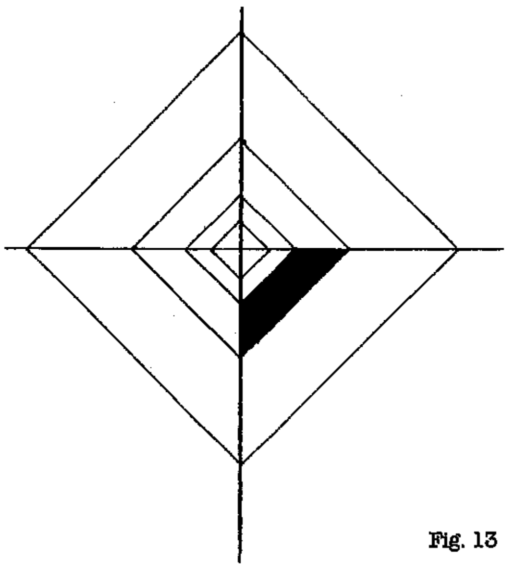
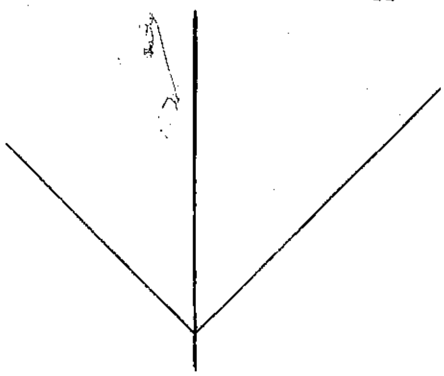


Fig. 13

Pavage périodique dont le groupe est engendré par une rotation d'angle $\pi/2$ et une homothétie de rapport 2.



Remarque : En général, dans un pavage régulier et périodique on passe d'un pavé à n'importe quel autre du même type par une des transformations du groupe. Mais ce n'est pas toujours le cas *(fig. 10 bis)*.

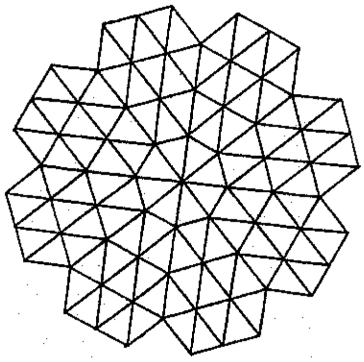


Fig. 10

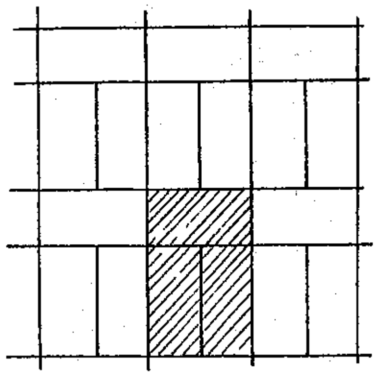


Fig. 10 bis

Le pavé réel est un rectangle.

Le pavé mathématique élémentaire est la combinaison de trois rectangles tels que ceux hachurés.

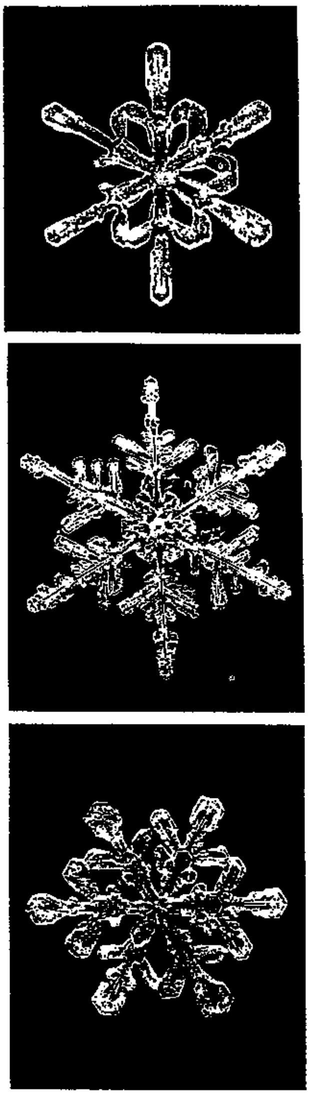


Fig. 17

Chaque flocon de neige est une approximation du cas D6.

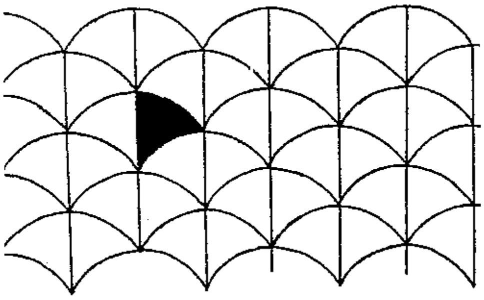


Fig. 14

Pavage périodique dont le groupe est engendré par deux translations et une symétrie miroir.

On dit alors que le pavage n'est pas isoèdre. Mathématiquement cela correspond au fait que le pavé n'est pas la classe de transitivité pour le groupe. Autrement dit le pavé mathématique élémentaire n'est pas le pavé réel.
Dans les paragraphes qui suivent nous allons voir comment combiner ces deux définitions pour aboutir à différents types de pavages tout en laissant le soin à l'artiste d'imaginer la forme du pavé élémentaire.

Quelques pavages réguliers périodiques.

Malgré l'infinité des choix possibles des pavés, il n'y a souvent qu'un nombre très limité de pavages réguliers périodiques d'un domaine, car seuls certains groupes de transformations conviennent.

LES ROSACES

Il s'agit des pavages réguliers périodiques du disque. Il y a deux grandes familles de rosaces selon que la rosace contient ou non des symétries droites *(fig. 15 -fig. 16 - fig. 17)*.
Dans le cas de la figure 15, il n'y a que des rotations dont l'angle est un multiple du huitième de tour. Le groupe de transformation est formé de huit rotations. On dit que c'est le groupe cyclique d'ordre huit : C_8. On définit de la même façon le groupe cyclique d'ordre n (avec des nièmes de tour) : C_n.

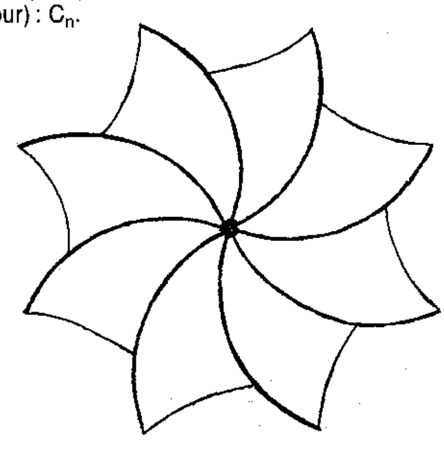


Fig. 15

Dans le cas de la figure 16, il y a des rotations dont l'angle est un multiple du neuvième de tour et des symétries droites régulièrement placées. Le groupe de transformations associé est appelé groupe dihédral d'ordre 9 : D_9. On définit de la même façon le groupe dihédral d'ordre n : D_n. Les flocons de neige sont un bel exemple du cas D_6.

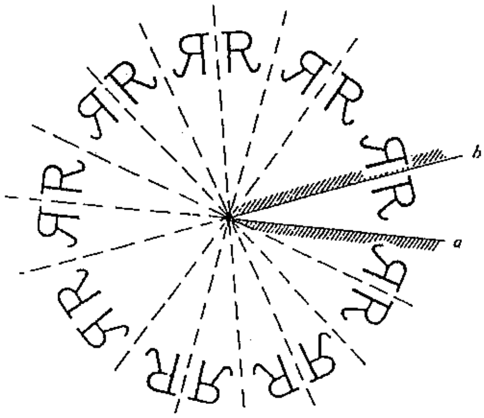


Fig. 16

Une autre façon d'engendrer la figure 16 est de dessiner la lettre «R» entre deux miroirs placer en «a» et «b» (c'est le principe du kaléidoscope).

On remarquera que l'on peut éventuellement étendre la rosace au plan entier, à condition d'utiliser un «pavé» infiniment grand. Mais pour le plan entier on peut trouver bien d'autres pavages réguliers périodiques (avec des pavés petits !) *(fig. 18)*.

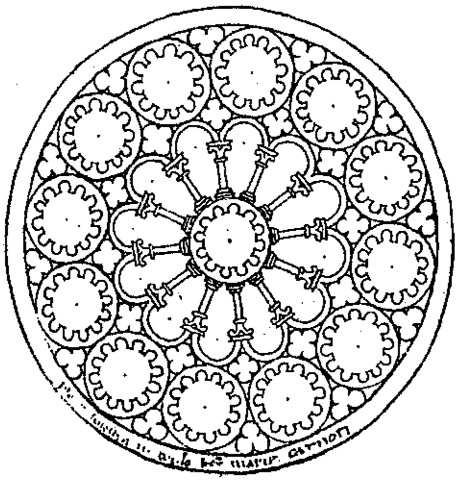


Fig. 18

Dessin de la rose de la façade ouest de la cathédrale de Chartres. (Par Villard de Honnecourt).

LES FRISES

Il s'agit des pavages réguliers périodiques d'une bande. Il en existe sept sortes selon le groupe utilisé qui dans tous les cas contient des translations le long de la bande.

L'organigramme de la figure 19 permet de classer les frises en fonctions de certaines symétries qui peuvent ou non exister. Voyons sur quelques exemples comment l'utiliser :
La sinusoïde ci-dessous : *(fig. 20)* présente des symétries centrales (points marqués ▪ 2 — pour symétrie d'ordre deux). La réponse à la première question est donc «oui». La deuxième question porte sur l'existence de symétries axiales et la réponse est également «oui» (droite en trait mixte), mais ces axes étant perpendiculaires à la direction de la sinusoïde, la réponse à la dernière question est «non». La sinusoïde est une frise de type «fm2».

La cycloïde ci-dessous : *(fig. 21)* ne présente pas de symétrie centrale, mais des symétries axiales d'axes non parallèles à la bande. Les réponses successives sont donc «non», «oui», «non», ce qui signifie que la cycloïde est une frise de type «fm1».

La représentation de chaîne ci-dessous : *(fig. 22)* présente des symétries centrales (points marqués ▪ 2), des symétries axiales dont une a son axe dans la direction de la bande. Les réponses successives étant «oui», cette chaîne est une frise de type f2m.
On trouvera ci-après au moins un exemple de chaque type de frise en précisant à chaque fois les transformations les plus remarquables qui conservent la frise.

Fig. 19

Organigramme de reconnaissance des frises.

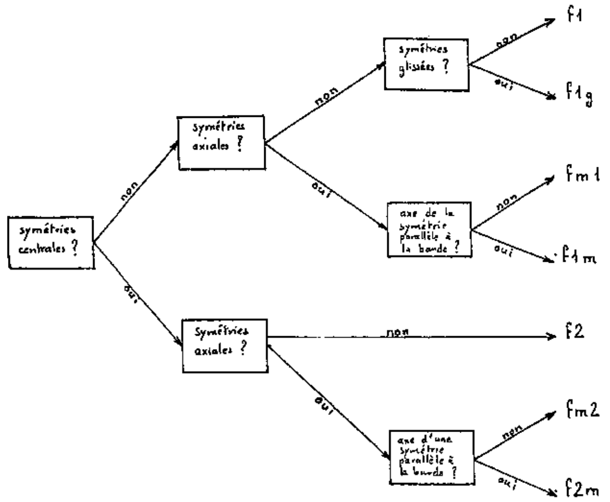


Fig. 20

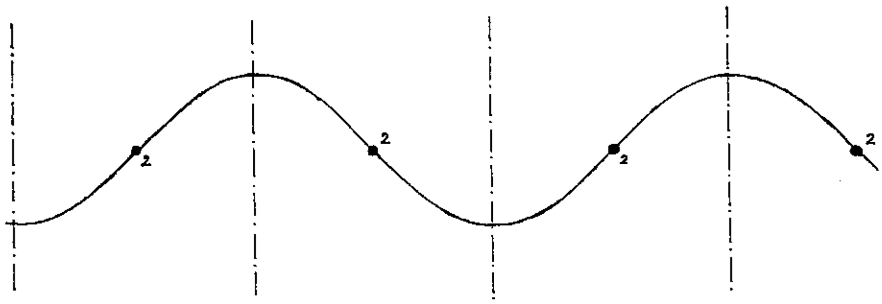


Fig. 21

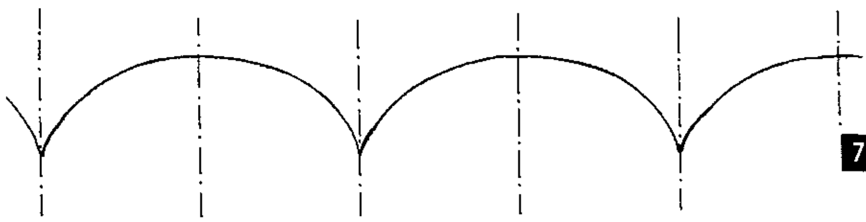


Fig. 22

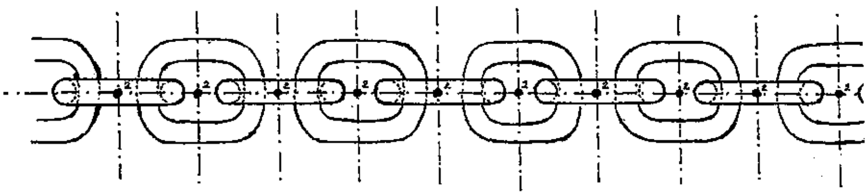
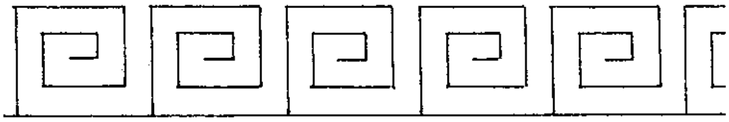


Fig. 23

(a)



(b)

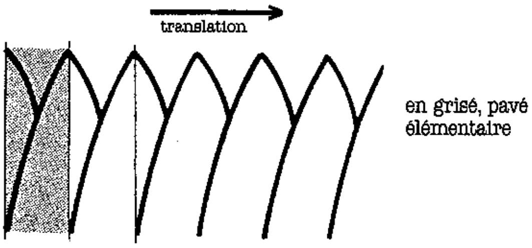


Fig. 24

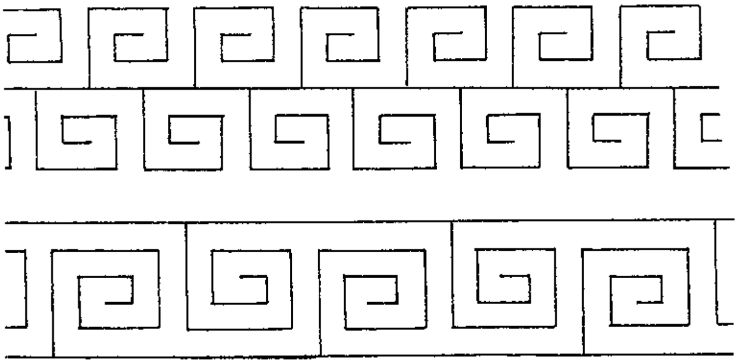


Fig. 25

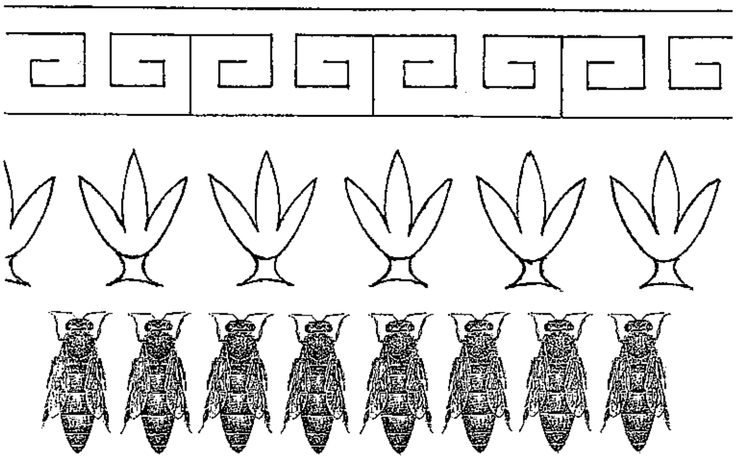


Fig. 26

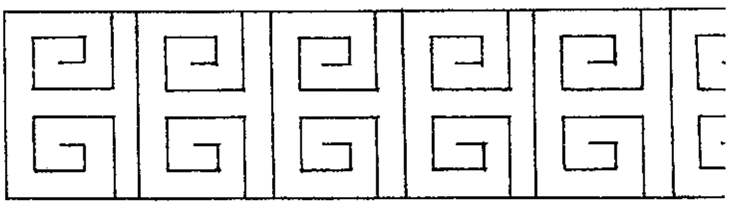
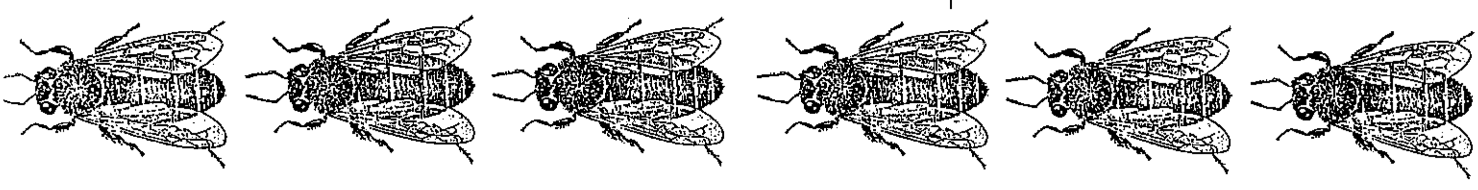


Fig. 26



• **TYPE F1** *(fig. 23).*
Il n'y a que des translations engendrées par l'une d'entre elle (indiquée sur la figure).

• **TYPE F1g** *(fig. 24).*
Il y a des translations engendrées par l'une d'entre elles (indiquée sur la figure) et des symétries glissées. Le groupe de transformation est engendré par une seule symétrie glissée dont le «glissement» est moitié de la translation. On remarque en effet que si on applique deux fois la symétrie glissée on obtient la translation élémentaire de la frise.

• **TYPE Fm1** *(fig. 25 et figure 21).*
En plus des translations engendrées par l'une d'entre elles on a des symétries dont les axes sont perpendiculaires à la direction de la frise axes dont la distance est moitié de la translation. Le groupe de transformation conservant la frise est engendré par la translation élémentaire et une symétrie (n'importe laquelle).

• **TYPE F1m** *(fig. 26).*
Comme dans toutes les frises, on retrouve les translations engendrées par l'une d'entre-elles et une symétrie d'axe parallèle à la direction des translations. Comme dans le cas précédent le motif présente une symétrie axiale.

● **TYPE F2** *(fig. 27).*
Il y a ici une série de centres de symétrie d'ordre 2 (centres de symétrie) régulièrement espacés le long d'une droite. La distance entre deux centres consécutifs est exactement la moitié de la translation élémentaire. Le groupe de transformation est engendré par deux symétries consécutives.

● **TYPE Fm2** *(fig. 28 et fig. 20).*
On retrouve ici : des translations, des symétries centrales et enfin des symétries droites d'axes perpendiculaires à la direction de la translation ; la distance entre deux centres de symétrie vaut deux fois la distance entre deux axes de symétries et est égale à la translation élémentaire.

● **TYPE F2m** *(fig. 29 et fig. 22).*
On retrouve ici des symétries centrales, des symétries droites d'axe perpendiculaire à la direction de la bande et une symétrie par rapport à l'axe de la bande et bien sûr une symétrie glissée. C'est finalement une combinaison de certains des cas précédents (f1g, f2, fm1 et f1m).
Pour conclure cet alinéa sur les frises, deux remarques s'imposent : la première c'est que, comme dans le cas de la rosace, on peut étendre la frise au plan entier à condition d'utiliser un «pavé» infiniment grand. (Le pavé a l'allure d'une bande perpendiculaire à la direction de la frise).
La deuxième c'est que certaines frises peuvent être considérées comme limite de rosaces quand le rayon de la rosace et le nombre de rotations tendent tous deux vers l'infini *(fig. 30).*

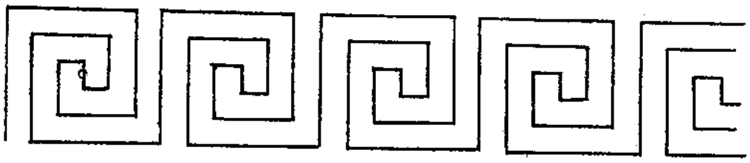


Fig. 27

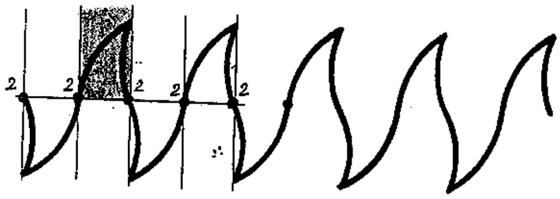


Fig. 28

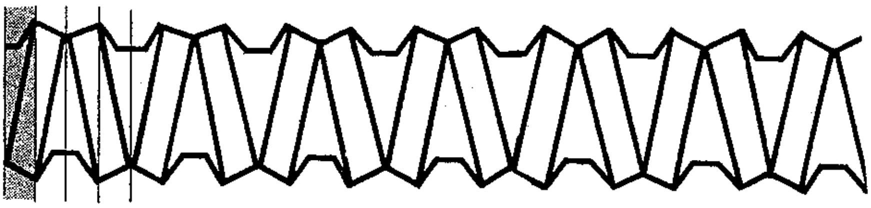


Fig. 29

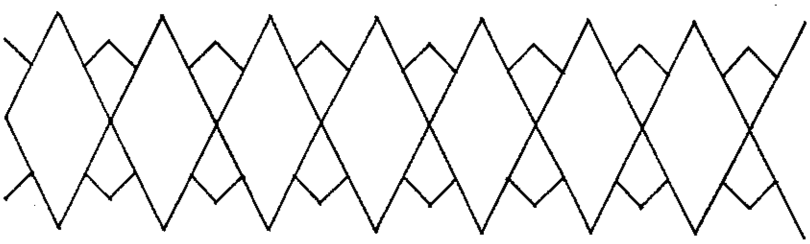
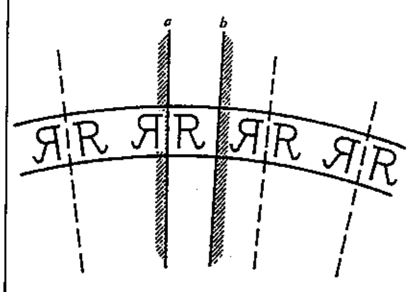
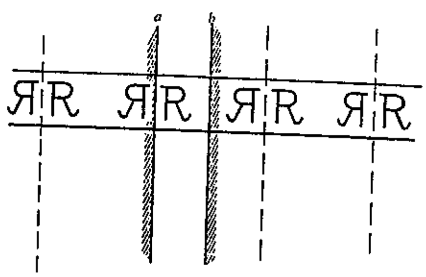


Fig. 30



Le groupe D_{180} (les droites a et b sont inclinées à 1° l'une sur l'autre).



Le groupe D_{∞} (les droites a et b sont parallèles).

Dans les deux cas, c'est la même partie de schéma qui est montrée.

LES DENTELLES DU PUY

Charles PÉROL - Chateaugay

Interlude

Une dentelle (ou un entre-deux) est une frise. L'étude de la répétition géométrique du motif relève de la géométrie affine euclidienne et de la théorie des groupes. Les dentellières du Puy le savent-elles ?

Toute dentelle est invariante par un groupe de translations.

Elle peut aussi être invariante par un groupe d'isométries plus riche comprenant :

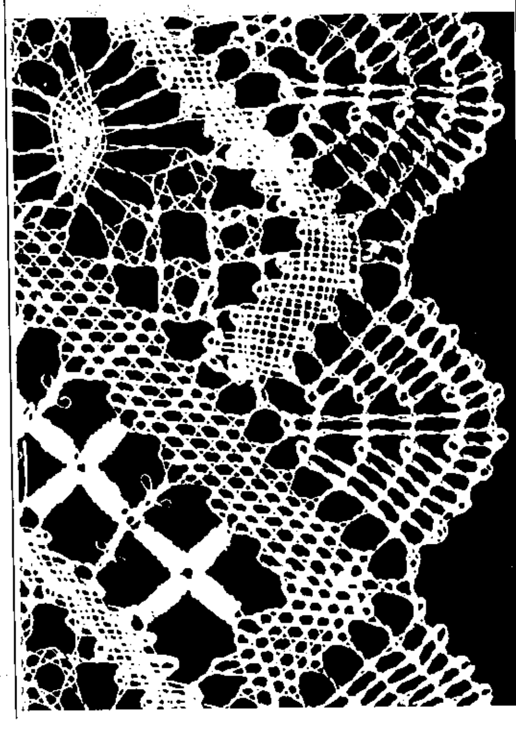
— des symétries droites (les axes sont verticaux)

— des symétries points

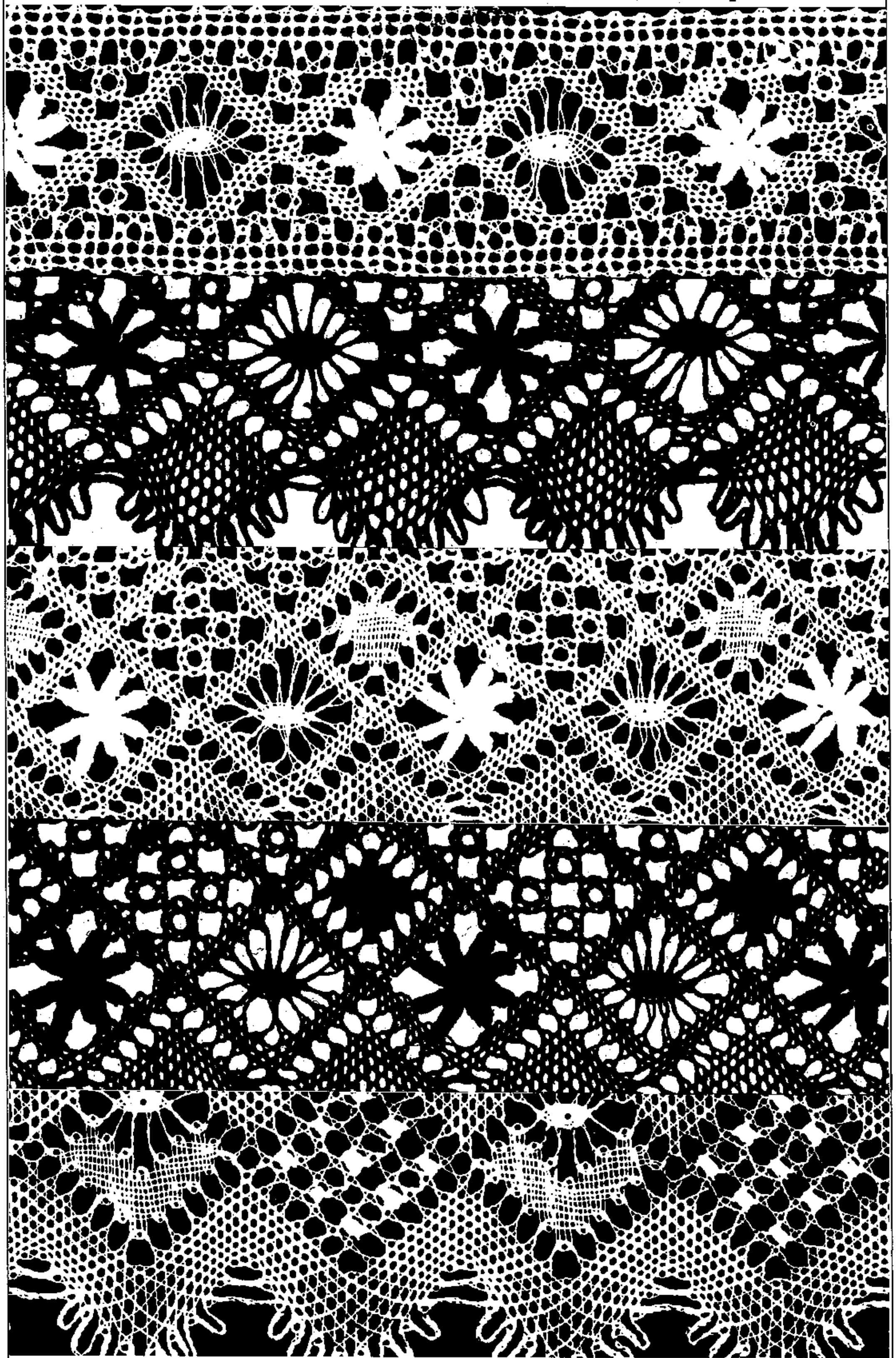
— les deux à la fois

— des symétries droites passant par les centres de symétrie (alors qu'il y a en plus une symétrie dont l'axe a la direction de la frise).

