

MATHÉMATIQUE ET ENSEIGNEMENT

sommaire

Edito : **Hommage aux grands nombres** p. 2-3

Approximations géométriques
Steven Lay - Nctm p. 4

De Héron à Newton
Michel Clinard - Orléans p. 5-10

Irrationnelle, la diagonale ?
Michel Darche - Orléans p. 11-12

Approchez le nombre d'Or
J.-J. Parot - A. Cheikh - Nouakchott p. 13-16

Calculs approchés à la main
Cahiers de l'Abbaye de Boscodon p. 17-18

Flirt avec ma calculette
Yves Olivier - Blois p. 19-21

Grandeur et décadence du nombre μ
G. Charrière - Lausanne p. 22-24

Calculettes à l'élémentaire et en 6^e-5^e
Roger Crépin - Limoges p. 25-28

Un panoramique de tonton lulu : le nombre ζ p. 29-30

A-plot-strophe : Multiplan chez ϵ edic, Eckeland, Guilbault, Cauchy, Hardy et les autres dont un dossier - spécial approximation - : le «Spécial π » p. 31-32

Approximations et tableurs
Jean-Marie Chevallier - Orléans p. 33-36

Tableurs et grands nombres
Jacques Pinault - Dreux p. 37-38

Calculs des variations et brachystochrone p. 39-40

Rubrique «algorithmique» : **A bas l'itératif !!!** p. 41-42

Plot-méninges :
- Pour faire chercher les élèves, Serge Parpay - Niort
- Les vraies racines du trinôme, B. Revranche - Mandegault ... p. 43-45

Le nouveau tournoi du Limousin p. 46-47

Réabonnement et tarifs 88 p. 48

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction

Jacques Borowczyk, Daniel Boutté,
Gérard Chauvat, Michel Clinard,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
René Gauthier, Georges le Nezet,
Ginette Mison, Serge Parpay,
Raymond Torrent, Luce Dossat

Rédaction

Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes

Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité

Pascal Monsellier

Abonnements

PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement

100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition
et maquette**

Graphi'Style - Orléans

Photogravure et impression

Fabrègue-Imprimeur, Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans, Tours,
Nantes, Rennes, Rouen,
Brest, Caen et Clermont-Ferrand
avec le concours du
Ministère de la Coopération

Diffusion

Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).

PLOT
mathématiques
et
enseignement

NUMERO SPECIAL
 π

APMEP - UNIVERSITÉ
BOITE POSTALE N° 6759
45067 ORLÉANS CEDEX 2

Hommage aux grands nombres

Alors qu'un grand mathématicien soviétique, Andreï Kolmogorov, en disparaissant à 84 ans, nous rappelle le travail des mathématiciens pour approcher, par des modèles numériques, des phénomènes les plus divers, nous abordons dans ce numéro des problèmes beaucoup plus simples qui ont, malgré tout, besoin de tous nos soins. Alors que la calculatrice, l'ordinateur et les tableurs envahissent tous les métiers, il n'est pas encore trop tard pour insister sur les précautions à prendre avec ces «machines».

En effet, ces machines nous trompent !!!

Des rationnels qui refusent de s'afficher.

Déjà, avec des nombres aussi simples que les fractions égyptiennes comme $1/3$, $2/3$,... les problèmes apparaissent. Essayez avec votre calculette ou votre micro de savoir si le résultat affiché est le même que le résultat interne. La machine ne connaît que des représentations décimales limitées, donc en général approchées, des nombres.

Ces représentations approchées des nombres et des calculs deviennent encore plus dangereuses avec l'apparition des tableurs. En itérant rapidement les calculs, ils amplifient encore plus rapidement les approximations pour les transformer en erreurs. Des opérations aussi simples que des calculs de TVA deviennent des opérations à risques.

π , c'est pas 3-14 !!! et pourtant !

Les machines à calculer électroniques gromment quasi complètement les irrationnels. Savez-vous, par exemple, quel est le nombre qui est choisi par votre machine pour représenter π ? Ils sont tous transformés en décimaux et pourtant il y a «infiniment» plus d'irrationnels que de décimaux !

Pire encore, certains calculs peuvent donner des résultats étonnants.

Vous connaissez tous la superbe formule d'Euler liant les nombres π , e , i et -1 à savoir : $e^{\pi \sqrt{-1}} = -1$, mais savez-vous si $e^{\pi \sqrt{163}}$ est ou non un entier, un décimal, un rationnel ? (Sa partie entière a 18 chiffres : 262 537 412 640 768 743 !!!).

Votre machine ne vous dira jamais, pour la simple raison que l'on ne le sait pas, si $a = \sqrt{2} \sqrt{2}$ est rationnel ou non. Et pourtant ce nombre permet de justifier qu'il existe des irrationnels qui, élevés à une puissance irrationnelle, donnent un nombre rationnel. En effet, de deux choses l'une; ou a est rationnel ou, s'il ne l'est pas, $a^{\sqrt{2}}$ l'est, puisqu'égal à 2 !!