Avis de recherche :
Voici enfin une dentelle dont le groupe d'isométries est moins facile à décrire. Dans l'album qui m'a servi de base et qui contient 250 modèles, ne figurait que cette unique réalisation de ce groupe.



Pour chaque dentelle, trouvez le groupe de frises correspondant.



Petit Plot-méninges pour terminer :

Il existe un seul autre groupe d'isométries dont aucun modèle de mon album n'est une réalisation.
Essayez d'imaginer ce groupe (il est assez simple), concrétisez-le par un dessin, trouvez une dentelle (du Puy ou d'ailleurs) le représentant.
Référence : Un album ancien des productions de la maison Arsac au Puy.

LES PAVAGES RÉGULIERS PÉRIODIQUES DU PLAN

Selon le groupe utilisé, il y en a 17 sortes qui sont illustrés par de nombreux artistes. Citons en particulier les artistes musulmans (on en trouve de magnifiques exemples à l'Alhambra de Grenade) et M.C. Escher. Mais la quasi totalité des papiers peints, des tissus imprimés... utilisent des pavages réguliers périodiques du plan.

L'organigramme ci-dessous permet de classer les 17 types de pavages *(fig. 31)*. On donne à la suite un ou plusieurs exemples de chaque type. A côté de chaque exemple un diagramme fournit la liste des transformations conservant le pavage.

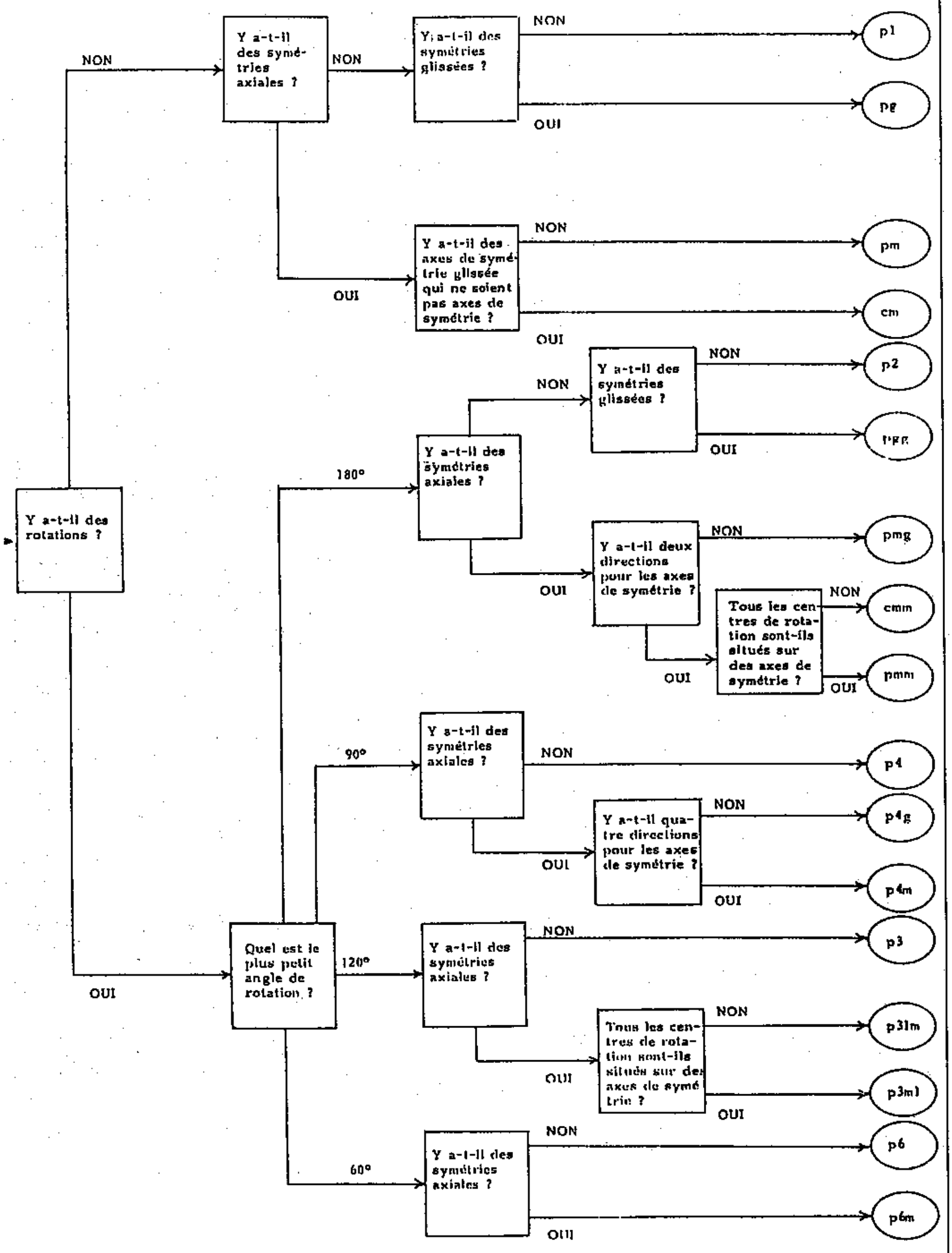
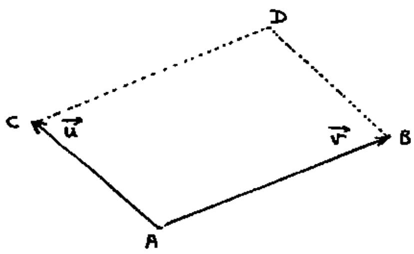


Fig. 31

ALGORITHME DE D. CROWE POUR LA DÉTERMINATION DES 17 GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES DU PLAN



Les pavages de type p1 sont engendrés à partir d'un pavé par les translations de vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ (ici le pavé le plus simple est formé d'un poisson et d'un oiseau).

TYPE P1

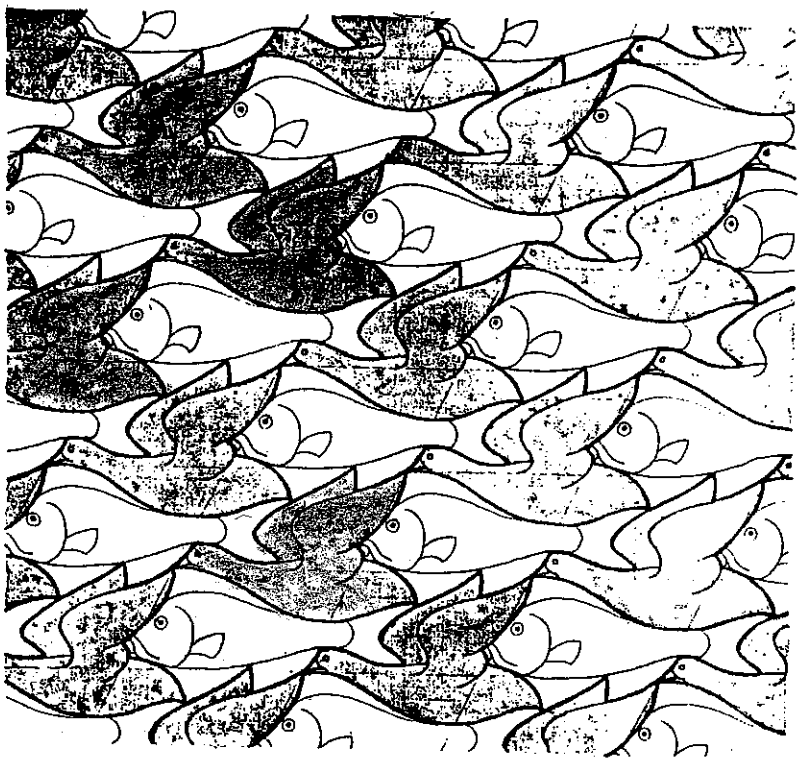
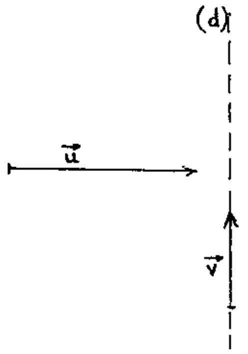


Fig. 32

ESCHER : Étude d'un remplissage périodique d'un plan avec des poissons et des oiseaux (1938).



Les pavages de type pg sont engendrés à partir d'un pavé (ici le pavé le plus simple est formé d'un oiseau) par la translation de vecteur $\vec{u}$ et la symétrie glissée d'axe (d) et de vecteur $\vec{v}$ (si on effectue deux fois la symétrie glissée on obtient la translation de vecteur $2\vec{v}$).

TYPE PG

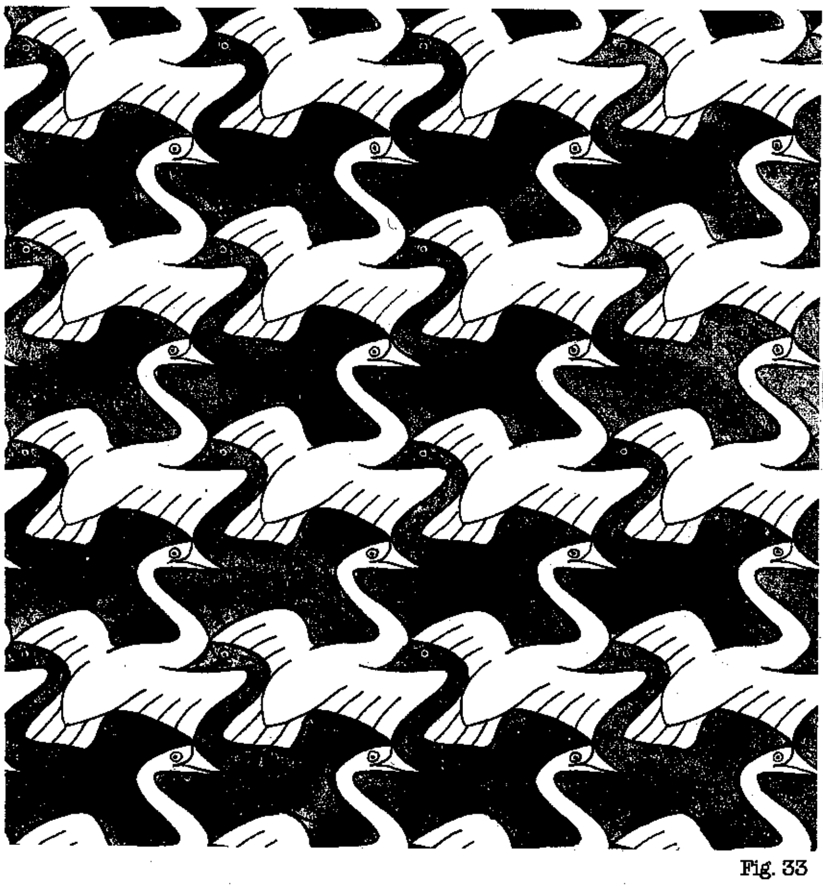
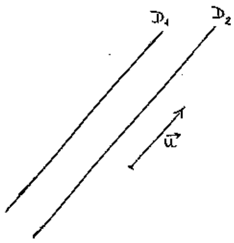
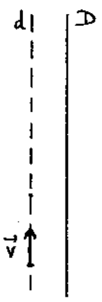


Fig. 33

ESCHER : Étude d'un remplissage périodique d'un plan avec des oiseaux (1955).





TYPE PGG

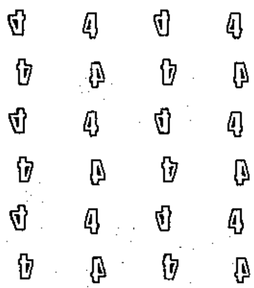


Fig. 37

(d'après le programme Alhambra cf. Plot 40)

TYPE PMG

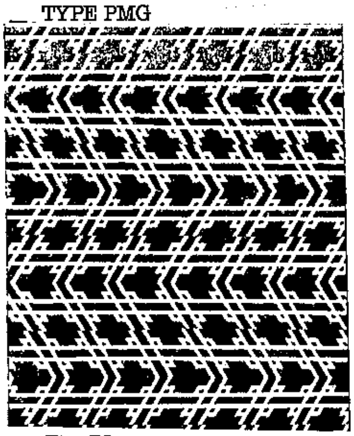
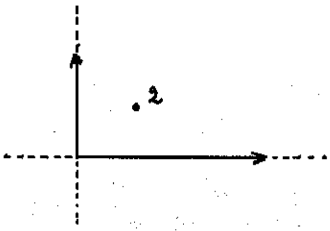


Fig. 38

Les pavages de type pm sont engendrés par deux symétries miroir d'axes parallèles D1 et D2 et une translation de vecteur $\vec{u}$ parallèle à la direction des axes de symétrie.
Si on effectue le composé des deux symétries on obtient la 2e translation du pavage.
Le pavé le plus simple est ici formé de la moitié d'un carré de chaque type.

Les pavages de type cm sont engendrés par une symétrie miroir et une symétrie glissée de vecteur $\vec{v}$, les deux axes étant parallèles (D pour la réflexion et d pour la symétrie glissée).
Le pavé élémentaire est ici un demi «soleil».
On retrouve les deux translations du pavage par une composition soit de deux fois la symétrie glissée soit de la symétrie glissée, de la réflexion, et de l'inverse de la symétrie glissée.



Les pavages de type pgg sont engendrés par deux symétries glissées d'axes perpendiculaires et dont les vecteurs sont moitié des vecteurs de translation du pavage.
Il apparaît aussi des demi-tours.
Le pavé élémentaire contient l'environnement d'un chiffre 4.

Les pavages de type pmg sont engendrés par une réflexion et deux symétries d'ordre 2 autour de deux points équidistants de l'axe de la réflexion.
Le pavé élémentaire est la moitié d'un motif en chevron.

Les pavages de type p2 sont engendrés par les demi-tours (symétries d'ordre 2) autour des trois sommets d'un triangle.
La composition de deux quelconques de ces symétries engendrent une translation.
Le pavé élémentaire est ici un écureuil.
On peut mettre en évidence un quatrième type de centre de symétrie d'ordre 2.

TYPE PM

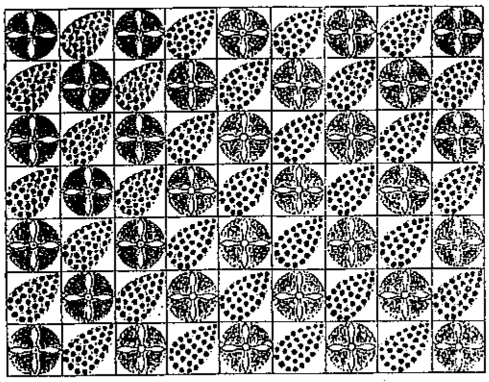


Fig. 34

Plafond du tombeau d'Amenekhat

TYPE CM

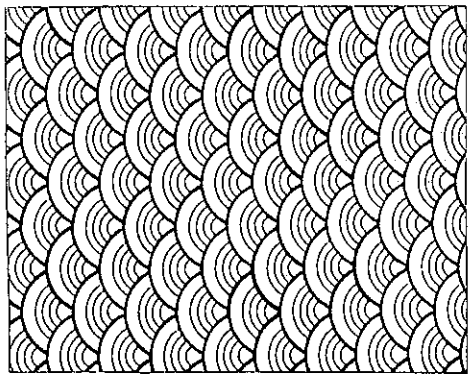
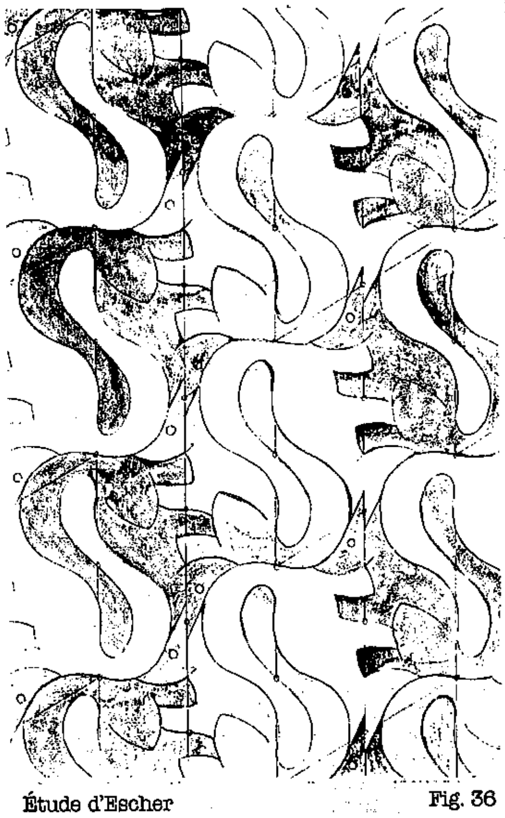


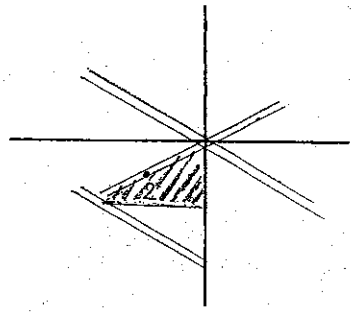
Fig. 35

Extrait de «Allover Patterns» par C.P. Hornung (Dover. N.Y. 1975)



Étude d'Escher

Fig. 36



Les pavages de type cmm sont engendrés par deux réflexions d'axes perpendiculaires (ce qui donne aussi un demi-tour centré au point de concours des axes) et une symétrie d'ordre 2 par rapport à un point qui n'est sur aucun des axes de symétrie. Le pavé élémentaire est ici le quart d'un losange.

TYPE CMM

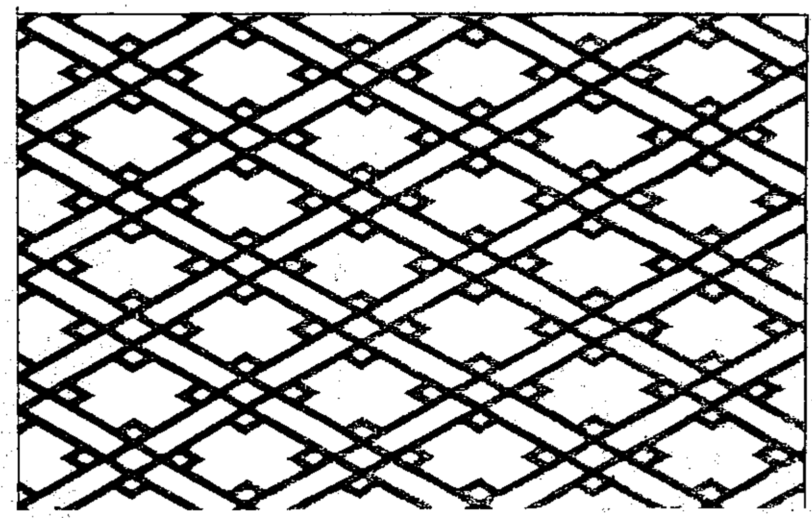
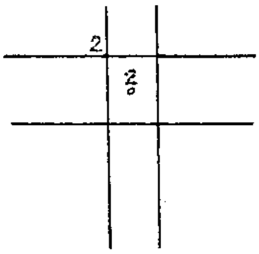


Fig. 39



Les pavages de type pmm sont engendrés par les quatre réflexions par rapport aux quatre côtés d'un rectangle.
Le pavé élémentaire est la zone intérieure au rectangle.
Il apparaît ainsi, outre les translations, toute une série de centres de symétrie d'ordre 2.

TYPE PMM

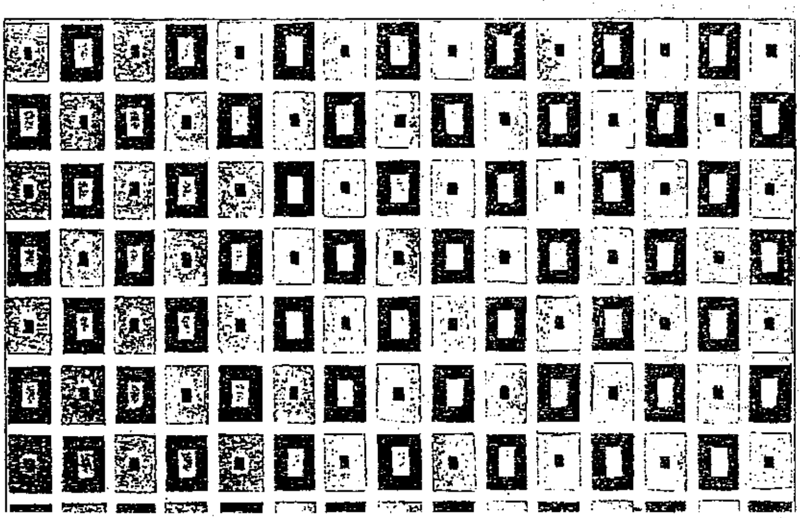
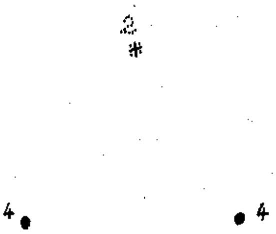


Fig. 40

Plafond du tombeau d'Ameneheb.



Les pavages de type p4 sont engendrés par deux quart-de-tour (ou symétries d'ordre 4).
Le pavé élémentaire est ici formé d'un quart de spirale et d'un quart de roue,
le centre de la spirale et le centre de la roue étant les centres de symétrie d'ordre 4.
Il apparaît également des symétries d'ordre 2.

TYPE P4

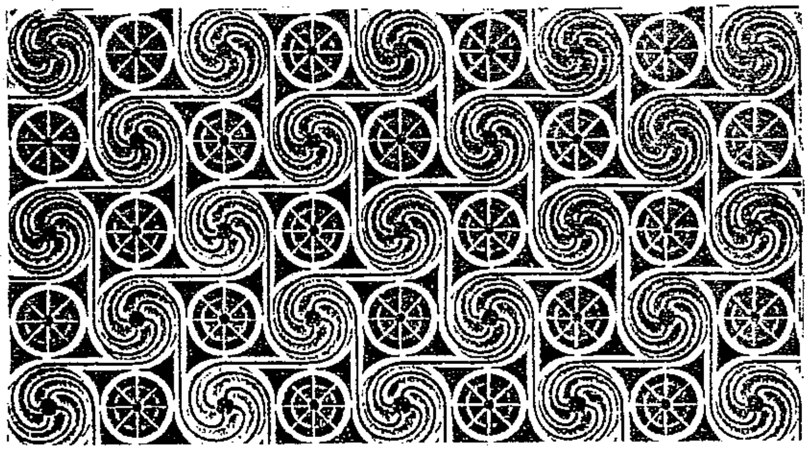
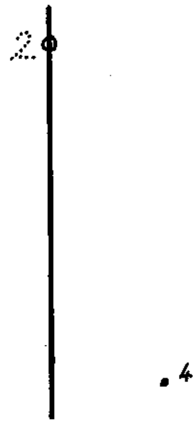


Fig. 41

Plafond du tombeau de Nekht-Min.

Les pavages de type p4g sont engendrés par une réflexion et une symétrie d'ordre 4. Il apparaît en plus, outre les translations, des symétries d'ordre 2. Le pavé élémentaire est ici formé d'un demi-ange et d'un demi-diable.



TYPE P4G

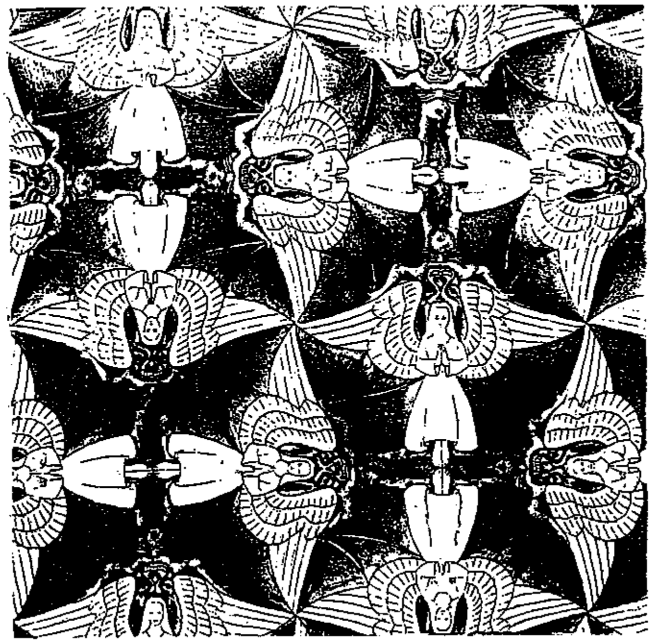


Fig. 42

ESCHER : Anges et diables.

TYPE P4M

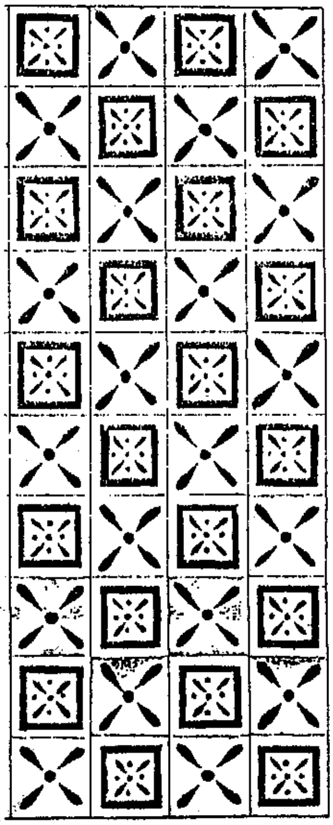
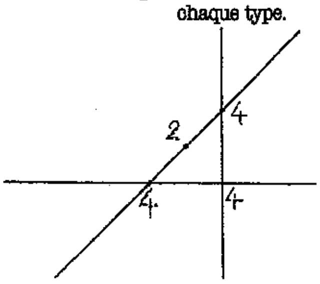


Fig. 43

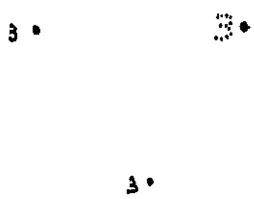
Plafond du tombeau d'Amenemant.

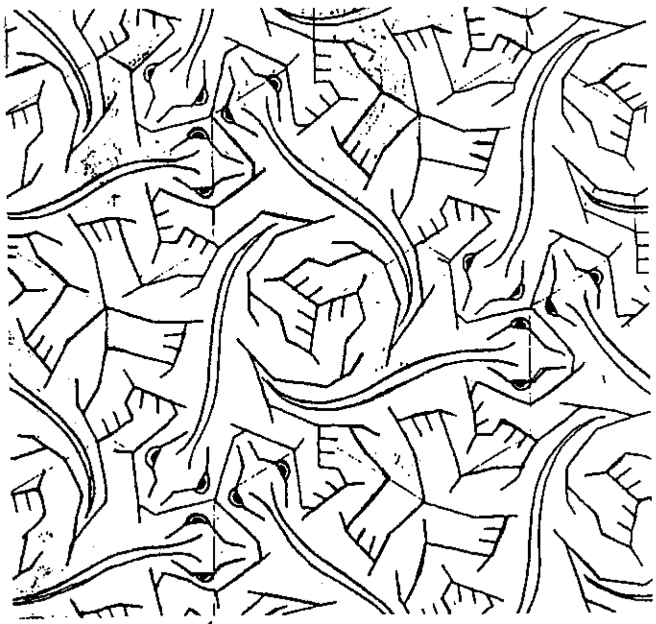
Les pavages de type p4m sont engendrés par les réflexions autour des 3 côtés d'un triangle rectangle isocèle. Il apparaît ainsi, outre les translations, des centres de symétrie d'ordre 4 et d'ordre 2. Dans le cas présent, le pavé élémentaire est la réunion d'un quart de carré de chaque type.



TYPE P3

Les pavages de type p3 sont engendrés par deux symétries d'ordre 3, par exemple ici où le pavé élémentaire est un reptile, on peut prendre comme centres des symétries d'ordre 3 les points de rencontre de 3 têtes et celui de 3 pattes arrière gauche. Il y a un troisième type de symétrie d'ordre 3 centré au point de rencontre de 3 genoux arrières droits.

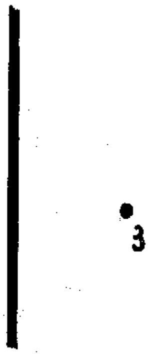


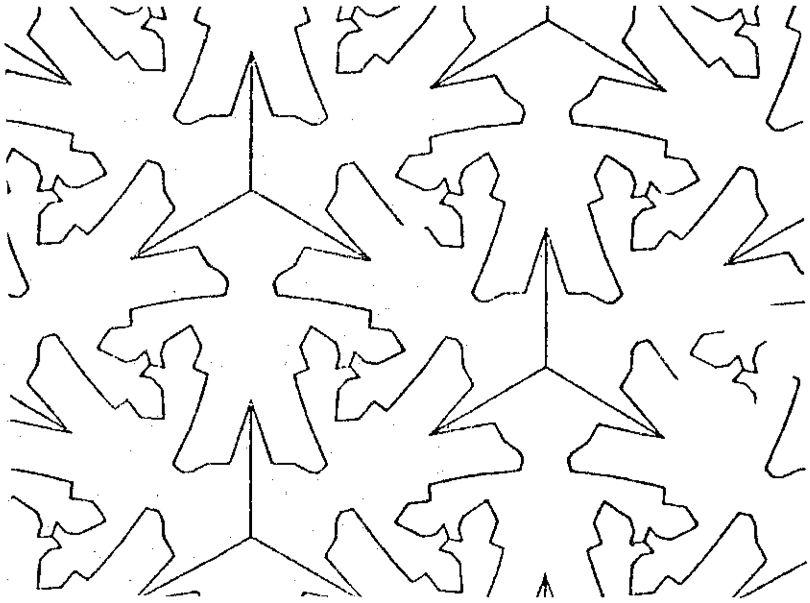


ESCHER : Étude du remplissage périodique d'un plan par des reptiles.

TYPE P3-1M - Fig. 45

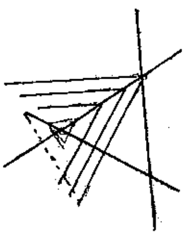
Les pavages de type p3-1-m sont
engendrés par une symétrie miroir
et une symétrie d'ordre 3
dont le centre n'est pas
sur l'axe de la précédente.
Le pavé est ici un demi-bonhomme.



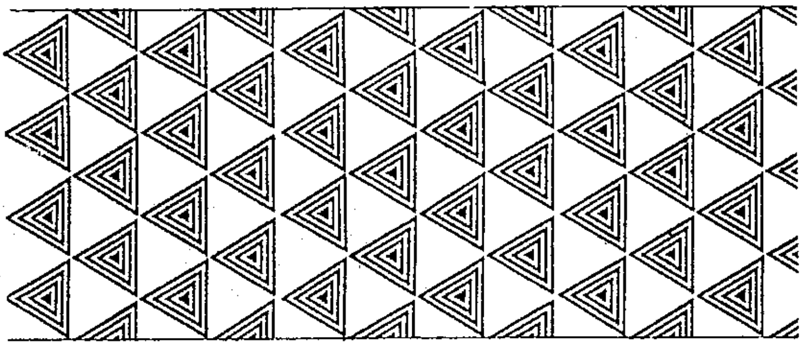


Les fameux chinois d'ESCHER.

TYPE P 3M1 - Fig. 46

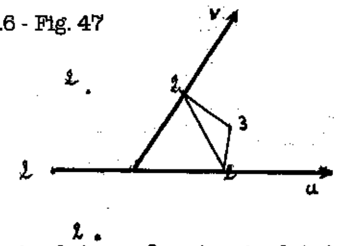


Les pavages de type p3m1 sont engendrés à partir d'un pavé élémentaire (ici un sixième de triangle blanc et un sixième de triangle cerné) par des symétries miroirs par rapport aux trois côtés d'un triangle équilatéral (qui peut être un pavé).

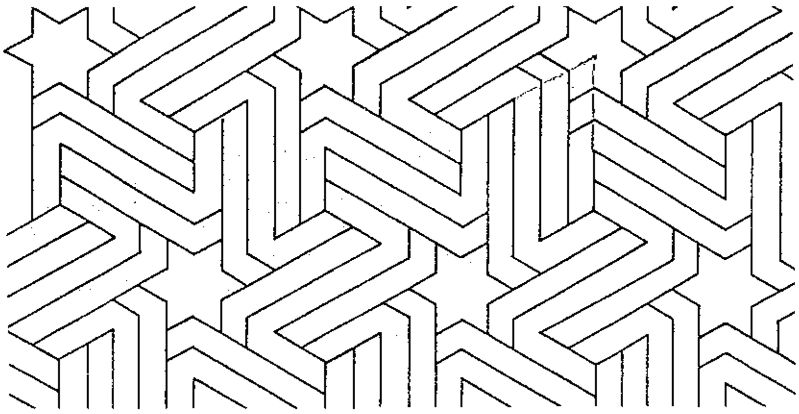


Extrait de «Allover Patterns»

TYPE P.6 - Fig. 47

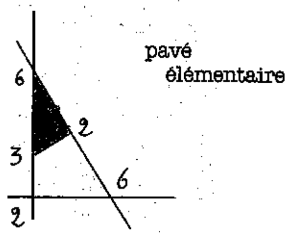


Les pavages de type p6 sont engendrés à partir d'un pavé (tel que ABC) par les rotations de centre A et d'angle $\pi/3 = 2\pi/6$ (A est centre de symétrie d'ordre 6) et par les rotations de centre B et d'angle $2\pi/3$
(B est centre de symétrie d'ordre 3).
Il apparaît en plus des centres de symétrie centrale ou d'ordre 2 (points marqués 2) et bien sûr des translations de vecteur u et v.

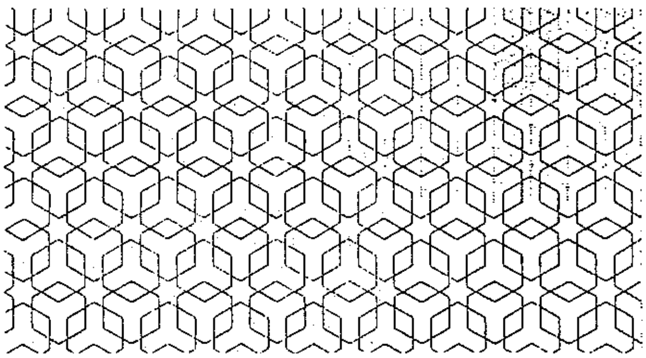


Motif arabe

TYPE P6M - Fig. 48



Les pavages de type p6m sont engendrés par les symétries miroir par rapport aux trois côtés d'un demi triangle équilatéral.
Le pavé élémentaire est le sixième de ce triangle équilatéral.
Il apparaît en plus des symétries d'ordre 2, 3 et 6.



Motif islamique.

LES PAVAGES RÉGULIERS PÉRIODIQUES DE LA SPHÈRE

On démontre que sur la sphère les pavages réguliers périodiques ne font intervenir que deux types de transformations : les symétries miroirs (par rapport à un plan diamétral) et les rotations (par rapport à un diamètre).
Les groupes de transformation que l'on peut utiliser à la surface d'une sphère sont en nombre limité et sont intimement liés à l'étude des polyèdres réguliers et des bipyramides (solides obtenus en collant deux pyramides identiques par la base). On trouve ainsi cinq cas possibles bien évidemment subdivisables en sous-cas si l'on fait intervenir un motif.

Figure 49 :
Tous les pavés sont engendrés à partir de l'un deux par des rotations d'angle $2k\pi/n$ autour d'un diamètre fixe. Le groupe générateur du pavage n'est autre que le groupe cyclique d'ordre n.

Figure 50 :
Aux rotations d'angle $2k\pi/n$ autour d'un diamètre fixe, il faut adjoindre la symétrie par rapport au plan diamétral perpendiculaire. Le groupe générateur du passage s'appelle le groupe dihédral d'ordre 2n. On remarque que les sommets des pavés sont situés sur une bi-pyramide.

Figure 51 :
Considérons maintenant l'un des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre). Leurs sommets sont situés sur une sphère. Si au lieu de les joindre par un segment, on les joint par un axe de grand cercle (comme si on avait gonflé le polyèdre pour qu'il colle à la sphère), on obtient un pavage de la sphère. Ce pavage possède d'autres symétries que l'on peut mettre en évidence en traçant à partir du centre de chaque pavé les arcs qui le joignent aux sommets ou aux milieux des côtés. On met aussi en évidence trois nouveaux groupes de transformation correspondant respectivement : au tétraèdre ; au cube ou à l'octaèdre ; à l'icosaèdre ou au dodécaèdre.

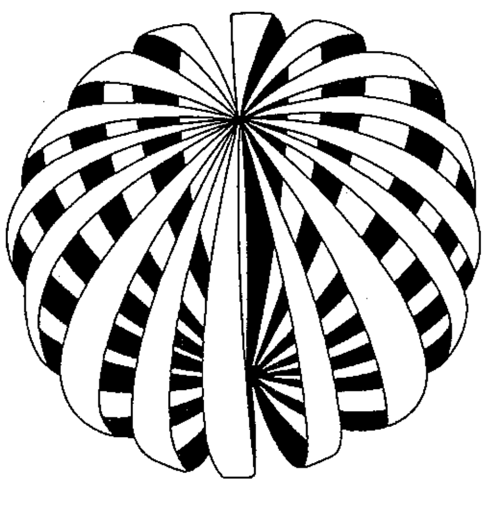


Fig. 49

Chaque pavé est un secteur de sphère, d'angle $2\pi/n$.

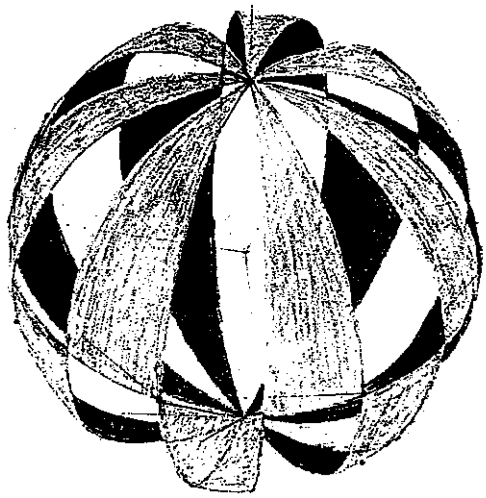


Fig. 50

Chaque pavé est un secteur de demi-sphère, d'angle $2\pi/n$.

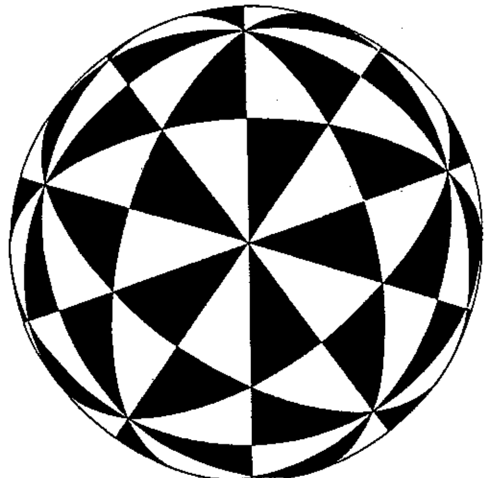


Fig. 51

Pavage de la sphère obtenu à partir d'un dodéaèdre ou d'un icosaèdre. Chaque pavé est un triangle sphérique d'angles $\pi/2$, $\pi/5$, $\pi/3$.

PAVAGES RÉGULIERS NON-PÉRIODIQUES DU PLAN

Il est très facile de construire un pavage régulier non-périodique. Imaginons un damier sur lequel on a tracé de façon aléatoire une diagonale pour chacun des carrés élémentaires. Nous voilà en présence d'un pavage régulier non-périodique du plan par des triangles rectangles isocèles.

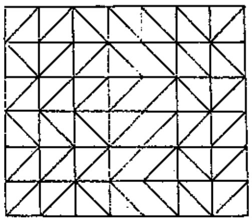


Fig. 52

Prenons maintenant l'un des 17 types de pavage régulier périodique du plan. Il apparaît des bandes dans des directions correspondant aux translations du groupe des transformations laissant invariant le pavage. Choisissons l'une des directions et déplaçons chaque bande de façon arbitraire (en les faisant glisser l'une par rapport à l'autre). Nous voilà à nouveau en présence d'un pavage non-régulier périodique du plan.

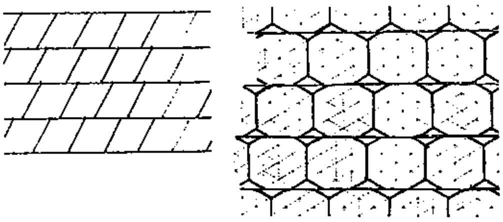
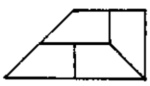
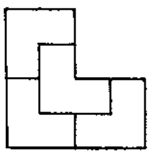


Fig. 53

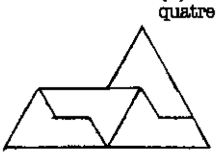
Il n'est pas nécessaire que les pavés aient deux côtés parallèles à la direction de translation, comme le montre le cas du pavage par des hexagones.
Une autre façon de paver le plan de façon non périodique est de trouver un pavé que l'on peut découper exactement en pavés de même forme mais plus petits. Pour que cela conduise à un pavage non-périodique il faut que le découpage présente une certaine irrégularité (un pavé carré découpé en quatre plus petits ne conviendrait pas). C'est Solomon W. Golomb qui en 1962 étudia ce type de pavés; en voici quelques exemples.



(a) Un trapèze en quatre petits trapèzes.



(b) Un hexagone en quatre plus petits.



(c) Pentagone ou sphynx en quatre petits sphynx.

Il est alors simple, à partir d'une de ces figures de donner un pavage régulier non-périodique du plan. On part d'un pavé que l'on découpe en n plus petits, puis on agrandit la figure dans le rapport $\sqrt{n}$ (agrandissement linéaire ; en surface cela revient à identifier le petit pavé au grand pavé initial), et on continue ainsi de suite. Voici quelques résultats *(fig. 55 - fig. 56 - fig. 57)*.
Nous avons vu qu'une rosace, qui est un pavage régulier périodique du disque, peut s'étendre en un pavage régulier périodique du plan entier à condition de prendre comme pavé un secteur angulaire qui s'étend à l'infini. On peut éviter cet inconvénient en découpant le secteur en pavés identiques. Il y a des translations, des symétries droites, des rotations... mais l'ensemble ne forme pas un groupe.

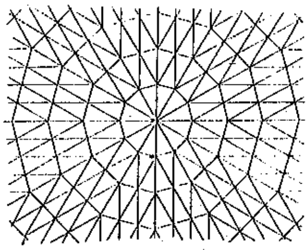


Fig. 58

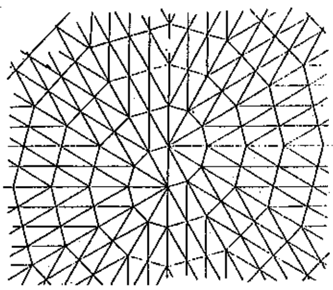


Fig. 59

Glissement d'une unité.

La figure 58 montre une symétrie d'ordre n. Mais on peut rompre cette symétrie (n = 12 sur la figure) en faisant glisser l'une des moitiés du pavage d'une quantité arbitraire *(fig. 59 - fig. 60)*.

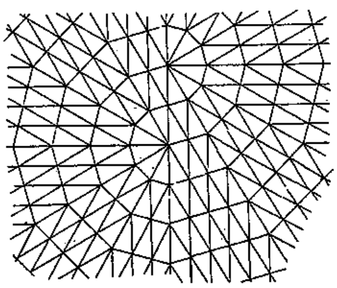


Fig. 60

Glissement de deux unités.

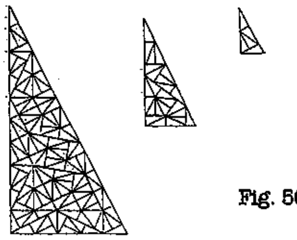


Fig. 56

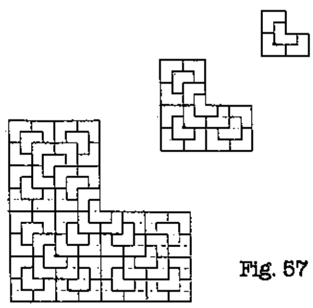
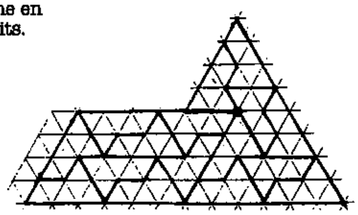


Fig. 57



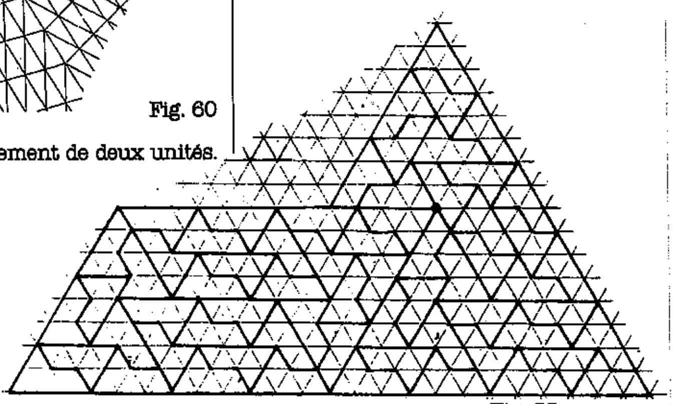


Fig. 55

On peut même choisir un pavé différent du triangle isocèle. En 1937 Voderberg a publié cette figure basée sur un énéagone.

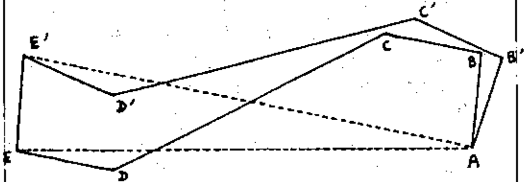


Fig. 61

Où les lignes ABCDE et A'B'C'D'E' se déduisent l'une de l'autre par une rotation de $\pi/15$. De plus, les segments AB, BC, DE et EE' sont de même longueur L et la distance AE vaut L/2sin ($\pi/30$).
Par ailleurs on a les égalités d'angle :
$\widehat{BAE} = \widehat{AB'C'} = \widehat{DEE'} = 8\pi/15$;
$E\widehat{E'D'} = 6\pi/15$; $\widehat{CDE} = \widehat{BCD}$.
En travaillant comme à la figure 59 on obtient :

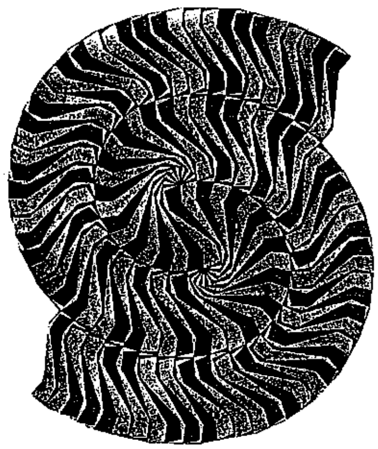


Fig. 62

Pavage régulier non-périodique du plan par un polygône à neuf côtés. Ce pavage est dû à Voderberg qui l'a publié en 1937, malheureusement avec une erreur, dans «Jahresricht der Deutscher Mathematiker Vereinigung». On retrouve ce dessin, avec la même erreur dans le livre de «Géométrie» de Berger, chez Cedic.

On remarquera que le pavé énéagonal peut paver régulièrement et périodiquement le plan. Il suffit d'en accoler deux pour former un octogone à côtés parallèles.

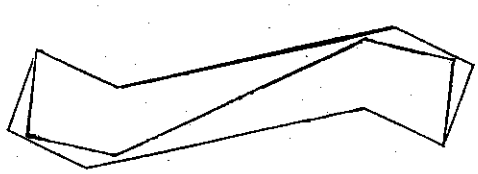


Fig. 63

Voici enfin un dernier essai de pavage régulier non périodique basé sur le pentagone. Kepler avait essayé de paver le plan avec des pentagones (convexes) et des pentagrammes (étoilés) et s'était rendu compte de l'impossibilité de la tâche. Si on ajoute le décagone et une figure formée par la réunion de deux parties d'un décagone (figure avec 16 côtés), le pavage est alors possible et cela de bien des façons :

Soit sous forme d'un pavage régulier périodique.

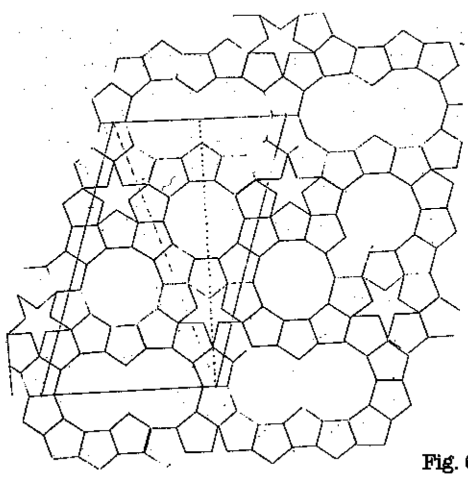


Fig. 64

Pavé
1 double décagone
2 décagones
2 étoiles
22 pentagones.

Soit sous forme d'un pavage présentant une symétrie d'ordre 5.

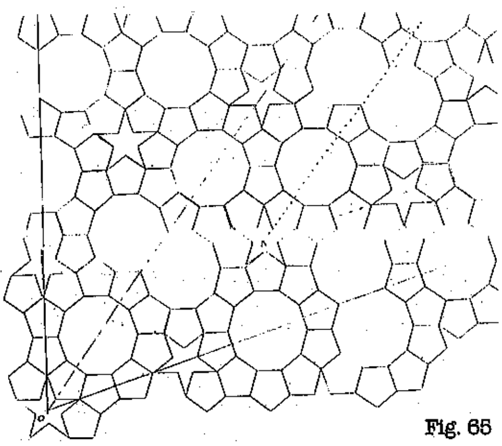


Fig. 65

Soit même sans qu'aucune symétrie globale n'apparaisse.