Et les grands nombres, comment les approcher ?

Les calculatrices et, surtout les tableurs, effectuent les calculs avec une rapidité foudroyante et permettent très

vite d'atteindre des nombres astronomiques.

Ainsi, imaginez, comme on vous le propose à La Villette, que vous puissiez plier et replier une feuille en deux, quarante cinq fois de suite. Quelle épaisseur de papier obtiendrez-vous ? La hauteur d'une salle, d'un immeuble, de la Tour Eiffel, la distance de la Terre à la Lune, au Soleil,...?

Que vous dit votre calculette ? Et qu'en dites-vous ? En kilomètres, on obtient un nombre de 6 chiffres ! Quelle notion approximative avons-nous de ces distances ? On commence ici à flirter avec les nombres Googoliens (un Googol = 10^{100}).

Et les factorielles !!!

Faciles à calculer avec un tableur, elles deviennent vite approximatives, quand elles ne sont pas fausses sur les derniers chiffres significatifs.

Et pourtant ces «n !» interviennent dans bien des formules et développements limités (donc approximatifs). Là encore l'approximation permet... d'approcher n! d'autant plus près que n est grand : n! est voisin de $(n/e)^n \sqrt{2\pi}$ (formule donnée par Stirling au XVIII^e).

Et les nombres de nombres ?

Voilà encore un autre type d'approximation. Contentons nous ici de rappeler la formule qui montre que les nombres premiers se «raréfient» quand ils deviennent très grands. Cette formule, dûe à Hadamard et La Vallée-Poussin, dit que le nombre de nombres premiers inférieurs à l'entier a se rapproche de « $a/\ln a$ » quand a devient très grand.

Des sujets pour plusieurs numéros

De nombreux sujets pourraient être abordés dans ce numéro, heureusement le nombre de pages nous limite. Nous réservons pour d'autres numéros :

- les approximations polynomiales de fonctions si importantes à l'ère de la discrétisation ;
- les grands nombres premiers et les codes secrets à clé publique (cf «Mosaïque Mathématique») ;
- les limites des langages informatiques (cf les articles d'André Warusfel in «la revue de Maths Spé» n° 2 d'octobre 87 et in «l'ordinateur individuel» n° 97 de novembre 87.

Enfin, nous vous engageons à lire les livres cités en «aplotrophes» et qui portent tous sur le sujet. Vous les trouverez dans vos *frém* ou l'Apmep.

En guise de conclusion, nous insérons le début de l'article de Jean-Louis Ovaert (devenu Inspecteur Général) dans l'Encyclopaedia Universalis sur l'histoire du Calcul numérique.

L'équipe de rédaction ■

CALCUL NUMÉRIQUE (HISTOIRE DU) E NUMÉRIQUE (ANALYSE), vol. 11

Dans l'enseignement actuel des mathématiques en France, le calcul numérique apparaît le plus souvent comme une simple application des théories. Au contraire, l'histoire des mathématiques montre, comme on va le voir, qu'il y a une interaction constante entre les progrès du calcul et l'approfondissement des concepts mathématiques. Cependant, l'intérêt pour les problèmes numériques est d'importance variable suivant les époques. L'école platonicienne (Platon, Eudoxe, Euclide...) distingue nettement l'arithmétique, laquelle fait partie des mathématiques, du calcul numérique (appelé logistique), considéré comme science pratique. Une évolution importante apparaît avec l'école d'Alexandrie (Archimède, Héron...), en relation avec les progrès de la géographie et de l'astronomie : les mathématiciens sont alors amenés à combiner les méthodes grecques et les méthodes babyloniennes. C'est encore l'astronomie qui favorise le développement de l'algèbre et du calcul numérique dans l'école arabe au Moyen Age.

En Occident, il convient de distinguer plusieurs périodes. De 1500 à 1650, le développement du calcul numérique est lié aux problèmes posés par les échanges commerciaux, la navigation et l'astronomie (Stevin, Viète, Napier, Briggs, Kepler, Mercator, Descartes, Wallis, Gregory). De 1650 à 1800, les progrès des sciences physiques, du calcul des probabilités et des statistiques sont à la source de nombreux travaux, aussi bien en Grande-Bretagne (Newton, Maclaurin, Stirling...) que sur le continent (Euler, Lagrange, Laplace, Gauss...). Au début du XIX^e siècle, l'école française (Fourier, Poisson, Ampère, Cauchy...) élabore les éléments de la physique mathématique, laquelle pose de nouveaux problèmes numériques. Au cours du XIX^e siècle, ces travaux seront approfondis notamment par Jacobi, Tchebychev et Hermite. Toutefois, de nombreuses questions ne peuvent alors être résolues, par manque de moyens de calcul : ce qui peut expliquer un certain déclin de l'intérêt pour les questions numériques à la fin du XIX^e siècle, et ce jusqu'en 1940. Les développements de la recherche opérationnelle d'une part, de la physique nucléaire d'autre part, eux-mêmes liés à l'histoire de la Seconde Guerre mondiale, ont abouti à la création des ordinateurs ; ceux-ci ont, en retour, complètement bouleversé les conceptions concernant le calcul numérique. Depuis cette époque, de très nombreux travaux sont consacrés à l'analyse numérique et à l'informatique, au service des problèmes scientifiques et techniques. Les moyens de calcul ont ensuite envahi la gestion à tous les niveaux. Grâce à l'apparition des calculatrices de poche vers 1970, bon nombre de ces moyens de calcul ont été mis à la disposition des individus, y compris pour les problèmes posés par la vie courante, reléguant au grenier de l'histoire les tables de logarithmes et autres règles à calcul. Il convient de souligner le rôle ambigu des progrès en ces matières : les tables et les règles ont eu des effets positifs pendant une longue période, mais elles ont fini par être des obstacles à la recherche de moyens de calcul plus puissants et plus rapides.