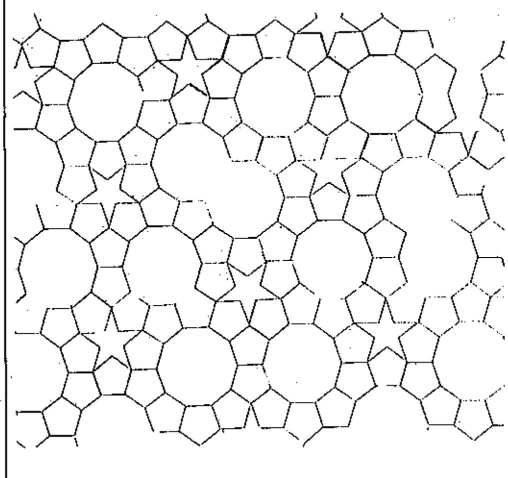


Fig. 66

PAVAGES RÉGULIERS OBLIGATOIREMENT NON PÉRIODIQUES

Dans tous les cas précédents où nous avons obtenu des pavages réguliers non-périodiques, chaque pavé ou ensemble de pavés pouvait être disposé autrement pour donner un pavage régulier périodique. La question qui se pose est de savoir s'il existe un pavé ou un ensemble de pavés dont l'assemblage se fait de façon obligatoirement (ou automatiquement) non périodique (de même qu'on ne peut paver que d'une seule façon avec des hexagones).
La réponse à cette question est récente et provient de recherches en logique formelle vers 1964. A cette époque, on avait construit un ensemble de plus de 20.000 pavés conduisant à un pavage obligatoirement non-périodique. Ce n'est que dix ans plus tard que Penrose réduisit ce nombre à deux. Depuis, différentes formes ont été données à ces deux pavés et même, en hommage à Escher, deux formes de poules *(fig. 67 a, b, c)*.
Jusqu'à présent, ces pavés sont intimement liés avec le nombre d'or et la symétrie d'ordre 5. Dans les formes polygonales, on reconnait des quadrilatères avec un système d'encoches et de tenons imposant l'assemblage non périodique (sinon on retrouverait un pavage périodique). Voici quelques exemples de pavages *(fig. 68 -fig. 69 -fig. 70)*.

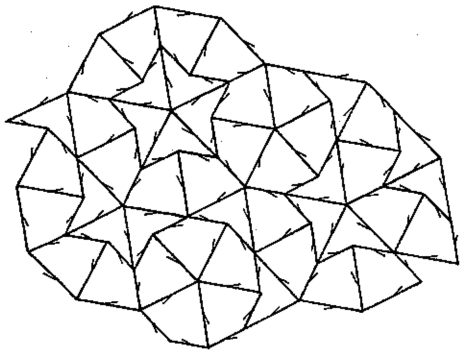


Fig. 68

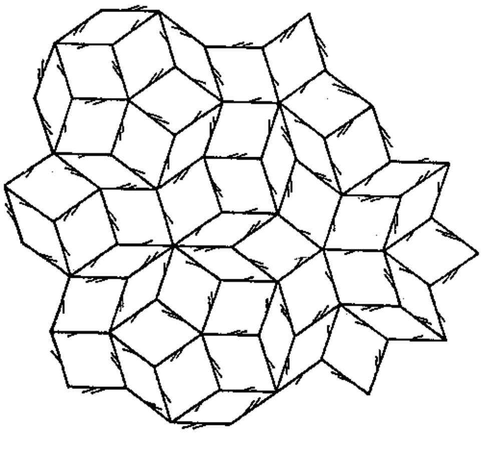
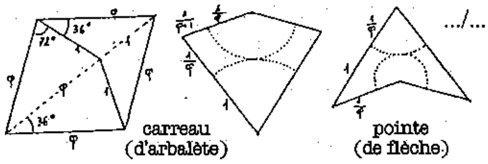


Fig. 69

Fig. 70

Les pavés de la figure 67a portent le nom de carreau (d'arbalète) et de pointe (de flèche). Ils sont réalisés selon les indications de la figure 71 où les tenons et encoches ont été remplacés par des arcs de cercle qui doivent impérativement se raccorder d'une pièce à l'autre pour éviter un assemblage selon le losange de gauche de la figure 71. En réalisant un pavage tel que celui de la figure 72, les arcs de cercles font apparaître des courbes qui en général se referment (au plus deux d'entre-elles ne se referment pas) et englobent des régions possédant une symétrie

.../...



Le rapport des aires du carreau et de la pointe vaut φ.
$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

Fig. 71

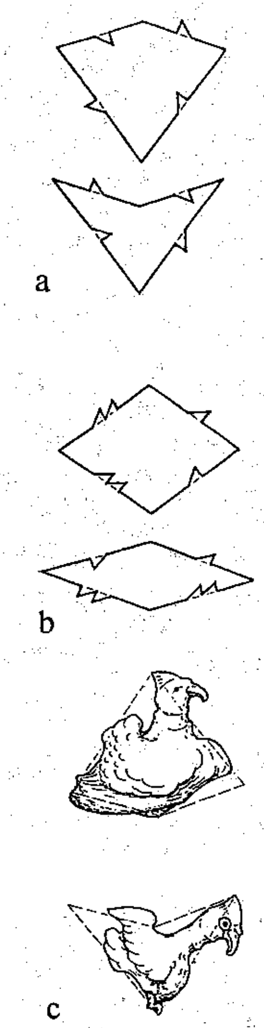


Fig. 67

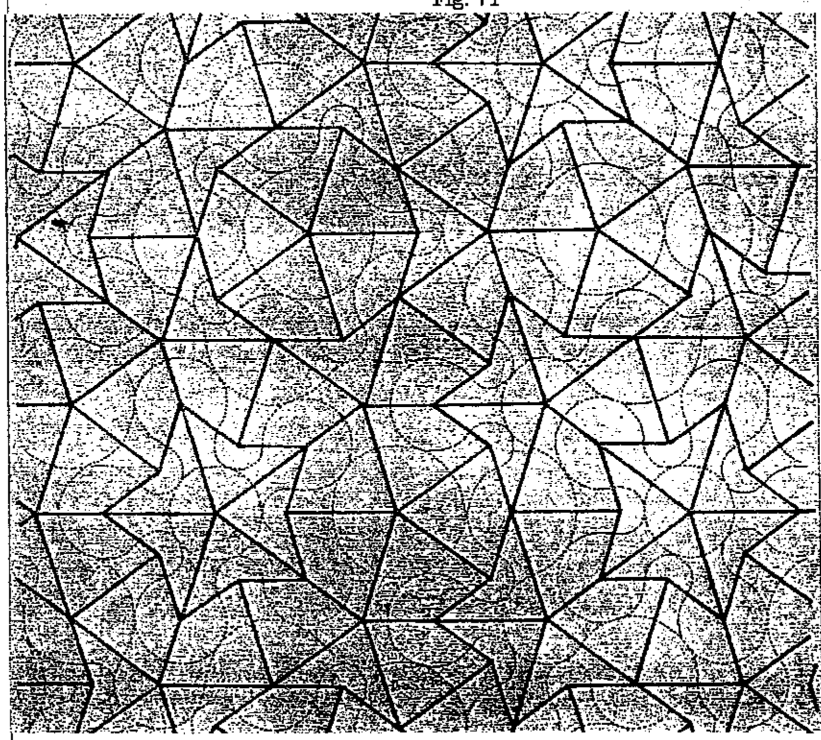


Fig. 72

Dans un tel pavage, le «carreau» est φ fois plus nombreux que la «pointe».

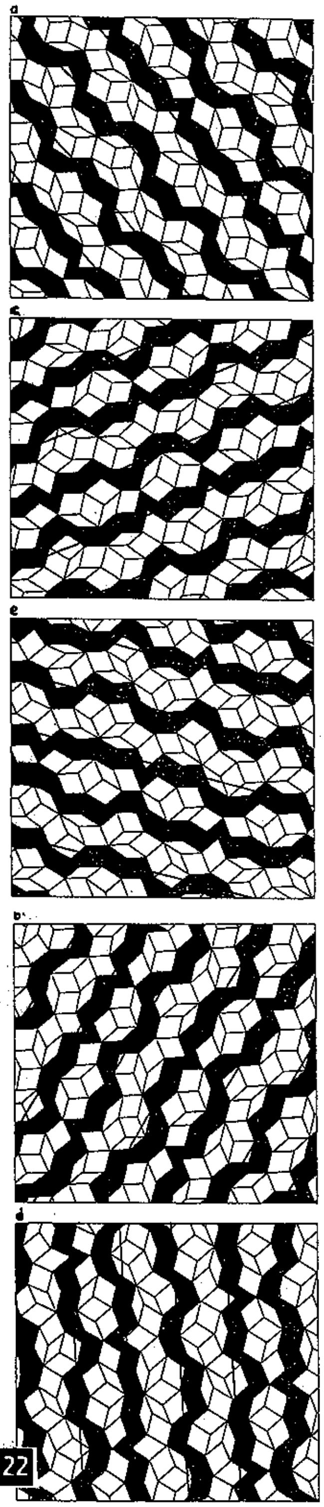


Fig. 73

5 axes de pseudo-translation dans un pavage régulier obligatoirement non-périodique.

d'ordre 5. Alors qu'il y a une infinité non-dénombrable de pavages, il n'y en a que deux qui possèdent une symétrie d'ordre 5. *(fig. 73 - fig. 74).*
Mais il y en a une infinité qui possèdent un axe de symétrie. *(fig. 75).*
Tous les dessins sont, par la force des choses, limités dans le plan. Or on démontre que toute partie finie d'un pavage obligatoirement non périodique se retrouve une infinité de fois dans n'importe quel pavage réalisé avec les mêmes pièces, la distance entre deux régions identiques étant au plus égale à deux fois son diamètre.
Les propriétés que nous venons de signaler pour les pavés de la figure 67a sont également vérifiées par les pavés de la figure 67b, losanges dont les petits angles valent respectivement 72° et 36° et pour les pavés en forme de poules de la figure 67c qui ne sont que les premiers cités légèrement modifiés.
Il est remarquable que ces pavages obligatoirement non périodique découverts en 1964 aient trouvé des applications en métallurgie en 1984 avec la réalisation des quasi-cristaux. Il a fallu bien sûr travailler non plus dans le plan, mais dans l'espace et par un juste retour des choses cela a permis de découvrir de nouvelles propriétés des pavages obligatoirement non périodiques du plan qui sont bien mis en évidence sur la figure 76 qui montre l'apparition de pseudo-translations dans un pavage réalisé avec les éléments de la figure 67b. Si on colorie tous les losanges qui ont un côté parallèle à une direction donnée, on obtient une série de lignes brisées de direction moyenne perpendiculaire à la direction choisie, régulièrement espacées (de 0,5 (φ+ 3) en prenant comme unité le côté du pavé). On obtient ainsi cinq directions de pseudo-translations faisant entre-elles des angles multiples de 72°.

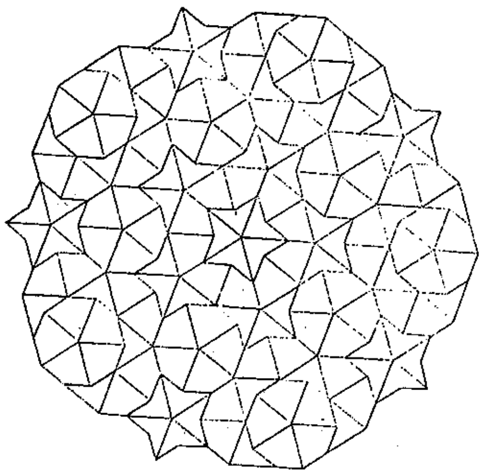


Fig. 74

L'étoile (on commence par 5 carreaux).

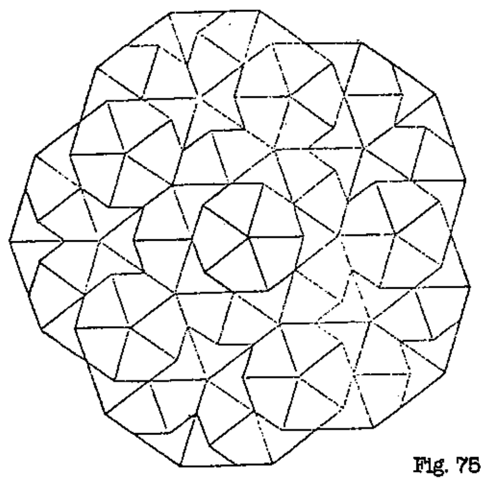


Fig. 75

Le soleil (on commence par 5 carreaux).

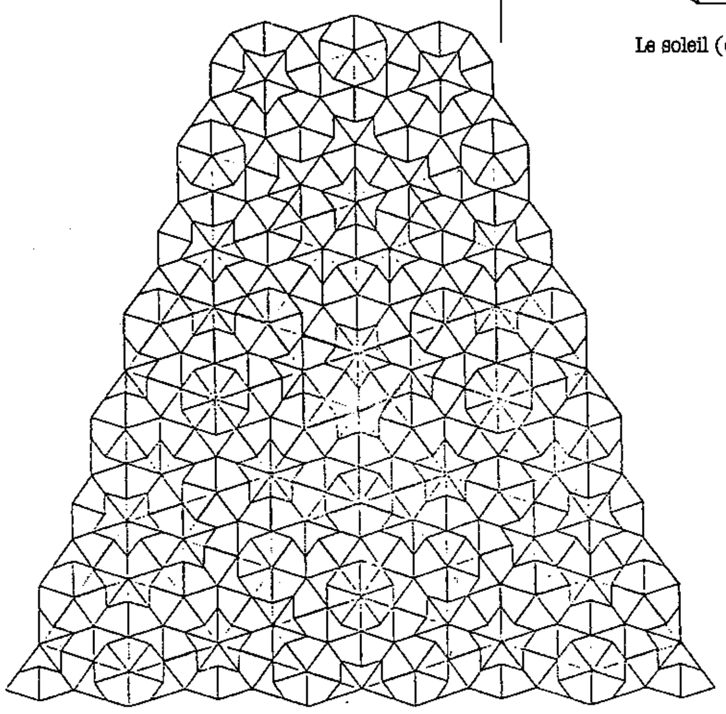


Fig. 76

Pavage non-périodique avec un axe de symétrie.

PAVAGES NON-RÉGULIERS PÉRIODIQUES

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des pavés (ou ensemble de pavés) identiques. Il existe cependant de nombreuses transformations géométriques qui modifient la taille et/ou l'aspect du pavé. En voici trois exemples :

- **l'homothétie** (et la similitude) qui modifie la taille en conservant la forme. *(fig. 77).* C'est une transformation indispensable pour la réalisation de plans à l'échelle.

- **L'affinité** qui modifie la taille dans une direction seulement *(fig. 78 - fig. 79).* Cette transformation est utilisée pour la signalisation routière sur la chaussée (flèche de direction, nom de ville, indication de piste cyclable pour le dessin d'un vélo...) *(fig. 80).*

- **L'inversion** qui est une sorte de symétrie par rapport à un cercle. D'une façon plus précise, deux figures (F) et (F') se correspondent par une inversion de puissance k si à tout point M de (F) on peut associer un point M' de (F') tel que OM.OM' = k. *(fig. 81).*

Limitons-nous à ces trois nouvelles transformations que nous combinerons librement avec les translations, symétries, rotations... transformations déjà vues, et utilisons-les pour obtenir quelques pavages non-réguliers (puisque les dimensions varient) et périodiques (car on fera en sorte qu'il existe un groupe de transformations dont chaque élément laisse globalement invariant le pavage).

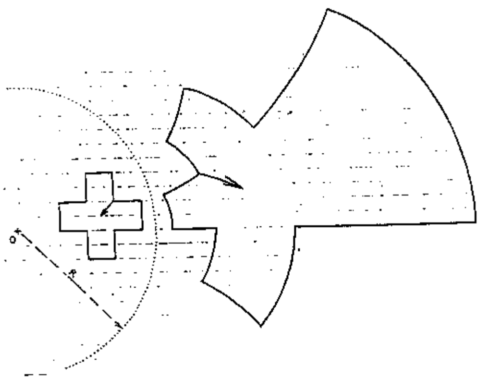


Fig. 81

Inversion de centre O et de puissance R^2, R étant le rayon du cercle. Un point et son image sont alignés avec O.

Avec homothétie et symétrie d'ordre n.
C'est l'extension d'une rosace en utilisant une homothétie de rapport convenable pour que les pavés soient jointifs. Comme il y a deux types de rosaces, on trouvera aussi deux types de pavages selon qu'il existe ou non des axes de symétrie miroir *(fig. 82 - fig. 83 - fig. 84).*

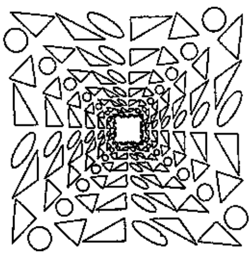


Fig. 82

Symétrie d'ordre 4 et homothétie de rapport 7/5.

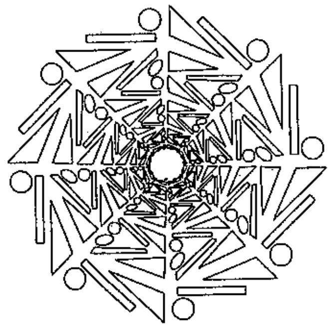


Fig. 83

Symétrie d'ordre 8 et homothétie de rapport 1,78.

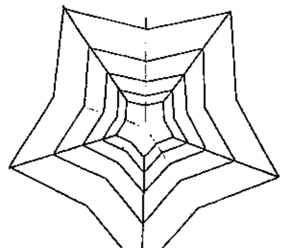


Fig. 84

Symétrie d'ordre 5 et homothétie de rapport 1,5 avec symétrie miroir.

Dans chacune de ces figures on n'a représenté que quelques pavés puisqu'il est impossible d'aller jusqu'au centre où les pavés deviennent infiniment petits et bien sûr vers l'extérieur, les pavés devenant de plus en plus grand.

Avec homothéties et similitudes.
Dans le cas précédent homothétie et rotation engendrent des similitudes. La différence dans le cas présent c'est que l'angle de la similitude peut être un sous-multiple de l'angle d'une éventuelle rotation laissant invariante la figure *(fig. 85).*

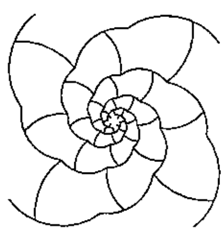


Fig. 85

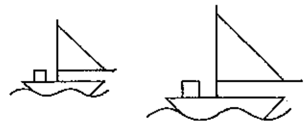


Fig. 77

Homothétie de rapport 1,5.

Fig. 78

Affinité orthogonale de rapport 4 (une dimension est 4 fois plus grande).

Fig. 79

Affinité oblique.

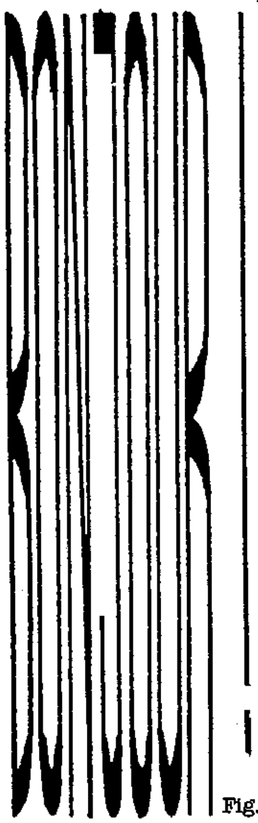


Fig. 80

Pour lire ce texte, mettre le journal horizontalement à hauteur des yeux.

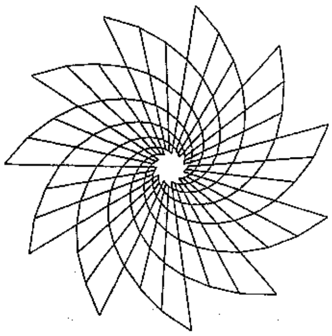


Fig. 86

Cette figure possède une symétrie d'ordre 4 (rotation d'angle $\pi/2$) mais à «l'intérieur» de chaque spirale on passe d'un pavé au suivant par une similitude d'angle $\pi/4$. On peut donc engendrer la figure soit avec une homothétie de rapport 2 et une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$, soit avec une rotation d'angle $\pi/2$ et la même similitude. Le lien entre le rapport de l'homothétie et celui de la similitude n'est pas fortuit, mais résulte du fait que l'angle de la similitude est la moitié de l'angle de la rotation *(fig. 86)*.

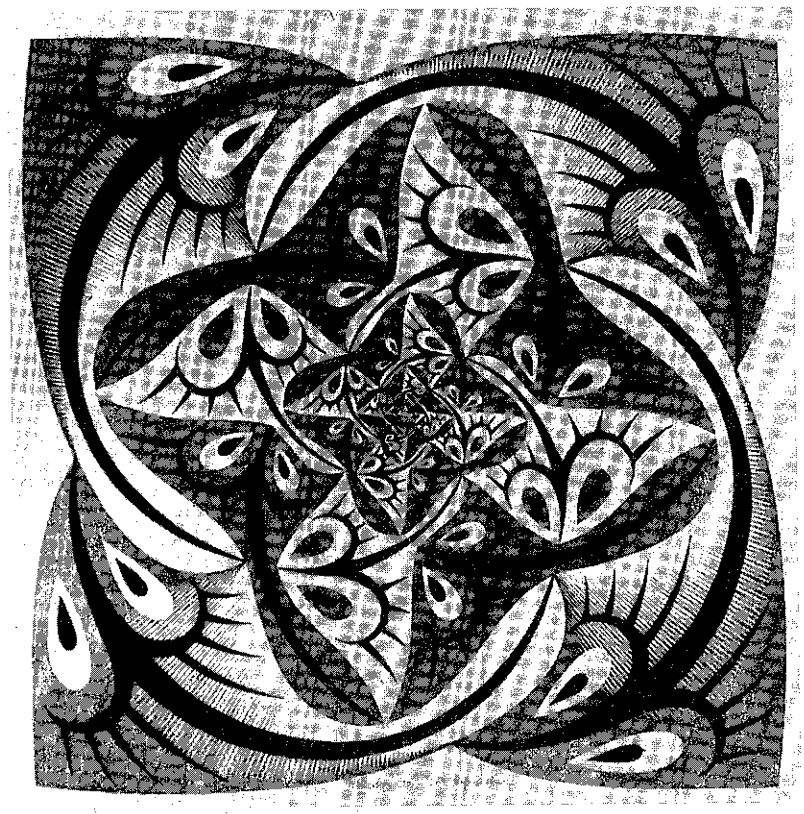


Fig. 87

Ici Escher dans sa gravure «Le cours de la vie» II, a modifié les «poissons» extérieurs pour arrêter son dessin. Tous les autres «poissons» participent d'un pavage non régulier périodique engendré par une homothétie et une similitude (ou une rotation et une similitude).

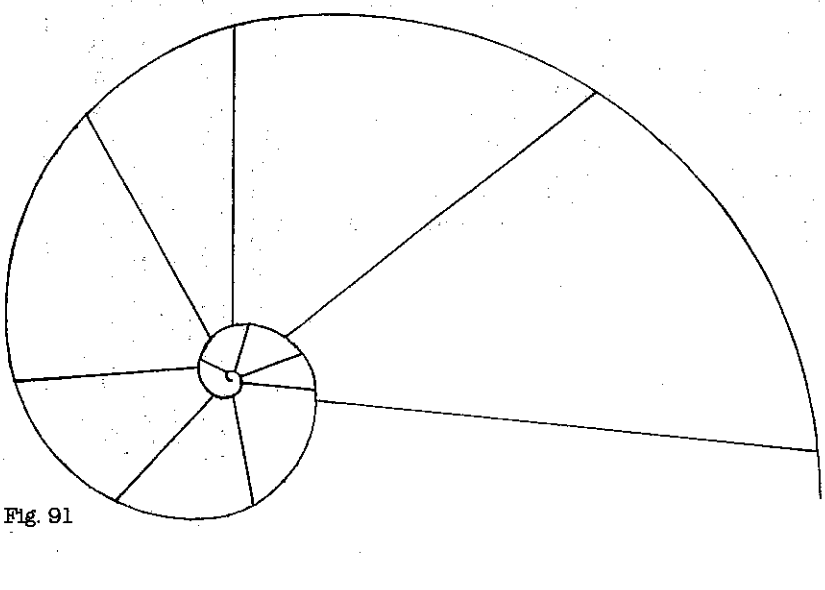


Fig. 91

Ici on peut mettre en évidence une symétrie d'ordre 11 (rotation d'angle $2\pi/11$) et une similitude d'angle $2\pi/33$ qui est donc le tiers. L'homothétie élémentaire a donc un rapport qui est le cube du rapport de la similitude *(fig. 87)*.
On peut également adjoindre une symétrie miroir *(fig. 88 - fig. 89)*.

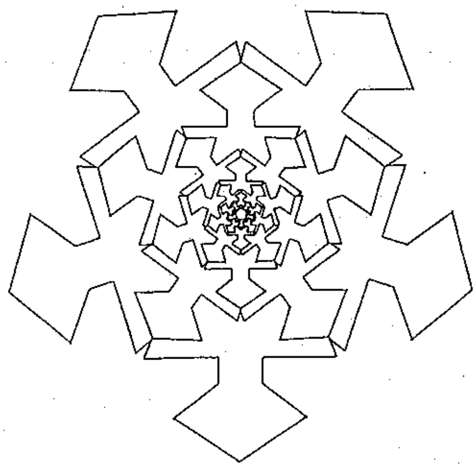


Fig. 88

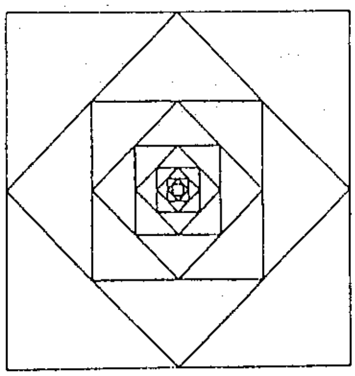


Fig. 89

Avec une similitude.
On peut considérer que c'est un cas particulier du précédent avec une homothétie de rapport 1 (ou une rotation d'angle nul). Mais cela permet aussi d'obtenir des similitudes dont l'angle est quelconque et pas seulement de la forme $2\pi/n$ *(fig. 90 - fig. 91)*.

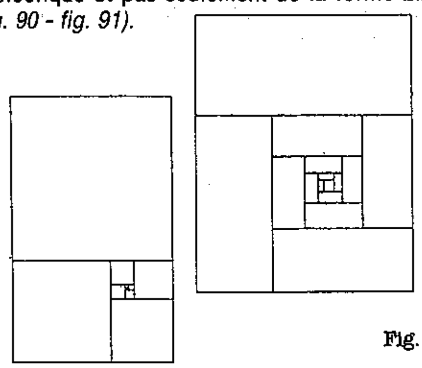


Fig. 90

L'angle de la similitude est, dans les deux cas, de $\pi/2$.

Extension d'une frise avec une affinité.
On a vu qu'il existait sept sortes de frises. De même que l'on a étendu les rosaces à tout le plan à l'aide d'homothéties, on peut étendre une frise à tout le plan à l'aide d'affinités. Nous nous contenterons des deux figures ci-après *(fig. 92 - fig. 93)*.

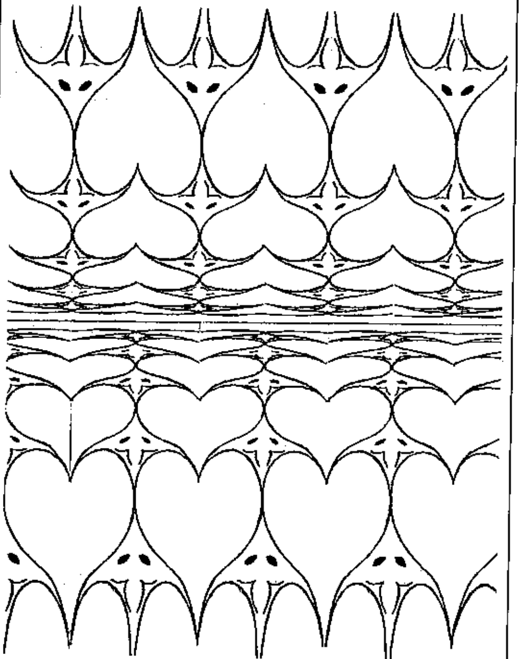


Fig. 92

Utilisation d'une transvection.
Bornons-nous à montrer l'œuvre de l'artiste, toujours M.C. Escher, où il réalise un pavage invariant par une transvection et des homothéties *(fig. 94)*.
Rappelons que la transvection est, ici, la transformation définie par :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

Fig. 94

Avec des inversions.
Le problème des pavages non-réguliers périodiques où le groupe de transformation contient des inversions est intimement lié aux problèmes des pavages réguliers périodiques du plan en géométrie non euclidienne hyperbolique. Il ne saurait être question ici d'en faire une étude exhaustive. Nous nous contentons de donner quelques exemples du pavage d'un disque (une inversion dont le pôle est sur la frontière du disque permet d'obtenir le pavage d'un demi-plan) (fig. 95 à 98).

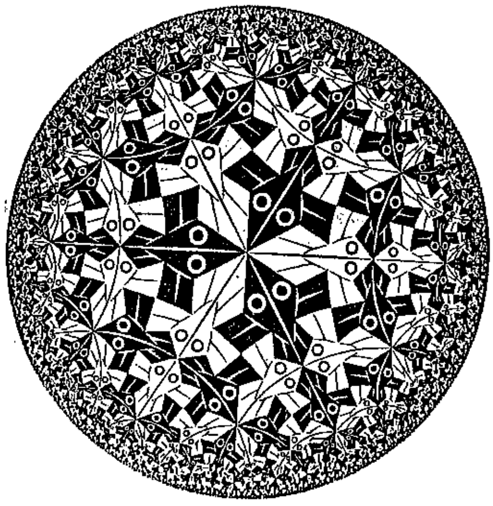


Fig. 95

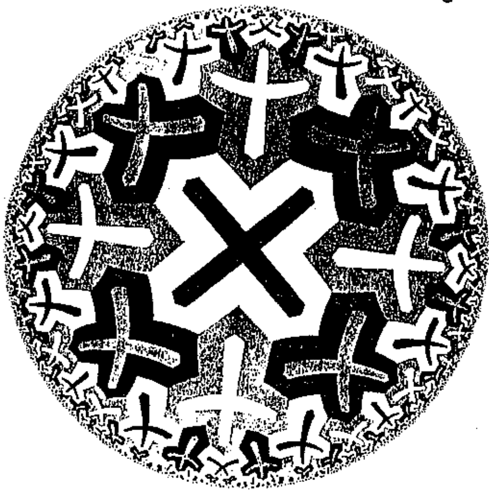


Fig. 97

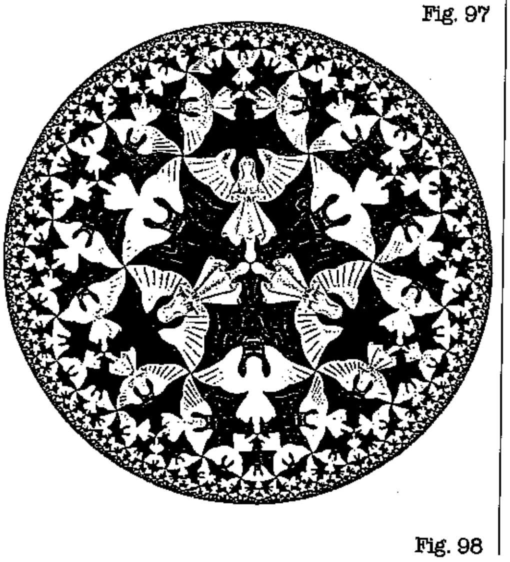


Fig. 98

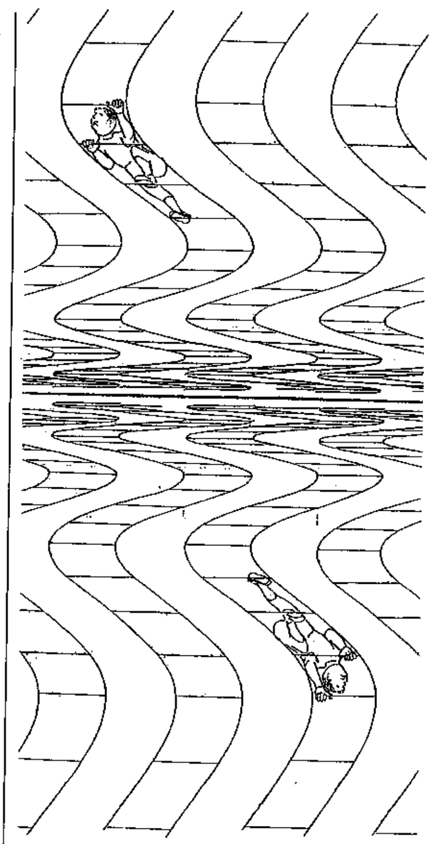


Fig. 93
Variation sur
$y = 5 \sin(\pi \ln x / \ln 2)$

Deux problèmes ouverts.

Pavages non-réguliers non-périodiques.
On pourrait penser que ceci ne présente aucun intérêt mathématique puisqu'il n'y a plus de contrainte. En réalité c'est le rôle du mathématicien que de se poser des questions, soit de façon gratuite et leur utilité n'apparaît souvent que plus tard, soit de façon plus pratique comme approximation d'un problème concret. Nous avons vu comment les pavages réguliers obligatoirement non-périodiques qui sont apparus à propos d'un problème de logique ont vu leur champ d'application s'accroître à la suite d'une découverte récente en cristallographie.

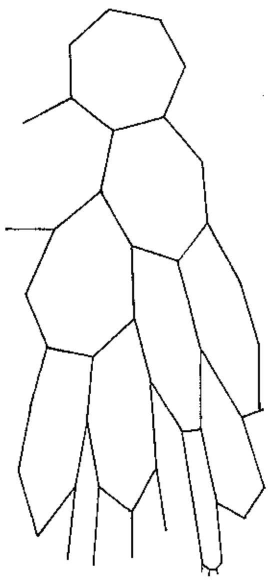


Fig. 99

Tentative de pavage du plan avec des heptagones et une symétrie d'ordre 7.

Devant l'absence de contrainte, le mathématicien en inventera. Voyons un seul cas :
Problème : Peut-on paver le plan avec des heptagones convexes de dimensions bornées ? *(fig. 99).*

Le pavé universel.
On a trouvé 17 pavages réguliers périodiques du plan. Les exemples donnés ici ont fait apparaître des pavés variés pour chacun de ces 17 types.
Problème : Existe-t-il un pavé qui peut servir pour les 17 types de pavages réguliers périodiques ? Le meilleur pavé est actuellement le demi-triangle équilatéral qui permet 14 pavages différents *(fig. 100).*

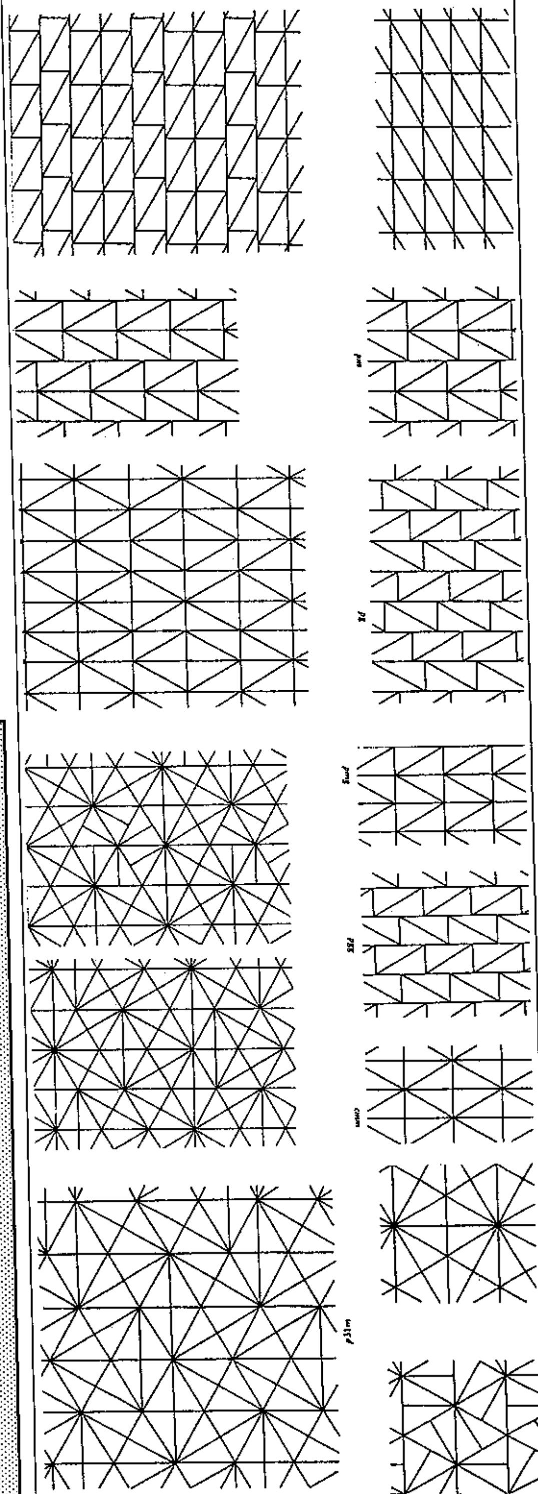


 Fig. 100

BIBLIOGRAPHIE

- **Y. BOSSARD** rosaces, frises et pavages .... chez CEDIC
  Vol. 1 : étude pratique - Vol. 2 : étude théorique
- **M. C. ESCHER** Le Monde de M.C. Escher .... CHÊNE
- **F. J. BUDDEN** La fascination des groupes .... OCDL
- **A. HOLDEN** Formes, espaces et symétries .... Distracts-CEDIC
- **M. FLEURY** in Topologie structurale n° 12 et in Plot n° 40 - Le programme Alhambra
- **J. LEFORT** in Ouvert n° 10 A propos de la couverture
- **M. COORNAERT** in Ouvert n° 35 Symétrie et décoration
- **J. LEFORT** in Ouvert n° 22 A propos de la couverture
- **M. BERGER** Géometrie - Tome 1, 5 .... CEDIC
- **COXETER** Euclidean Geometry
- **F. PECAUT** Polyèdres pavants .... PREPRINT
- **F. THREHARD** Mosaïques et isométries .... CEDIC
- **C.P. HORNUNG** Allover Patterns .... DOVER (NY)
- **COXETER & Al. M. C. ESCHER :** Art and Science Proccedings of International Congress on M. C. ESCHER Rome 26-28 mars 85 .... NORTH-HOLLAND
- **D. NELSON** Les quasi-cristaux in Pour la Science (Octobre 86) .... BELIN
- **B. GRUNBAUM & G. C. SHEPHARD :** Is there an all-purpose tile. A2in American Mathematical monthly (August-Sept 86).

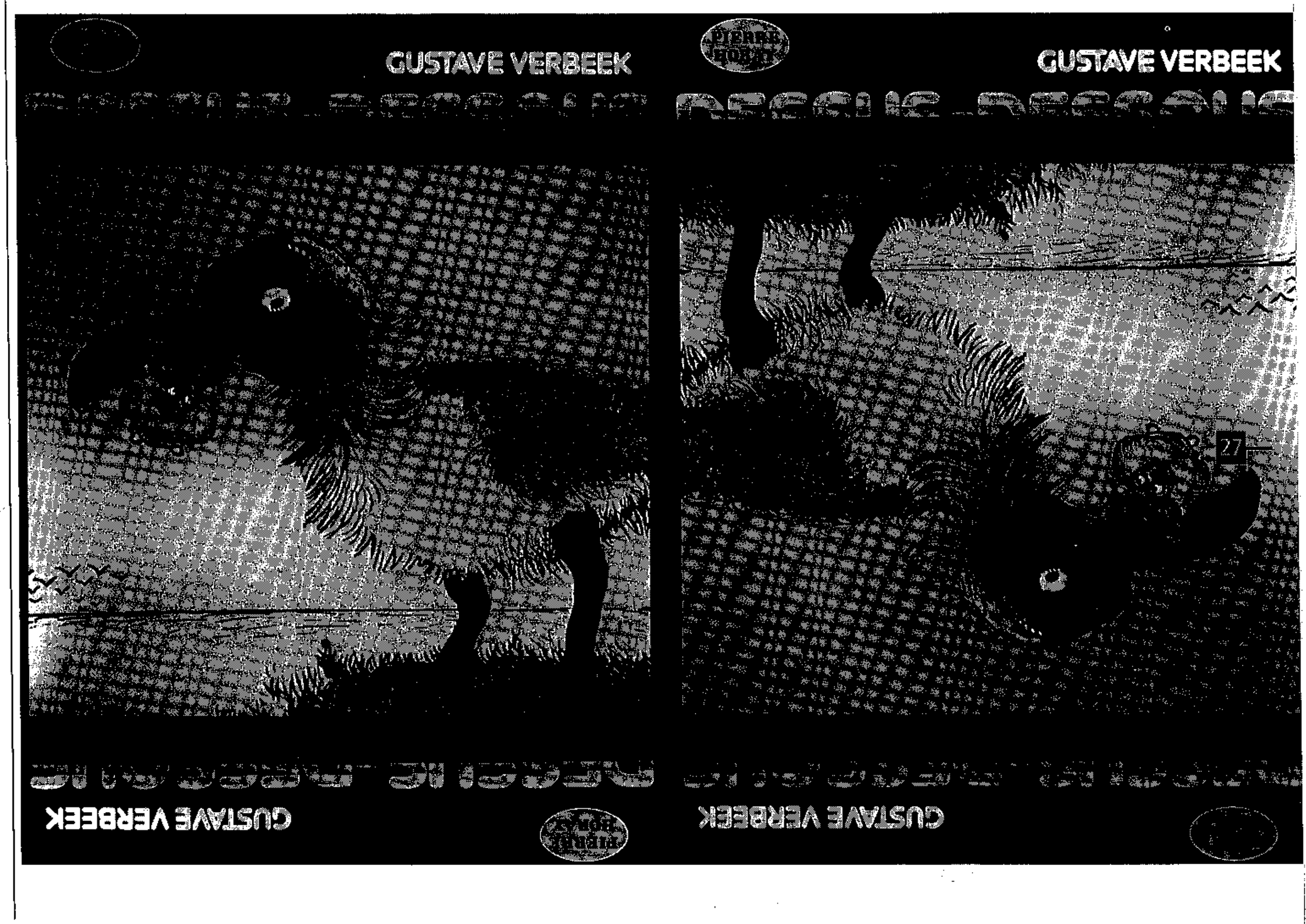
BD-REVUE

DESSUS-DESSOUS

Gustave VERBEEK

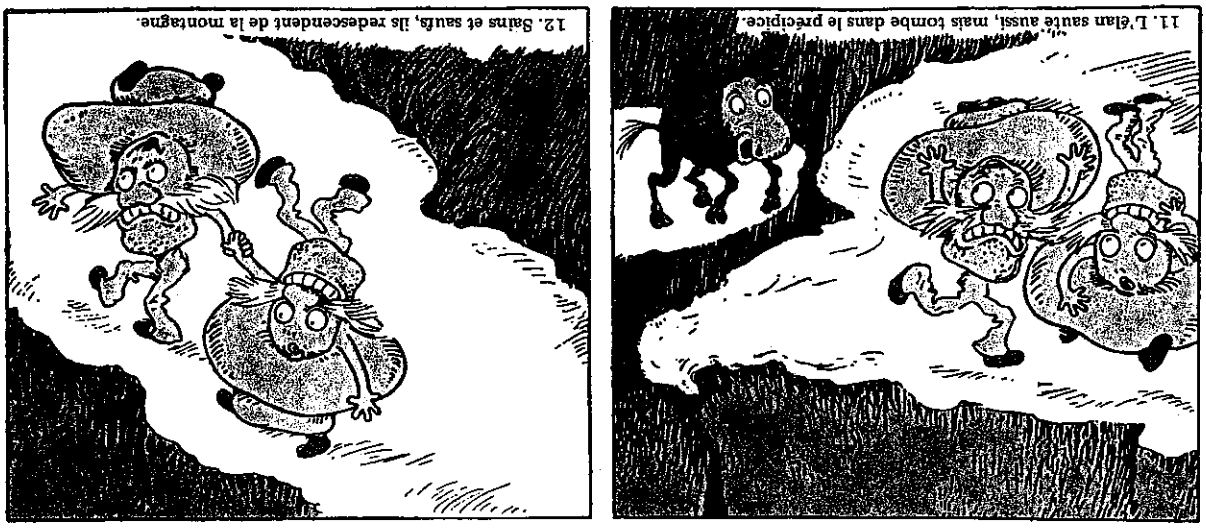
Pour parler de cette BD de Gustave Verbeek, publiée en français par Pierre Horay en 1978, laissons parler le traducteur Pierre Couperie.

«Voici un album de bandes dessinées comme il n'en existe aucun autre.
Chaque page de six images en contient en réalité douze ; on lit d'abord la page dans le sens normal, puis on retourne le livre, haut en bas, et on continue la lecture : tout change magiquement d'aspect et révèle la fin de l'histoire.
Ainsi la sixième image est en même temps la septième, et la première est aussi la dernière. Vous remarquerez que la petite Lovekins, retournée, devient son grand-père ou oncle, le vieux Muffaroo, et vice-versa.
Ils connaissent beaucoup d'aventures dans le pays étrange qu'ils habitent.
Cette bande parut de 1903 à 1905 dans un journal de New-York. Elle s'appellait «The Upside-Downs», les sens dessus-dessous. Son auteur a réussi là un tour de force d'imagination que personne depuis n'a pu imiter».



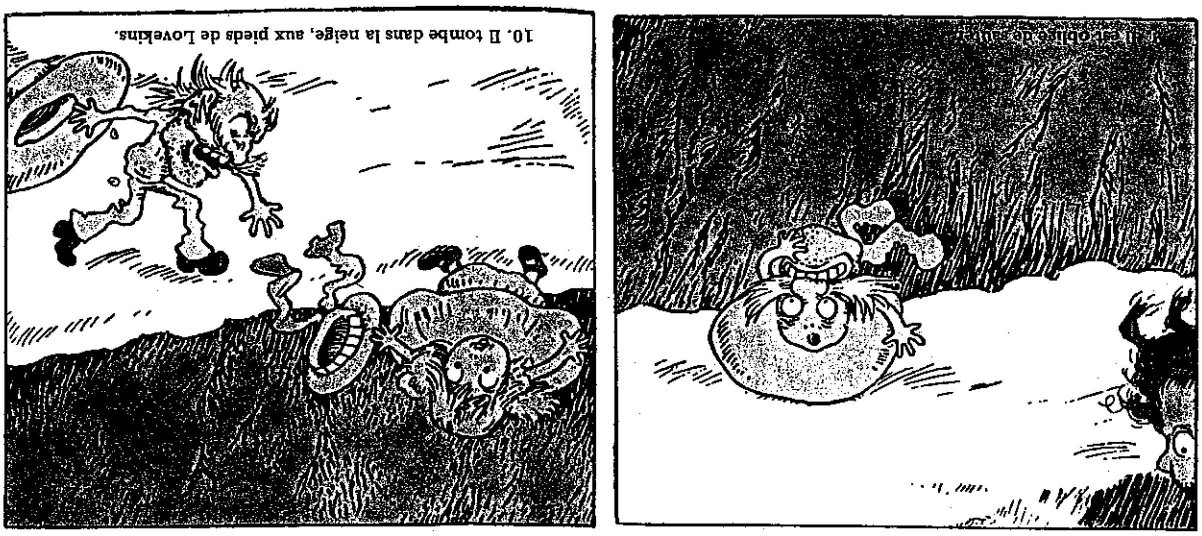
UPSIDE DOWNS

LADY LOVEKINS ET PERE MUFFAROO
VONT A LA MONTAGNE



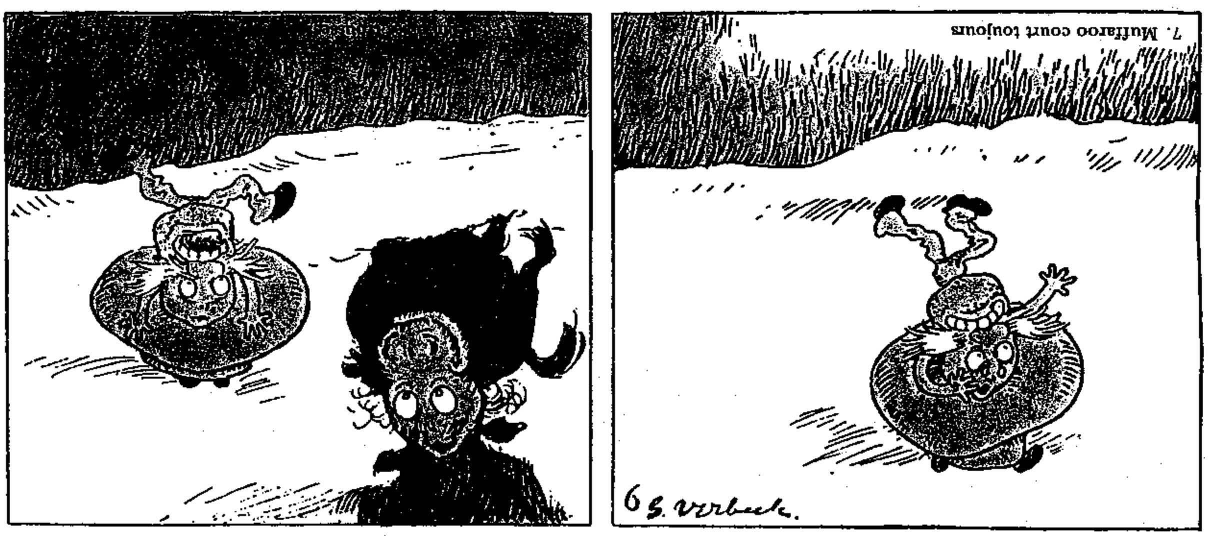
Petite Lovekins et Père Muffaroo grimpent sur une montagne.

Un grand élan les attaque.



Epouvantée, la pauvre Lovekins tombe dans un précipice.

Par chance, elle atterrit sans mal dans la neige.



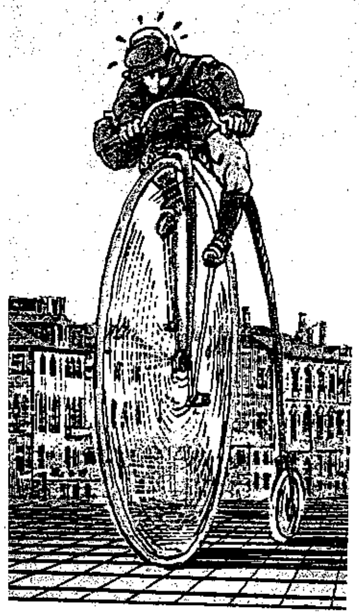
Une vieille dame veut la raccompagner.

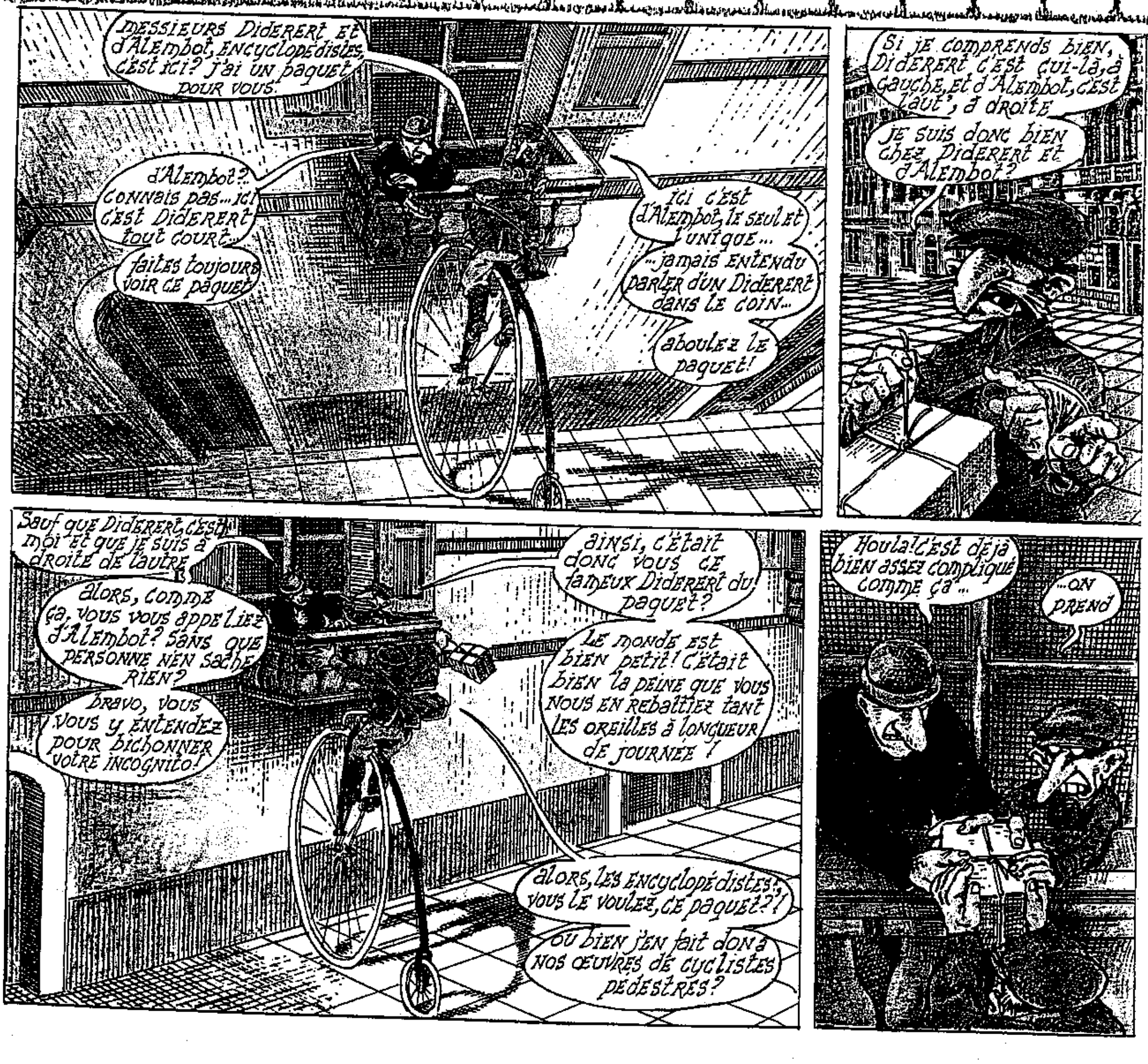
Mais Lovekins part en pleurant chercher Muffaroo.

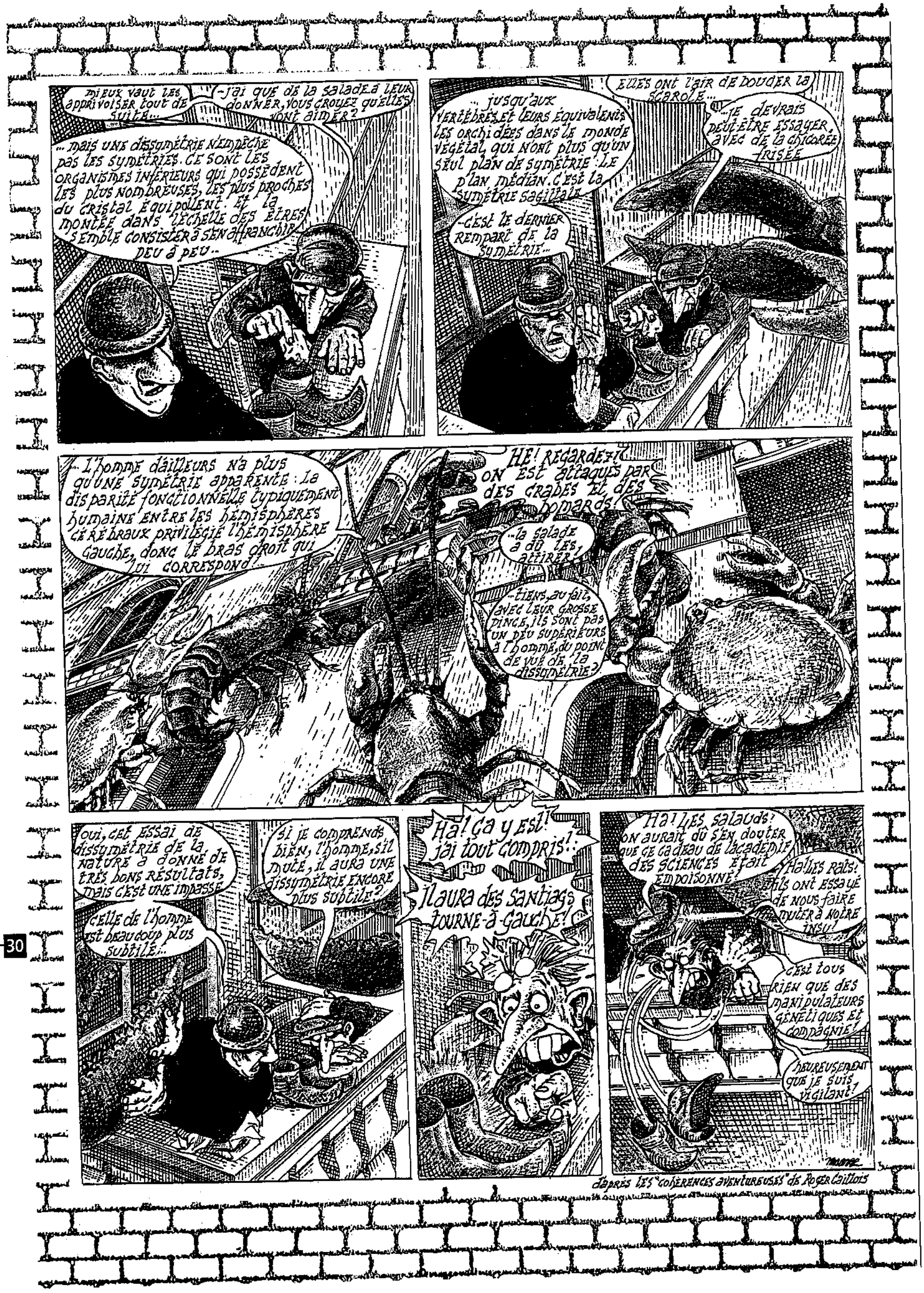
DIEU EST-IL HÉMIPLÉGIQUE ?

Une bande dessinée de Masse : les deux du balcon, éditée chez Castermann (1985).

Vous y trouverez, en plus grand, moult clins d'œil aux mathématiques et aux sciences en général.
Les pages que nous reproduisons ici en réduction, liées au thème «symétrie», touchent, en plus, à la symétrie ou la dyssimétrie du corps :
pourquoi sommes-nous presque tous droitiers ?
pourquoi seulement 10 % de gauchers ?
Ce nombre n'est pas l'effet du hasard !
Finalement, seule une infime partie de la population est parfaitement équilibrée : les ambidextres.



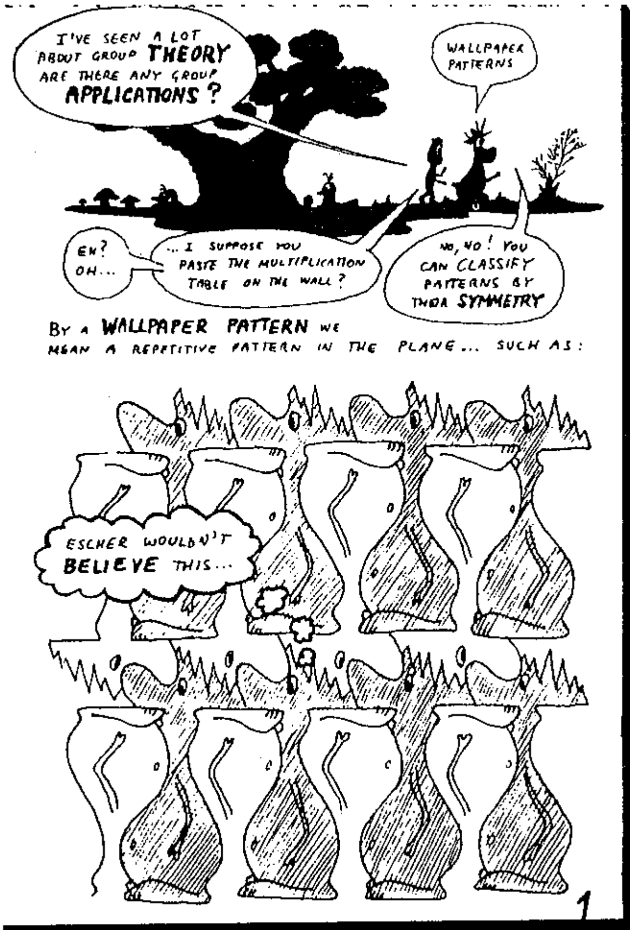


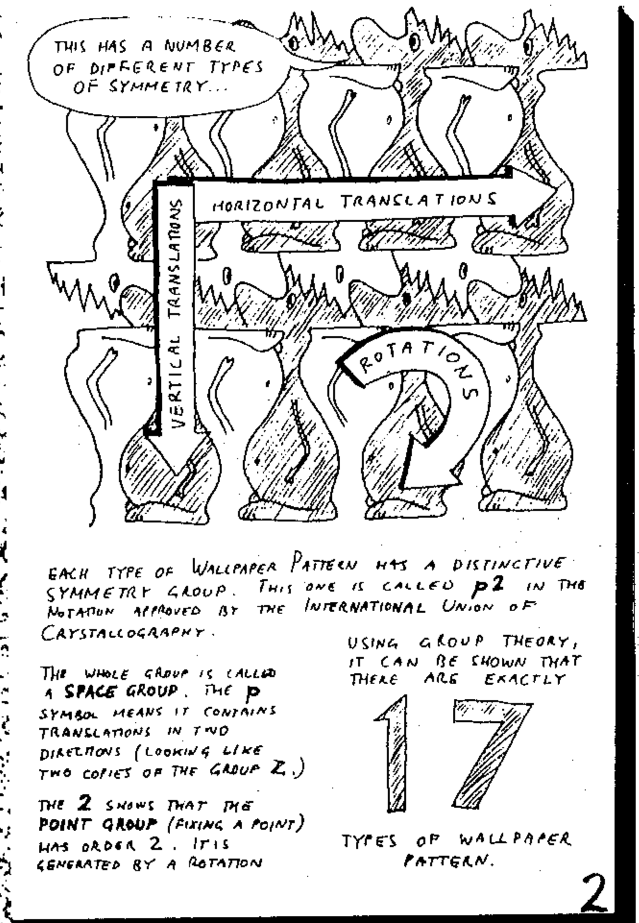

Mieux vaut les apprivoiser tout de suite...
-J'ai que de la salade à leur donner, vous croyez qu'elles vont aimer?
... mais une dissymétrie n'empêche pas les symétries. Ce sont les organismes inférieurs qui possèdent les plus nombreuses, les plus proches du cristal équipollent. Et la montée dans l'échelle des êtres semble consister à s'en affranchir peu à peu...
... jusqu'aux vertébrés et leurs équivalents les orchidées dans le monde végétal, qui n'ont plus qu'un seul plan de symétrie : le plan médian. C'est la symétrie sagittale
-C'est le dernier rempart de la symétrie...
Elles ont l'air de bouder la scarole...
...je devrais peut-être essayer avec de la chicorée frisée
...L'homme d'ailleurs n'a plus qu'une symétrie apparente : la disparité fonctionnelle typiquement humaine entre les hémisphères cérébraux privilégie l'hémisphère gauche, donc le bras droit qui lui correspond!
HE! Regardez!! On est attaqués par des crabes et des homards!
...la salade a dû les attirer!
...tiens, au fait, avec leur grosse pince, ils sont pas un peu supérieurs à l'homme, du point de vue de la dissymétrie?
Oui, cet essai de dissymétrie de la nature a donné de très bons résultats, mais c'est une impasse
Celle de l'homme est beaucoup plus subtile...
Si je comprends bien, l'homme, s'il mute, il aura une dissymétrie encore plus subtile?
Ha! Ça y est!! J'ai tout compris!
Il aura des santiags tourne-à-gauche!
Ha! Les salauds! On aurait dû s'en douter que ce cadeau de l'académie des sciences était empoisonné!
Ha! les rats! Ils ont essayé de nous faire muter à notre insu!
C'est tous rien que des manipulateurs génétiques et compagnie!
Heureusement que je suis vigilant!
d'après les "cohérences aventureuses" de Roger Caillois

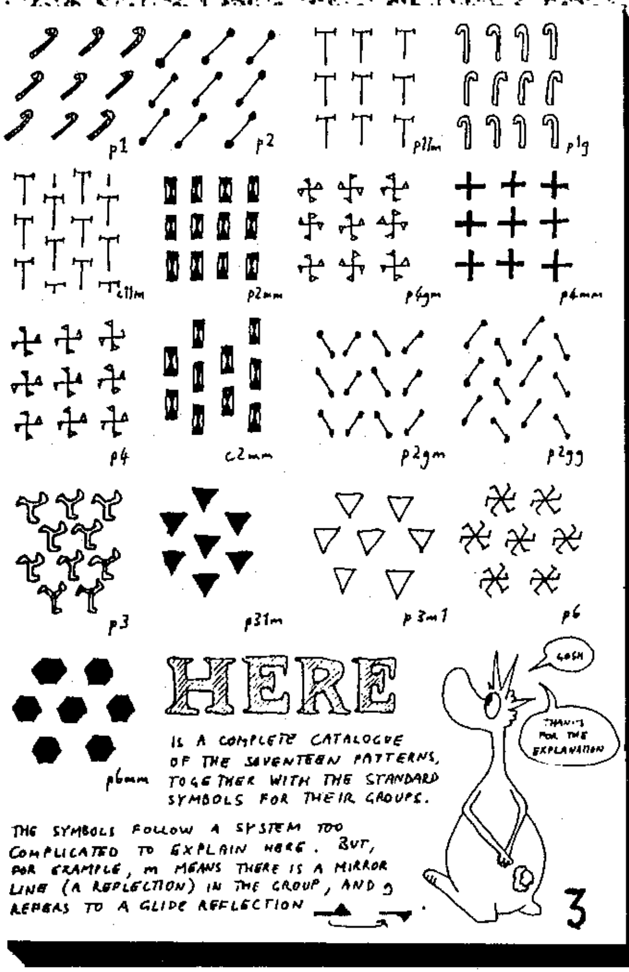
BD-REVUE

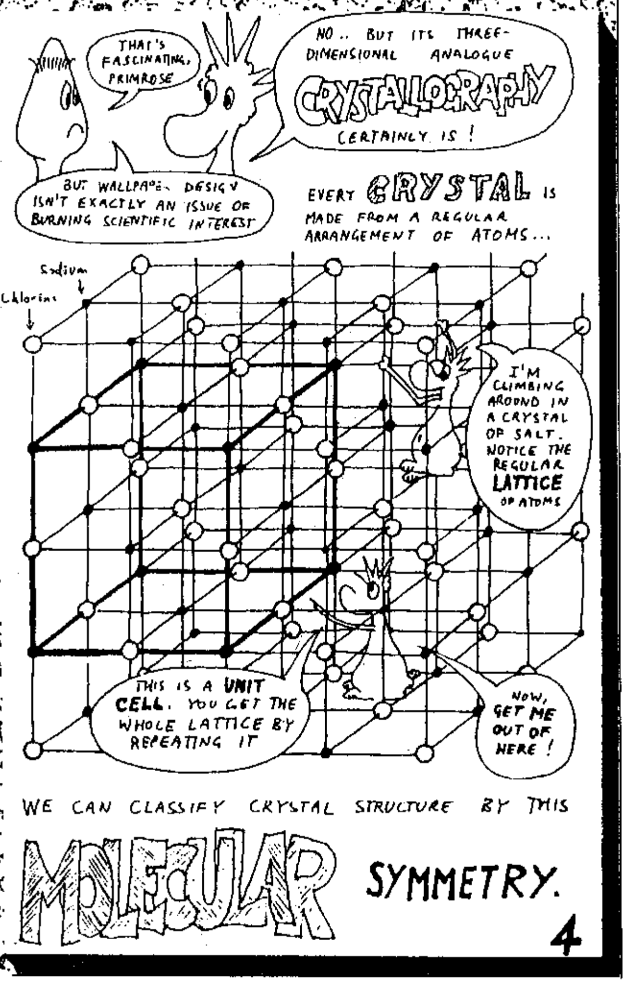
LES BD DE BELIN

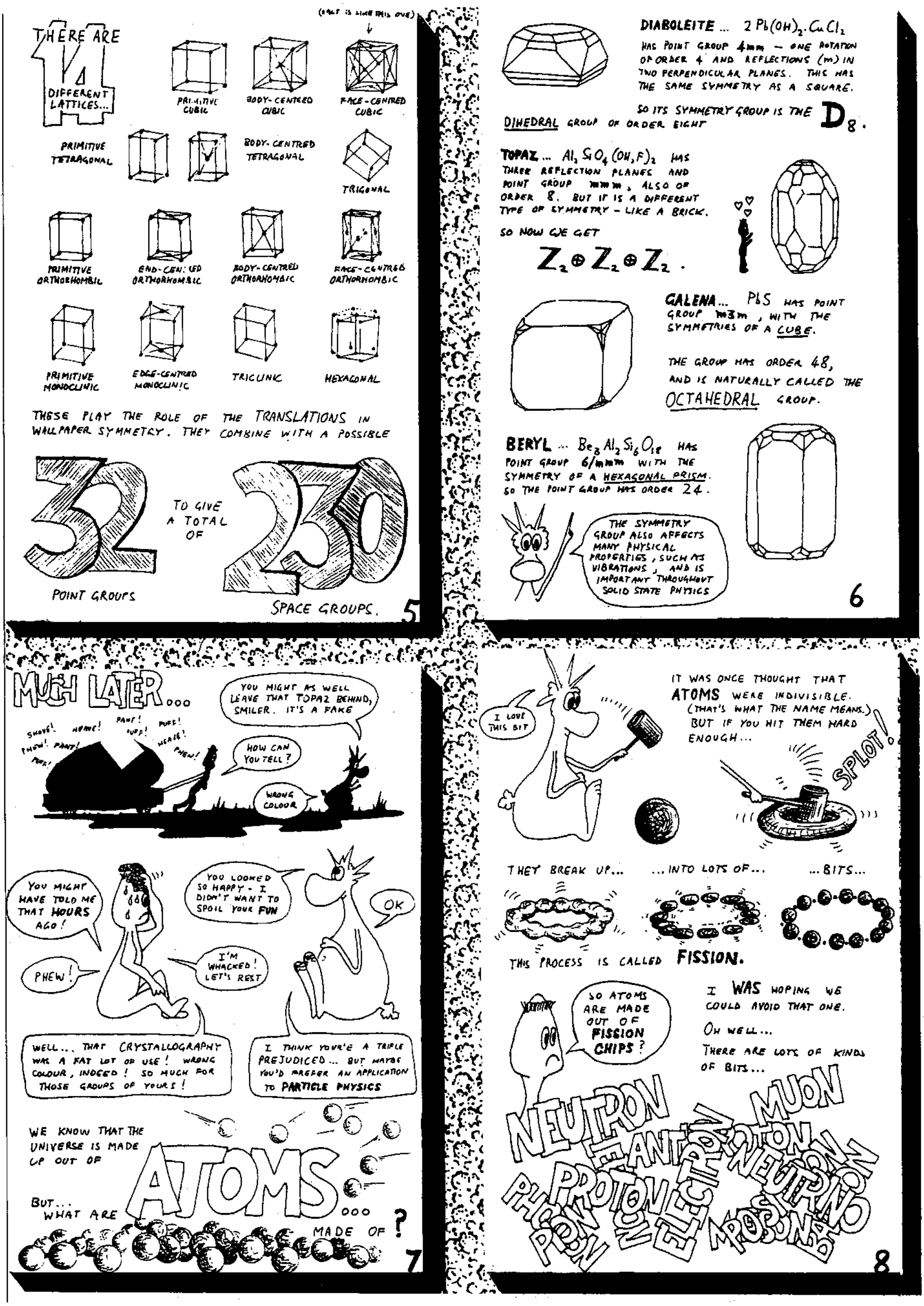
Comme vous pouvez le voir depuis quelques numéros, la BD et les maths font plus que bon ménage. L'une épaule l'autre et vice et versa. Ainsi en est-il du thème symétrie.
Deux Bandes Dessinées de chez Belin illustrent bien ce fait :
— **Géométricon, de Jean-Pierre Petit** où vous pourrez vous initier aux pavages de la sphère, sujet que nous traiterons, pour la classe, dans un de nos prochains numéros,
— **Ah ! les beaux groupes, de Ian Stewart**, où mademoiselle Primrose polymath illustre les problèmes des groupes finis.
En supplément, nous vous offrons une de ses dernières chroniques, extraite d'une revue sur les recherches mathématiques qui mérite d'être connue de tout enseignant et qui permet de parfaire son anglais : the mathematical intelligencer. Vol. 9. n° 3. 1987.


I'VE SEEN A LOT ABOUT GROUP THEORY ARE THERE ANY GROUP APPLICATIONS ?
WALLPAPER PATTERNS
EH? OH...
... I SUPPOSE YOU PASTE THE MULTIPLICATION TABLE ON THE WALL ?
NO, NO! YOU CAN CLASSIFY PATTERNS BY THEIR SYMMETRY
BY A WALLPAPER PATTERN WE MEAN A REPETITIVE PATTERN IN THE PLANE... SUCH AS:
ESCHER WOULDN'T BELIEVE THIS...
1


THIS HAS A NUMBER OF DIFFERENT TYPES OF SYMMETRY...
HORIZONTAL TRANSLATIONS
VERTICAL TRANSLATIONS
ROTATIONS
EACH TYPE OF WALLPAPER PATTERN HAS A DISTINCTIVE SYMMETRY GROUP. THIS ONE IS CALLED p2 IN THE NOTATION APPROVED BY THE INTERNATIONAL UNION OF CRYSTALLOGRAPHY.
THE WHOLE GROUP IS CALLED A SPACE GROUP. THE p SYMBOL MEANS IT CONTAINS TRANSLATIONS IN TWO DIRECTIONS (LOOKING LIKE TWO COPIES OF THE GROUP Z.)
THE 2 SHOWS THAT THE POINT GROUP (FIXING A POINT) HAS ORDER 2. IT IS GENERATED BY A ROTATION
USING GROUP THEORY, IT CAN BE SHOWN THAT THERE ARE EXACTLY
17
TYPES OF WALLPAPER PATTERN.
2


p1
p2
p11m
p1g
c11m
p2mm
p4gm
p4mm
p4
c2mm
p2gm
p2gg
p3
p31m
p3m1
p6
p6mm
HERE
IS A COMPLETE CATALOGUE OF THE SEVENTEEN PATTERNS, TOGETHER WITH THE STANDARD SYMBOLS FOR THEIR GROUPS.
GOSH
THANKS FOR THE EXPLANATION
THE SYMBOLS FOLLOW A SYSTEM TOO COMPLICATED TO EXPLAIN HERE. BUT, FOR EXAMPLE, m MEANS THERE IS A MIRROR LINE (A REFLECTION) IN THE GROUP, AND g REFERS TO A GLIDE REFLECTION
3

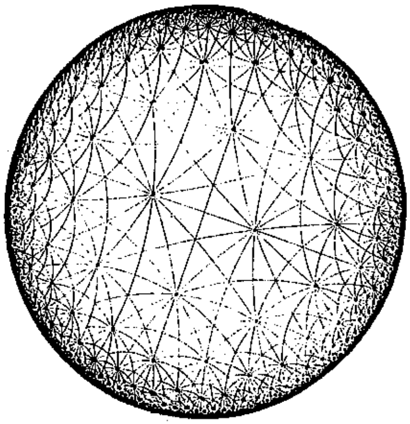

THAT'S FASCINATING, PRIMROSE
NO.. BUT ITS THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE CRYSTALLOGRAPHY CERTAINLY IS !
BUT WALLPAPER DESIGN ISN'T EXACTLY AN ISSUE OF BURNING SCIENTIFIC INTEREST
EVERY CRYSTAL IS MADE FROM A REGULAR ARRANGEMENT OF ATOMS...
Sodium
Chlorine
I'M CLIMBING AROUND IN A CRYSTAL OF SALT. NOTICE THE REGULAR LATTICE OF ATOMS
THIS IS A UNIT CELL. YOU GET THE WHOLE LATTICE BY REPEATING IT
NOW, GET ME OUT OF HERE !
WE CAN CLASSIFY CRYSTAL STRUCTURE BY THIS
MOLECULAR SYMMETRY.
4

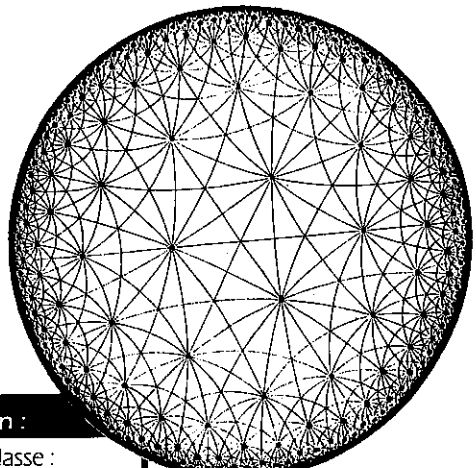


(FACT IS LIKE THIS ONE)
THERE ARE 14 DIFFERENT LATTICES...
PRIMITIVE CUBIC
BODY-CENTRED CUBIC
FACE-CENTRED CUBIC
PRIMITIVE TETRAGONAL
BODY-CENTRED TETRAGONAL
TRIGONAL
PRIMITIVE ORTHORHOMBIC
END-CENTRED ORTHORHOMBIC
BODY-CENTRED ORTHORHOMBIC
FACE-CENTRED ORTHORHOMBIC
PRIMITIVE MONOCLINIC
EDGE-CENTRED MONOCLINIC
TRICLINIC
HEXAGONAL
THESE PLAY THE ROLE OF THE TRANSLATIONS IN WALLPAPER SYMMETRY. THEY COMBINE WITH A POSSIBLE
32
POINT GROUPS
TO GIVE A TOTAL OF
230
SPACE GROUPS.
5
DIABOLEITE ... $2\,Pb(OH)_2.CuCl_2$
HAS POINT GROUP 4mm – ONE ROTATION OF ORDER 4 AND REFLECTIONS (m) IN TWO PERPENDICULAR PLANES. THIS HAS THE SAME SYMMETRY AS A SQUARE.
SO ITS SYMMETRY GROUP IS THE DIHEDRAL GROUP OF ORDER EIGHT $\mathbf{D}_8$.
TOPAZ ... $Al_2SiO_4(OH,F)_2$ HAS THREE REFLECTION PLANES AND POINT GROUP mmm, ALSO OF ORDER 8. BUT IT IS A DIFFERENT TYPE OF SYMMETRY – LIKE A BRICK.
SO NOW WE GET
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
GALENA ... PbS HAS POINT GROUP m3m, WITH THE SYMMETRIES OF A CUBE.
THE GROUP HAS ORDER 48, AND IS NATURALLY CALLED THE OCTAHEDRAL GROUP.
BERYL ... $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ HAS POINT GROUP 6/mmm WITH THE SYMMETRY OF A HEXAGONAL PRISM. SO THE POINT GROUP HAS ORDER 24.
THE SYMMETRY GROUP ALSO AFFECTS MANY PHYSICAL PROPERTIES, SUCH AS VIBRATIONS, AND IS IMPORTANT THROUGHOUT SOLID STATE PHYSICS
6
MUCH LATER...
SHOVE! HEAVE! PANT! PUFF! PUFF! PUFF! HEAVE! PHEW! PHEW! PANT! PUFF!
YOU MIGHT AS WELL LEAVE THAT TOPAZ BEHIND, SMILER. IT'S A FAKE
HOW CAN YOU TELL?
WRONG COLOUR
YOU MIGHT HAVE TOLD ME THAT HOURS AGO!
YOU LOOKED SO HAPPY - I DIDN'T WANT TO SPOIL YOUR FUN
OK
PHEW!
I'M WHACKED! LET'S REST
WELL... THAT CRYSTALLOGRAPHY WAS A FAT LOT OF USE! WRONG COLOUR, INDEED! SO MUCH FOR THOSE GROUPS OF YOURS!
I THINK YOU'RE A TRIFLE PREJUDICED ... BUT MAYBE YOU'D PREFER AN APPLICATION TO PARTICLE PHYSICS
WE KNOW THAT THE UNIVERSE IS MADE UP OUT OF
ATOMS...
BUT... WHAT ARE ATOMS MADE OF ?
7
I LOVE THIS BIT
IT WAS ONCE THOUGHT THAT ATOMS WERE INDIVISIBLE. (THAT'S WHAT THE NAME MEANS.) BUT IF YOU HIT THEM HARD ENOUGH...
SPLOT!
THEY BREAK UP... ...INTO LOTS OF... ...BITS...
THIS PROCESS IS CALLED FISSION.
SO ATOMS ARE MADE OUT OF FISSION CHIPS?
I WAS HOPING WE COULD AVOID THAT ONE.
OH WELL...
THERE ARE LOTS OF KINDS OF BITS...
NEUTRON
MUON
8

Alors qu'il n'existe que trois pavages réguliers du plan euclidien (en hexagones, en carrés, et en triangles équilatéraux), il existe une infinité de pavages réguliers du plan hyperbolique. Il n'est pas impensable qu'un artiste veuille utiliser ces trames hyperboliques, qu'un architecte donne le jour à de nouveaux lieux de vie dont les pièces auraient des distributions étonnantes, abritées par une voûte monumentale hyperbolique...
La discussion géométrique et topologique, qui n'est pas faite ici, de la mosaïque *Les parapluies de Vérone** serait voisine de celle faite par F. Klein de sa fameuse *Hauptfigur* de 1879. La coloration de cette mosaïque est soumise à deux sortes de contraintes.

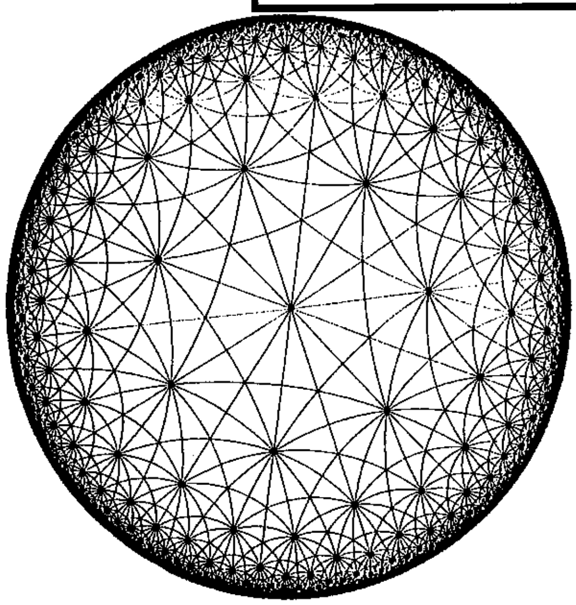
D'abord la coloration est *symétrique*: deux observateurs lilliputiens, placés chacun au centre d'un pavé, voient le même paysage, à ceci près que, pour passer de la description de l'un à celle de l'autre, il faut un dictionnaire de correspondance des couleurs. Ensuite la coloration est *répétitive*: on peut dire qu'il s'agit d'un véritable papier peint hyperbolique. Chacun a pu connaître le vacillement du regard qui cherche à fixer le motif d'un papier à fleurs. En mathématique, c'est l'austère, et puissant, langage des *groupes* qui rend bien compte de ce genre de symétries et répétitions, et plus généralement nourrit les discussions sur ces choses qui, tout en étant différentes, sont du pareil au même.

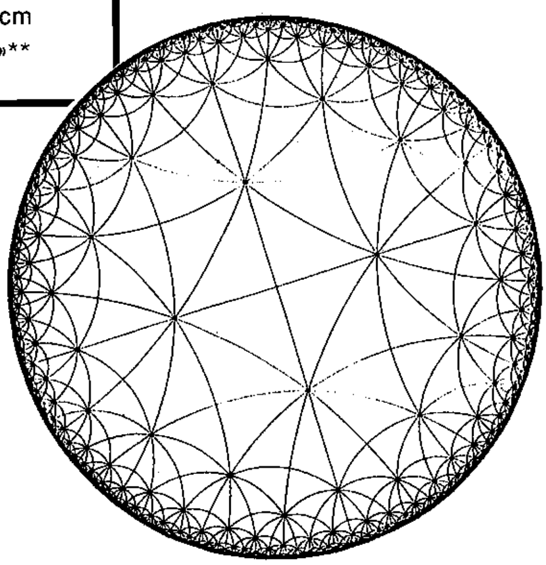




Pour aller plus loin :

- in le dossier PLOT pour la classe : comment colorier un pavage hyperbolique
- en affiches à colorier 40 × 60 cm
- in «Mosaïques Mathématiques»** géométrie hyperbolique B. Ycart.





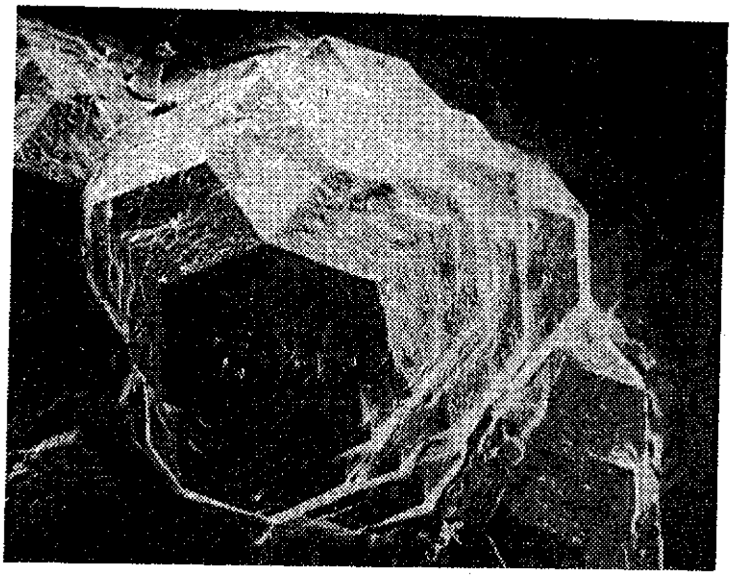
*Cf. quatrième de couverture.
**Cf. bon de commande.

L'INTERDIT DU PENTAGONE

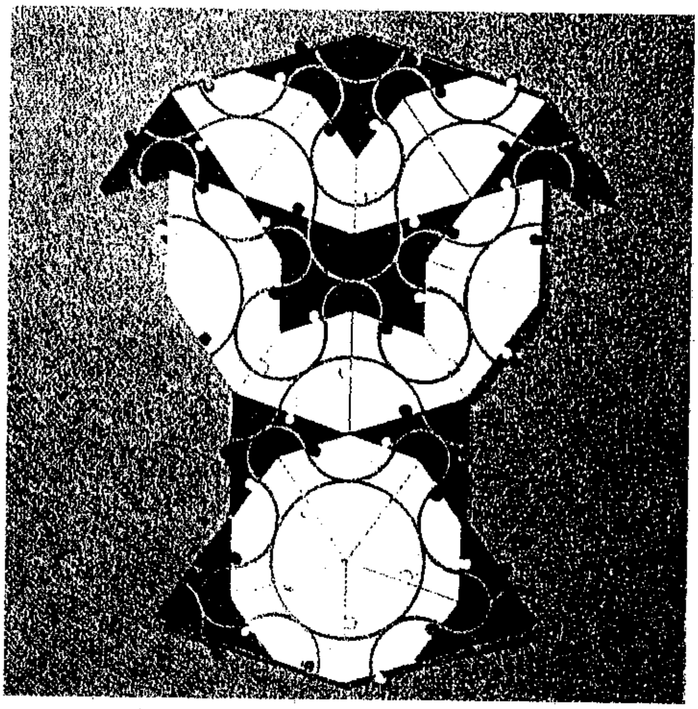
A-NONYME - Orléans

En cinq ans, les scientifiques ont fabriqué et expliqué la structure d'un nouveau cristal qui n'existe pas dans la nature, un «mouton à cinq pattes» dont les symétries locales sont d'ordre cinq !

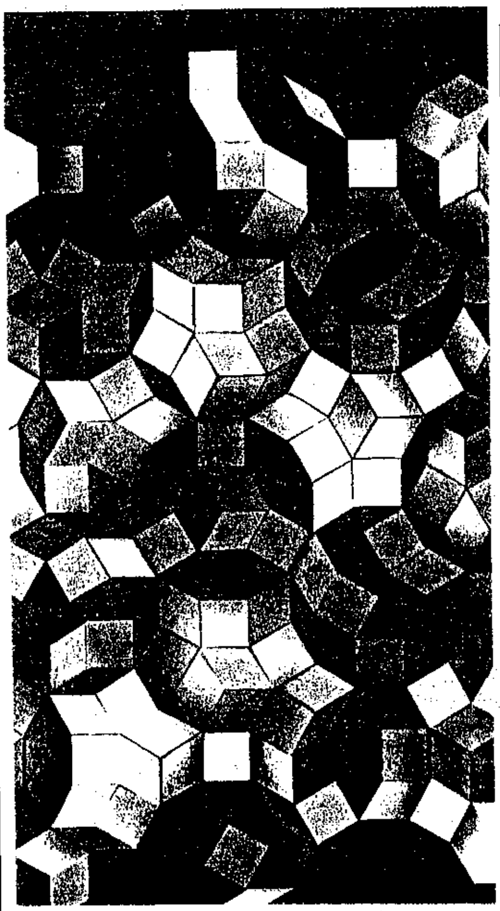
1983 deux physiciens, Dany Schechtman et Illian Blech étudient de nouveaux alliages rapidement solidifiés: Aluminium et Manganèse, Titane et Nickel,... Les images de diffraction électronique font ressortir des symétries dans l'espace d'ordre 5 ! Tous les lecteurs du PLOT et du dossier «**polyèdres dans l'espace**» savent que Fédorov a montré qu'il n'y avait que 5 polyèdres pavant l'espace et qu'il n'existe pas de pavage de l'espace faisant apparaître des symétries d'ordre 5. Comme Schechtman et Blech, on pourrait croire dans un premier temps à une erreur. Il n'est est rien. Les travaux des physiciens et cristallographes ont montré que ce quasi-cristal est bien d'ordre 5.
Il correspond, en fait, à des pavages non périodiques de l'espace réalisés à l'aide de polyèdres rhombiques que vous pouvez facilement réaliser avec le matériel Plot «**Polyèdres n° 2**» : en particulier le tricontaèdre rhombique et les deux hexaèdres (6 faces) rhombiques que l'on peut réaliser avec les mêmes pièces. Reste à expliquer la structure. Ce sont les mathématiciens qui fournissent le point de départ dans les années 70 en recherchant dans le plan des pièces polygonales qui réalisent des pavages non périodiques (cf l'article de Jean Lefort dans ce même numéro du Plot). Des pièces à 11, 9 puis 7 côtés sont trouvées qui répondent au problème, mais c'est Roger Penrose qui popularise en 1970 ce type de pavage avec ses deux quadrilatères, «darts and kites», basés sur le pentagone régulier, et qui réalise un pavage non régulier du plan. Ce sont les mathématiciens Michel Duneau et André Katz de l'école polytechnique qui modèlisent la structure de ces quasi-cristaux comme projection, en dimension 3, d'une «tranche» d'un réseau périodique de dimension supérieure (ici 6). Si la tranche est rationnelle la structure est périodique, sinon elle est non périodique.



Le monde 8-11-86.

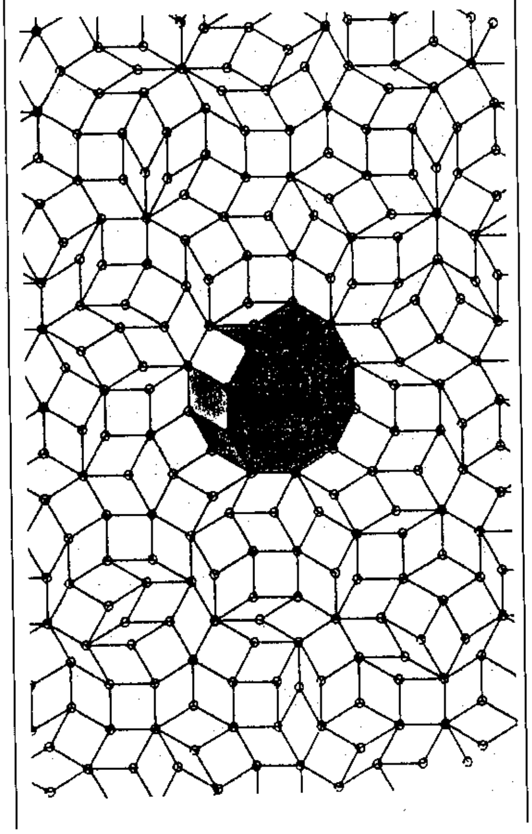


Laissons conclure Denis Gratias du centre de recherche de chimie métallurgique du CNRS : «On peut ainsi construire une série convergente de structures périodiques de mailles de taille croissante et dont la limite est un quasi-cristal, exactement comme un nombre irrationnel est la limite d'une suite de rationnels. Tout quasi-cristal peut être décrit de façon approchée par un cristal —de même que tout irrationnel l'est par un rationnel— mais seul le quasi-cristal peut présenter une exacte symétrie d'ordre non cristallographique». (cf biblio). Cette histoire est exemplaire de l'évolution des recherches mathématiques : un phénomène purement mathématique, presque marginal, comme ont pu l'être les pavages non périodiques, trouve ainsi un terrain privilégié d'application et, de plus, un support concret de communication vers le grand public comme l'illustrent la photo d'un pur quasi-cristal, publiée par le journal **Le Monde** le 8 novembre 86 et la bibliographie qui suit.



Bibliographie :

- **Paver l'espace : un jeu mathématique pour physicien.** A. Katz et M. Duneau. In La recherche, 1985, n° 167, p. 816-819.
- **Le cristal monstrueux.** Sven Ortoli. In Sciences et Vie, 1985, n° 818, p. 32-38.
- **Cristal qui songe.** Stephane Deligeorges. In Sciences et Avenir, 1985, n° 458, p. 24-29. (on y trouve les photos des polyèdres pavant non périodiquement).
- **Quasi periodic pattems and icosahedral symmetry.** A. Katz and M. Duneau. In Journal de physique, 1986, vol 47, p. 181-196.
- **Quasicrystals.** P. J Steinhardt. In American scientist, 1986, vol. 74, p. 586-597.
- **Les quasi-cristaux tiennent leurs promesses.** Daniel Tarnowski in La Recherche, 1986, n° 174, p. 262-264.
- **Les quasi-cristaux.** Denis Gratias. In La Recherche, 1986, n° 178, p. 788-798.
- **Les quasi-cristaux.** David Nelson, in Pour La Science, 1986, vol. 108, p. 82-92.
- **Classification des systèmes quasi cristallins de type icosaèdrique.** Pierre Cartier, in C.R. Académie des Sciences, Paris, t 304, série II, n° 14, 1987.
- **Les plus simples des quasi-cristaux.** Ke Xin Kuo, in La Recherche, 1987, n° 193, p. 1406-1408
- **Contes de cristaux et de quasi-cristaux.** Remy Mosseri, in Sciences et Vie, 1987, n° 161, p. 26-37.
- **Les nouvelles phases quasicristallines.** Denis Gratias, in le courrier du CNRS, supplément au n° 66 : images des matériaux, 1987.



Exposition

Cité des Sciences et de l'Industrie-La Villette :

- **Les quasi-cristaux.** Salles Actualités, 1987 avec films et interviews.
- **Exposition «Horizons mathématiques» :** les pavages non périodiques.

Matériel à pavages :

cf. Plot dossier et matériels polyèdres.

A-PLOT-STROPHE

Quand j'entends le mot «Symétrie orthogonale», j'en suis tout retourné !

Au moment de la mise en place des nouveaux programmes de 6eme, la symétrie orthogonale semble avoir été l'objet d'une attention particulière (pourquoi ?) : le nombre important d'articles et publications qui lui ont été consacrés laissait espérer des réponses quant à mes interrogations sur ces fameuses «activités géométriques».
C'est pourquoi, poussé par la curiosité et l'envie de faire une belle prestation à Aplostrophe, plein d'une ardeur un peu folle je me suis livré, un beau matin, à une consultation systématique de tout ce qui était à vocation symétrique (orthogonale) en me limitant toutefois aux ressources de la bibliothèque de l'IREM d'Orléans.
Voilà ce que j'ai trouvé :

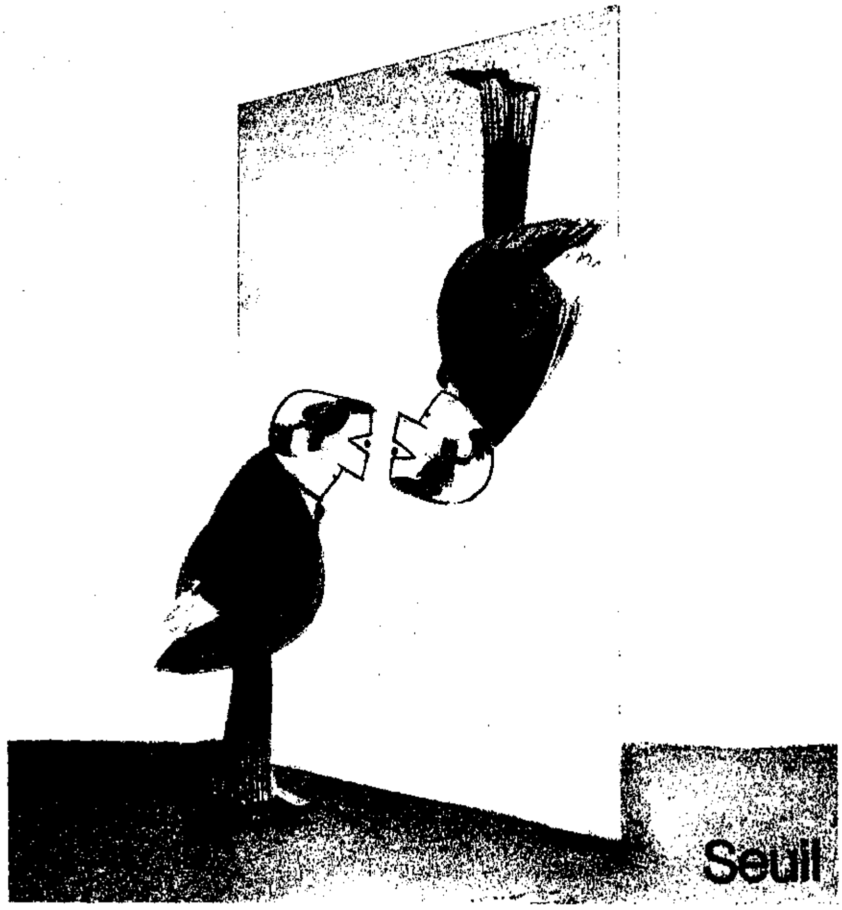
1. Suivi scientifique des nouveaux programmes de sixième :
Symétries orthogonales : IREM de Picardie, d'Orléans, de Poitiers, de Nantes, de Bourgogne, de Clermond-Ferrand, bulletin inter-IREM 1er cycle.

2. Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane G. Audibert -Publication de l'APMEP.

3. Thèse Elisabeth Gallou - Domiel -Thèse 3eme cycle. Symétrie orthogonale et angle. Grenoble 1985.

L'univers ambidextre

Les miroirs de l'espace-temps



QUELQUES JOURS PLUS TARD...

Pour tout ce qui est du suivi scientifique :

Grande richesse, interrogations, une étude didactique qui reste à faire.
Après ces consultations, un étrange sentiment m'envahit, mêlé d'enthousiasme pour toute cette «matière première» et de déception : Comment utiliser cela ? Quels apports réels pour la classe y trouve-t-on ?
Trop souvent une description de la démarche complétée des réactions des élèves se substituent à une réelle analyse a priori de la leçon (sauf Poitiers qui fait une étude préalable des difficultés) et à une étude des comportements des élèves.
Les objectifs sont insuffisamment explicités, les différentes démarches possibles et les critères de choix de l'une d'entre elles sont peu développés et les conclusions sont souvent inexistantes (les travaux de Dijon, parmi les mieux définis, m'apparaissent plus clairement).
Cette récolte de faits de classe que je juge un peu sévèrement «d'anecdotiques» ne permet pas de dégager des **invariants** propres à la symétrie orthogonale, contrairement à l'étude de G. Audibert.

Sauf, peut-être pour Poitiers, Dijon et Besançon, l'apport de la didactique des mathématiques n'apparaît pas clairement ; les situations ne sont pas toujours innovantes : pliages, observations, reproductions, constructions de figures conduisent souvent à une activité des élèves et à une énonciation de remarques mais aucun enjeu n'apparaît pour cette action ou cette formulation (il est rarement envisagé de validation). On est donc loin des situations problèmes qui conduisent à des situations fondamentales où la connaissance visée apparaît comme la stratégie optimale de résolution du problème (cf G. Brousseau. Revue didactique des mathématiques 7.2. 1986. La pensée sauvage éd.).
La contribution de Gallou sur le rôle déterminant de la symétrie orthogonale comme anti-déplacement n'a pas été prise en compte nettement pour créer des situations. On peut aussi noter l'absence de toute étude historique et épistémologique de la notion de symétrie orthogonale.
Ces critiques n'ont pas pour but de remettre en cause l'importance et la nécessité de tels travaux, mais plutôt de favoriser des interrogations sur la forme à donner à leurs communications et sur ce qu'il faut communiquer :
*des supports matériels (logotype de Poitiers ; petit logiciel ; films (effet-Miroir) ; figures; textes d'exercices...) suffisamment riches et souples pour que les enseignants puissent facilement construire leurs propres leçons...
**presque à l'opposé, des études didactiques fines qui permettent de mieux comprendre le rôle des variables didactiques dans l'introduction et le fonctionnement de la notion et les réactions des élèves —et du professeur— face à la notion.

SYMETRIE TOTALEMENT ABSENTE

26

Ebauche de la SYMETRIE

9

AUTRES NOTIONS de la symétrie

3

SYMETRIE-TECHNIQUE

17

RETOURNEMENT

17

Symétrie-technique et retournement

1

CONCEPT DE SYMETRIE

1

L'effort de synthèse du Bulletin Inter IREM s'est surtout fait à partir des travaux de Poitiers et Dijon, qui me sont aussi apparus comme les plus structurés. Je noterai également les travaux de Besançon qui intègrent la symétrie orthogonale dans une démarche géométrique plus globale complétée d'une réflexion sur l'évaluation. La personnalité d'A. Bodin joue sans doute beaucoup dans l'intérêt de ce qui reste pour l'instant un simple document de travail.
L'étude didactique de la symétrie orthogonale reste donc à faire pour que le suivi soit réellement scientifique. Les ressources ne manquent pas pour ce beau sujet disponible.
Son auteur —vraisemblablement lecteur assidu du PLOT— aura droit à un Aplotstrophe spécial tout aussi emphatique que dithyrambique.

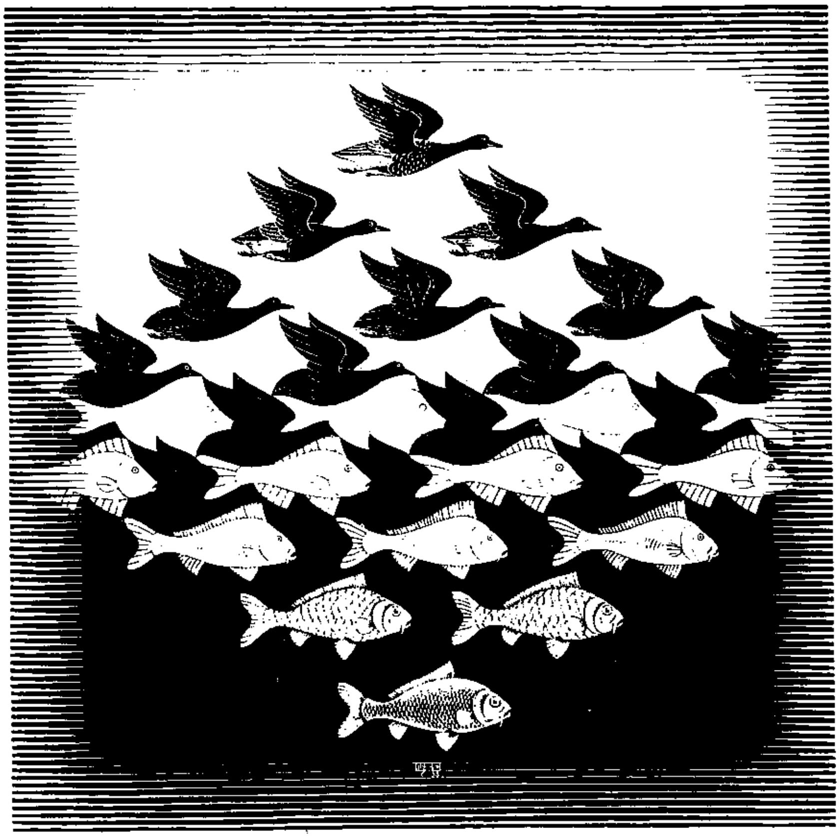
J.M.C

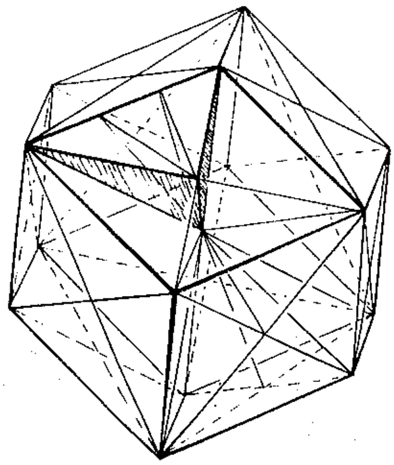
SYMÉTRIE ET ACTUALITÉ

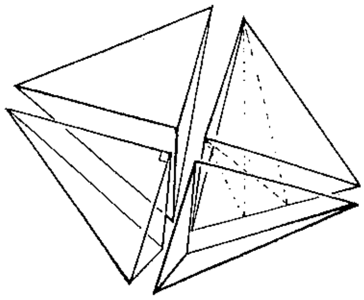
De nombreux livres existent sur l'œuvre d'Escher, citons le tout dernier :

M.C. Escher : Art and Science.
Edited by H.S. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose and M.I. Teuber. North-Holland ed. 1987, 200 pages.
Au sommaire anglais (avant traduction) :
Escher and symetry
Escher, mathematics and visual perception
Escher and geometry
Escher, cinema and computer graphics
Escher and the physical world
Escher and art
Escher and the humanities.

En dehors d'Escher, d'autres livres sur le sujet :
— Chez Birkhäuser Verlag, une nouvelle série :
Design Science Collection avec deux premiers titres :
A. Fuller Explanation. Amy Edmondson. 1986, 328 pages.
Shaping Space. Marjorie Senechal, George Fleck. 1987, 300 pages.
Parmi les ouvrages classiques, mais non nécessairement mathématiques, citons aussi :
L'univers ambidextre. Martin Gardner. Seuil. 1985.
Les cohérences aventureuses (les dissymétries). Roger Caillois. Gallimard. Col. idées. 1976.
Éloge du gaucher dans un monde manchot. J.P. Dubois. Laffont. 1986.
Quark, antiquark ! Un article sur la supersymétrie en physique dans «La Recherche» n° 197 de mars 1988.







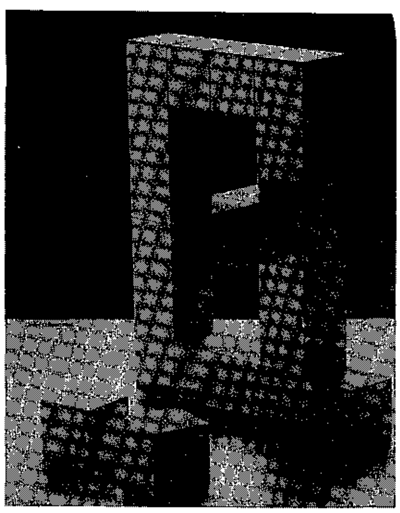
MÉDIA-PLOT-STROPHE

Une nouvelle rubrique sur les productions multimédia encore trop souvent oubliées. Nous essaierons aussi d'en faire une rubrique culturelle sur les mathématiques.

Ciné-math :
SYMÉTRIE. Film vidéo 3/4 pouce, Pal ou Secam. Durée 9 min.
Réalisation : Michel Treguer. 1986
Production : INA/Cité des Sciences et de l'industrie de la Villette.
La symétrie, «expression de beauté», selon Herman Weyl, joue un rôle crucial en mathématiques, sous la forme de la théorie des groupes, mais aussi dans la physique moderne.
La figure d'Evariste Galois est évoquée ainsi que les découvertes récentes de non conservation de la parité et la place de la dissymétrie dans les phénomènes du vivant.

SYMÉTRIE ET MOSAIQUES. Vidéo 3/4 pouce. 26 min.
Réalisation : Michele Emmer. 1984.
Production : Film 7 (visa Flaminia km 11500-000187. Roma)
La symétrie, apparaît dans les œuvres d'art, dans la nature (exemple des virus), dans les mosaïques de l'Alhambra,...

M. C. ESCHER : LA SYMÉTRIE ET L'ESPACE. Vidéo 3/4p. 26 min.
Réalisation : Michele Emmer. 1984. Production : film 7
Première partie d'un film sur l'œuvre graphique de Maurits Cornelis Escher.
Le film utilise effets spéciaux et dessins animés pour mettre en évidence la dynamique des compositions de l'artiste néerlandais.



M. C. ESCHER : GÉOMÉTRIE ET MONDES IMPOSSIBLES. Vidéo 3/4p. 27 min.
Réalisation : Michele Emmer. 1984. Production : Film 7
Le célèbre mathématicien Coxeter montre des solides qui «pavent» l'espace.
Roger Penrose, de l'Université d'Oxford, explique l'invention des figures impossibles, faites avec son père, qui était biologiste. Enfin, Coxeter expose des modèles de géométrie non-euclidiennes utilisés par Escher.
Tous ces films peuvent être consultés à la médiathèque de la Cité des Sciences de la Villette.

Vidéo-math :
OBJECTIF GÉOMÉTRIE : un vidéodisque du CNDP dont on reparlera dans un des 3 prochains PLOT.

Diaporama :
LOGOTYPES ET SYMÉTRIES : 20 diapositives de l'Irem de Poitiers (1985) (Cf. bon de commande).
PAVAGES ET SYMÉTRIES : frises et pavages architecturaux (Crdp Poitiers)

Expositions :
Expositions **permanentes** de la Cité des Sciences et de l'Industrie de La Villette :
- pavages plans et sphériques,
  groupes de symétrie du cube
  dans l'espace «Mathématiques et Univers».
- Kaléïdoscopes
  dans l'espace «la lumière démasquée»
- logiciel de pavages à l'Inventorium.

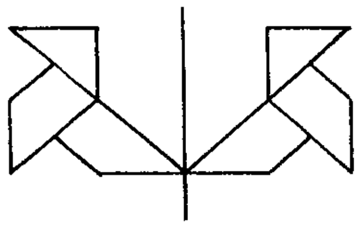
Expositions **temporaires :**
«images calculées» programmée fin 88,
«symétrie» programmée pour 1989.
Expositions **itinérantes :**
«Horizons Mathématiques» : pavages et kaléïdoscopes, espaces et pavages.
«Les quasi-cristaux» (7 panneaux, matériels à pavages et vidéo)
«Arts et mathématiques» (12 panneaux, éléments interactifs et vidéo)
Exposition itinérante du Centre Culturel Scientifique et Technique de Lille (ALIAS) :
«valise exploration symétrie»

AU RYTHME DES ALGORITHMES

Il ne s'agit pas d'aborder pour cette séquence quelques grands principes algorithmiques mais plutôt de s'interroger sur l'emploi en classe de l'ordinateur.

DEUX DÉMARCHES SONT POSSIBLES, ELLES NE SONT PAS CONTRADICTOIRES MAIS RÉCIPROQUES.

1. On a un logiciel tout fait, qu'en faire ? le déjà vieux logiciel «cocotte», souple, fiable, très facile d'accès pour les élèves de tous niveaux permet d'obtenir l'image d'une cocotte par symétrie axiale.



SYMÉTRIE AXIALES
Utilisation du logiciel «Cocotte»

OBJECTIFS : composition de symétries axiales ; situation d'action : manipulations et observations ; formalisation et validation des propriétés.
DURÉE : 55 min.
DÉROULEMENT DE LA CLASSE : groupes de deux élèves sur ordinateur ; utilisation des séquences 1-2-3- comme l'indique la fiche de travail ; rédaction d'une fiche réponse qui sera reprise en classe pour une institutionnalisation
CONSIGNE : vous utiliserez le logiciel «cocotte» pour répondre aux questions de la fiche. Deux défis sont posés, l'un consiste à énoncer le plus de propriétés observées dans la séquence 1 (vous pouvez l'appeler plusieurs fois), l'autre à trouver le plus de transformations correctes faisant passer de la cocotte rouge à la cocotte bleue.
PREREQUIS : symétrie axiale si renforcement de la notion ; aucun si découverte de la transformation à travers ses effets.
ATTENTES : anticipation des résultats ; caractère involutif des symétries ; non commutativité de la composition ; loi de composition externe.

Voici un exemple de situation s'appuyant sur ce logiciel et qui peut se poursuivre par une reprise «papier crayon» de la composition de deux symétries d'axes parallèles ou perpendiculaires et par une formulation des résultats.

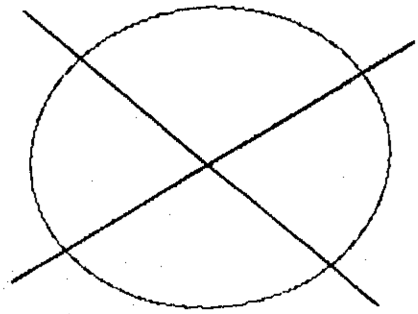
2. On a un projet de leçon, le professeur réalise quelques petits programmes pour créer une situation d'action. **Observation - énoncé de conjecture :** symétries autour de deux axes quelconques. Cette continuation de la démarche précédente nécessite une validation par un discours de preuve qui doit conduire à une démonstration formalisée par la suite (cf Balacheff preuve et démonstration au collège RDM 3.3 1982 la pensée sauvage éd).

SYMÉTRIES AUTOUR DE DEUX AXES
BUT DU TRAVAIL

1. Observer la construction des points symétriques autour de deux droites :
— L'un apparaît en rouge autour de la droite rouge
— L'autre apparaît en vert autour de la droite verte.

2. **Décrire** en quelques lignes les idées que vous suggèrent vos observations (on dit les CONJECTURES)
Pour cela faire plusieurs exemples en variant les coordonnées du point du départ : (150 ; 0) ; (30 ;0) etc...
NB : En cas d'erreur de manipulation ou de blocage, relancer la procédure DEP.

3. **Travail en Classe** PREUVE DE LA CONJECTURE.



CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Il s'agit de faire construire à l'écran avec LOGO, puis dans un deuxième temps à la règle et au compas, des figures symétriques de figures données conduisant à la mise en évidence de la symétrie comme **anti-déplacement** (on fait référence aux travaux de E. Gallou-Domiel (cf. A-plot-strophe) à qui on a emprunté les figures tests).
La procédure RETOURNE FIGURE n'est pas donnée aux élèves au départ, on attend pour signaler son existence qu'ils formulent le blocage et son remède.

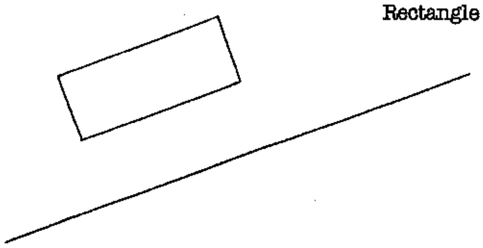
SYMÉTRIES CONSTRUCTION DE FIGURES

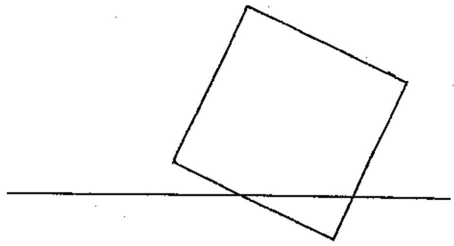
En appelant EX1 ou EX2 ou EX3 ou EX4 vous verrez apparaître **un axe** une **figure**, quelques renseignements numériques (côtés ; distance tortue/axe)

BUT DU TRAVAIL : Construire le symétrique de la figure autour de l'axe. Noter vos observations pour un compte-rendu.

Vous pouvez : construire des petites procédures : CARRÉ, TRIANGLE, DEP (pour un déplacement particulier)
Pour gagner du temps : la procédure FIGURE fabrique directement la figure de EX4.
Pour obtenir les procédures LOGO utilisées sur nano-réseau, écrire au journal avec une enveloppe timbrée pour la réponse.

Rectangle

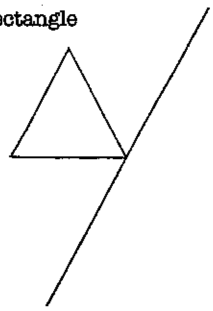


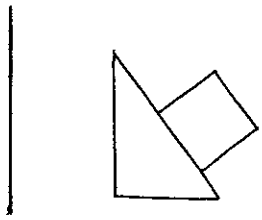


Sym. 1

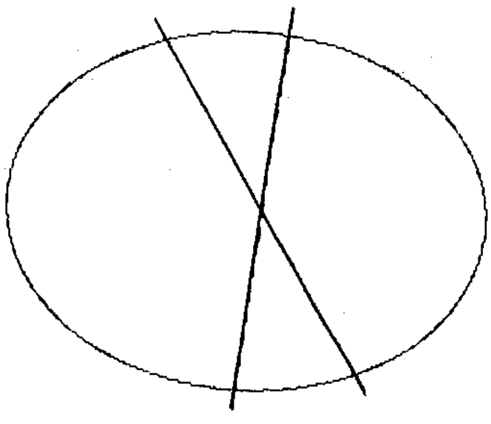
Carré

Triangle Rectangle





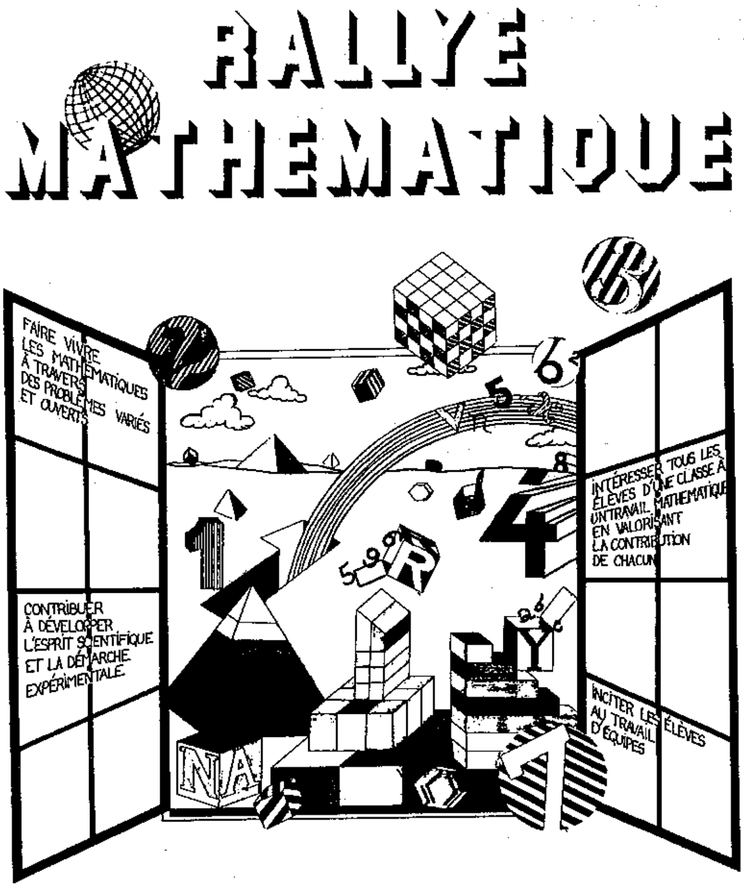
Carré et Triangle Rectangle



Symétrie ou Fin (S ou F)

RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE 1988

Épreuves d'entraînement



Épreuves préparatoires proposées fin 87 pour «échauffer» les classes de troisième et seconde aux épreuves qui ont lieu en mars 88.

EN GUISE D'APÉRITIF

Quel est le nombre minimum de coupes (section selon un plan) nécessaires pour débiter un cube de fromage en 27 petits cubes exactement.

N.B. : Plusieurs morceaux déjà découpés peuvent être assemblés pour être coupés d'un coup.

CARNET DE BAL

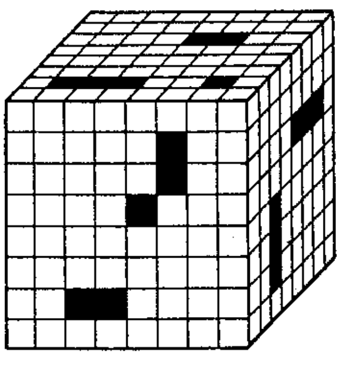
42 personnes (hommes et femmes) ont participé à un bal. Au cours de la soirée : une femme a dansé avec 7 hommes, une deuxième femme avec 8 hommes, une troisième femme avec 9 hommes et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui a dansé avec tous les hommes présents.

Combien de femmes y avait-il à ce bal ?

LE CUBE TRUFFE

Dans ce grand cube toutes les rangées dont les extrémités sont noircies sont constituées de petits cubes noirs, les autres étant blancs.

1. Combien y a-t-il de petits cubes blancs ?
2. On enlève une couche de petits cubes sur chacune des six faces du grand cube. Faire le dessin du nouveau cube.



QUELLE DIFFÉRENCE !

La différence des carrés de deux entiers naturels est 91. Quels sont ces entiers ?

PAS DE PANIQUE !

Un incendie a consumé les livres de comptabilité d'un commerçant qui ne trouve, pour reconstituer le compte de son principal débiteur, qu'une feuille à demi-brûlée avec les indications suivantes : 237 objets à .1.,... F
total : 7... 0,65 F.
Les dégâts ne sont pas irréparables. Constatez-le vous-même en retrouvant les chiffres manquants remplacés par des points.

LE PRODUIT MYSTÉRIEUX

Dans un triangle divisé en 9 cases, on a placé les nombres de 1 à 9 puis effectué les 6 produits, comme indiqué sur la figure 1 :

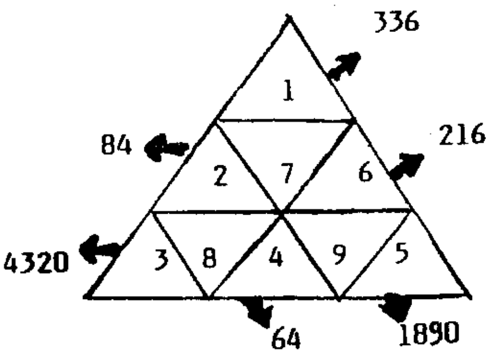


Fig. 1

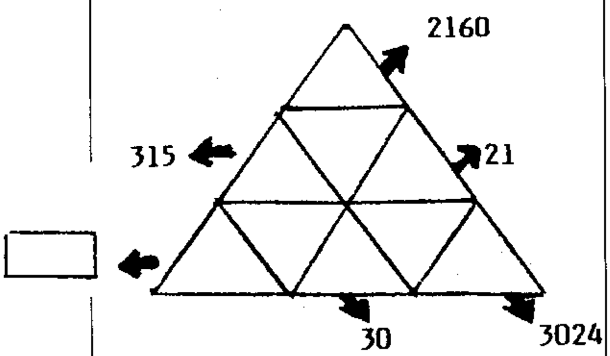


Fig. 2

Dans un deuxième triangle (figure 2), seuls 5 des produits sont indiqués.
Quels nombres pouvez-vous choisir pour le 6e produit ?

LES ROUES TOURNENT

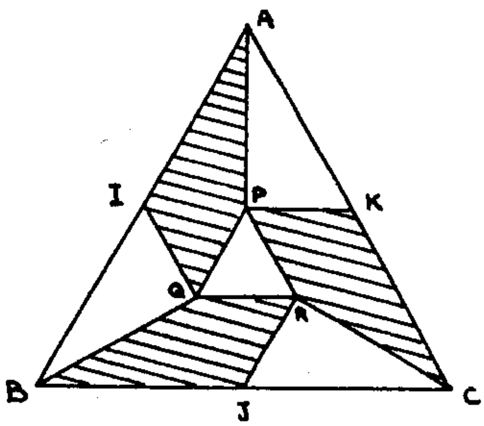
La roue avant d'une bicyclette a 60 cm de diamètre alors que sa roue arrière a 70 cm de diamètre.
Quelle est la distance parcourue par cette bicyclette sachant que la roue avant a fait 70 tours de plus que la roue arrière ?

CASER VOTRE CERCLE

Représenter un échiquier (8 × 8 cases noires et blanches de 2 cm de côté).
Tracer un cercle, le plus grand possible, sur cet échiquier, ne traversant aucune case noire.
Justifier sa détermination.

TRIANGLE EN MORCEAUX

ABC est un triangle équilatéral et I, J, K sont les milieux de ses côtés. P, Q, R sont les milieux des côtés du triangle IJK.

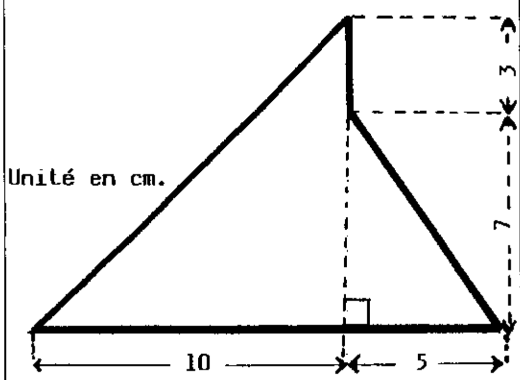


Évaluer le rapport de l'aire du domaine hachuré à l'aire du triangle ABC.

QUEL MENTEUR !

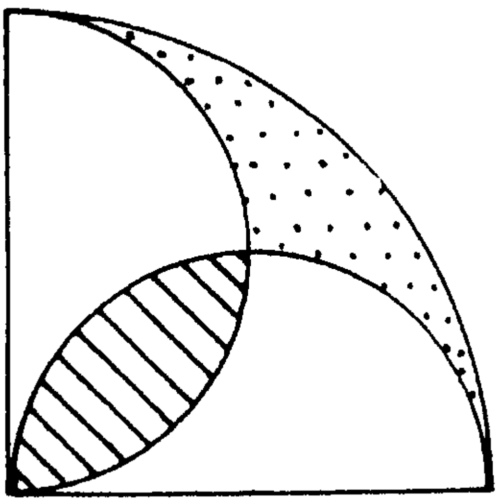
Quatre amis visitent un musée avec seulement 3 billets d'entrée. Ils rencontrent un gardien qui veut savoir quel est celui qui n'a pas payé son entrée.
— «Ce n'est pas moi» dit Paul ;
— «C'est Jean» dit Jacques ;
— «C'est Pierre» dit Jean
— «Jacques a tort» dit Pierre
Sachant qu'un seul d'entre eux ment, quel est le resquilleur ?

LE CARRELAGE INFERNAL



On veut carreler le dos de la feuille-réponse avec des «carreaux» ayant la forme et les dimensions indiquées sur le schéma.
Pour cela : découper dans des feuilles blanches autant de carreaux que nécessaire.
En colorier un sur deux d'une couleur, les autres d'une autre couleur.
Les disposer bord à bord en alternant les couleurs, sans trou ni recouvrement, puis les coller.
Découper ensuite ce qui déborde de la feuille.

QUART-DE-ROND



Comparer l'aire du domaine hachuré et l'aire du domaine moucheté.

Les trois exercices suivants s'adressent uniquement aux classes de seconde.

PAUL OU VIRGINIE ?

Une distance de 2 km sépare Paul et Virginie qui marchent l'un vers l'autre à la vitesse de 3 km/h. Leur chien Médor qui aime autant son maître que sa maîtresse court de l'un à l'autre à la vitesse de 8 km/h.
Quelle distance Médor aura-t-il parcourue lorsque Paul et Virginie se rencontreront ?

CADREZ VOS CERCLES

Construire trois cercles de même rayon R tangents deux à deux.
Construire ensuite les deux cercles tangents simultanément à chacun des trois cercles précédents. Justifier la détermination des centres.
Quelle valeur maximale peut-on donner à R de manière à ce que les 5 cercles demandés soient entièrement contenus dans la feuille.
Réaliser alors sur la feuille le dessin correspondant à cette valeur maximale de R.

GOUTTE A GOUTTE

Dans une grotte, d'une stalactite tombent des gouttes d'eau sur une stalagmite, très régulièrement, depuis des siècles, à la cadence de 3 gouttes d'eau par seconde. La stalactite et la stalagmite sont distantes de 14 mètres.
Une goutte d'eau, t secondes après s'être détachée, a chuté d'une hauteur égale à 4,9 t^2 (exprimée en mètres).
Un photographe réalise un instantané de toute la scène au moment où une goutte d'eau se détache de la stalactite.
1. Combien observe-t-on de gouttes d'eau sur la photo ?
2. Représenter ce que l'on voit sur cette photo, en précisant l'échelle utilisée.

Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1988

Avec réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom
ou établissement ______________________

Adresse complète ______________________

Code postal et ville ______________________

Pour les 4 numéros de :
1983 ☐ 1987 ☐
1984 ☐ 1988 ☐
1985 ☐ 1989 ☐
1986 ☐ 1990 ☐

Ecole élémentaire ☐ Collège ☐ Lycée ☐ Supérieur ☐ Autre ☐

payé par chèque ☐
désire facture ☐
nouvel abonné ☐

	Tarif normal et établissement	Membre Apmep	Supplément tarif avion
Pour un an	100 F	80 F	+ 40 F
Par année supplémentaire	+ 75 F	+ 60 F	+ 40 F

Total à payer ☐

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 88 -

Nom : ______________________

Adresse : ______________________

____

REDUCTIONS 10 % pour les abonnés au Plot
10 % pour plus de 500 F d'achat

Prix unitaire - Port compris

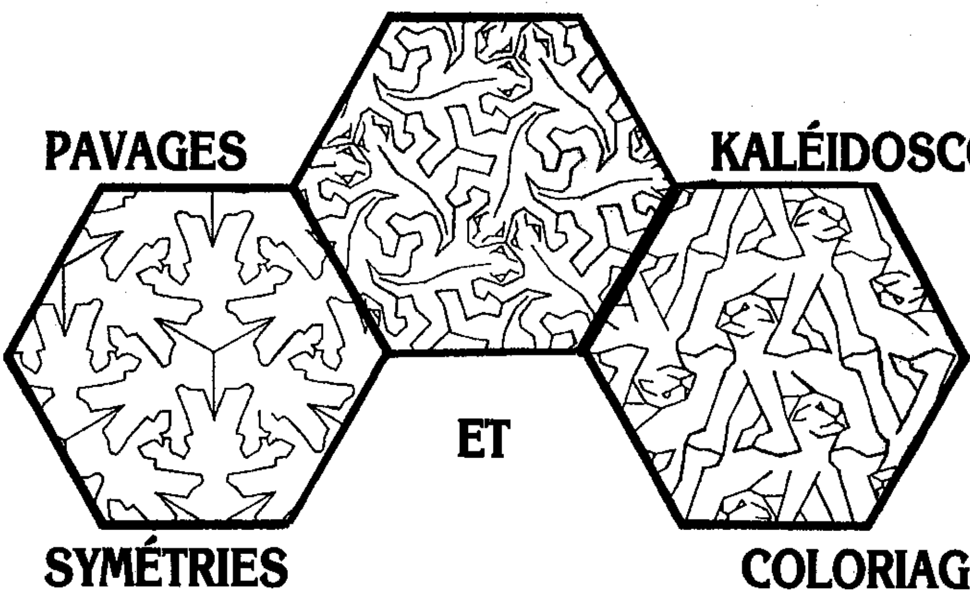
Prix	Article	Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40 F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique			
40 F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*			
40 F	Aléatoire			
40 F	Papiers accrochés			
40 F	Pliages et mathématiques			
40 F	Pavages et symétries			
80 F	Dossier "Spécial π" (300 p. Adcs)			
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)	n° 1	n° 2	
40 F		n° 3	n° 4	
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique			
10 F	Affiches pour la classe : «Horizons Mathématiques»		☐	
	60 × 40 cm «Polyèdres dans l'espace»		☐	
	«l'Univers mathématique»		☐	
	2 pavages hyperboliques à colorier.		☐	
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur - n^os 1 à 14	(n^os 4 et 5)	40 F	
80 F	Pochettes de diapositives - n^os 2 à 6 (n° 1 : 100 F)		n°	
	Frais d'envoi forfaitaire :		15 F	
			sous-total	
	— 10 % pour les abonnés au PLOT			
	— 10 % pour plus de 500 F d'achat			
			TOTAL à Payer	

* Plot n° 39 ☐ ou Géométrie dédéiste (Rouen) ☐

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

NOUVEAUTÉ

PAVAGES **KALÉIDOSCOPES**



SYMÉTRIES **COLORIAGES**

PLOT
MATÉRIEL
1988
100 pages