Il est à noter que l'influence de cette révolution sur l'enseignement français connaît quelques lenteurs : l'analyse numérique et l'informatique ont été introduites dans les cursus des écoles d'ingénieurs et les universités vers 1960. L'emploi des calculatrices de poche est mis en vigueur dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques en 1978 ; il le sera dans un avenir prévisible au concours d'entrée à l'École polytechnique et au baccalauréat.

Enfin, à toutes les époques, le calcul numérique a permis de formuler des conjectures dans des secteurs mathématiques très variés. Les travaux sur la répartition des nombres premiers de Legendre, Gauss et Dirichlet sont à cet égard célèbres. Aujourd'hui, l'emploi des ordinateurs est fréquent, notamment pour les conjectures concernant les équations diophantiennes et les équations aux dérivées partielles. On a même effectué des démonstrations sur ordinateur, par une étude exhaustive de cas trop nombreux pour être étudiés à la main : citons, par exemple, en topologie algébrique, le problème des quatre couleurs. Ces conjectures peuvent porter sur l'analyse numérique elle-même. En effet, il y a deux façons d'apprécier l'efficacité d'un processus de calcul : on teste ce processus sur des exemples déjà maîtrisés par d'autres méthodes, ou bien on démontre un résultat théorique assurant la convergence et permettant de mesurer la rapidité de cette convergence. L'histoire des mathématiques montre que ces deux aspects interviennent de manière dialectique et que le plus souvent la phase expérimentale précède la phase déductive. Les mathématiques sont donc aussi une science expérimentale.

Le calcul sur les nombres réels

Développements décimaux

Nous ne traiterons pas ici des différents systèmes de numérations (cf numération).

On sait que l'école platonicienne considérait que seuls les entiers naturels non nuls sont des nombres. Par ailleurs, la théorie des grandeurs (Euclide, livres V et X) fournit un cadre très malaisé pour le calcul sur les rapports non entiers. Les mathématiciens de l'école alexandrine, en particulier Archimède (287-212 av. J.-C.), Héron (1^{er} siècle) et Diophante (325-410), développent le calcul sur les fractions et sur les racines carrées. Ces difficultés persisteront en Occident jusqu'au XVI^e siècle, comme en témoigne la terminologie de nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables, sourds, rompus, etc.

C'est la construction du système décimal, motivée en particulier par les nécessités du commerce, qui va permettre d'unifier le domaine numérique, comme on le témoigne l'œuvre de Simon Stevin (1548-1620). Le système décimal est exposé dans l'Arithmétique (1585), sous le titre : «La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrants aux affaires des Hommes». Stevin insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu'ils ont les mêmes propriétés opératoires. Dans le Traité des incommensurables grandeurs (paru en 1634), Stevin approfondit la notion théorique de nombre réel ; il affirme que les difficultés rencontrées par les mathématiciens dans la mesure des grandeurs (cf. Euclide, livre X) viennent du fait «qu'ils ne tenaient pas les radicaux pour nombres, mais pour quantités sourdes, absurdes... et pas dignes d'être citées en propositions mathématiques». Cette nouvelle conception a eu une grande influence, non seulement pour la construction des nombres réels (cf Weierstrass), mais aussi pour l'élaboration du calcul différentiel : Newton, dans la Méthode des fluxions et des suites infinies (1671), s'appuie sur une analogie avec la théorie des développements décimaux pour unifier le champ des fonctions, grâce au concept de développement en série entière. De même que les développements décimaux expriment, à l'aide de nombres entiers, les fractions et les nombres définis par des radicaux, les développements en série entière expriment, à l'aide de monômes, les fonctions rationnelles et les fonctions définies par des radicaux. Le développement du binôme joue ici un rôle essentiel. Le calcul des dérivées de telles fonctions en découle aussitôt.

APPROXIMATIONS GEOMETRIQUES



Ste ven LAY - Nctm



I un dessin vaut mieux qu'un long discours, alors un graphique vaut mieux qu'une longue démonstration.
 Les deux graphiques qui suivent illustrent la convergence des séries géométriques. Ils portent sur des notions dont on a tous fait le tour et pourtant ne semblent pas souvent rencontrés dans la littérature.
 Ce très court mais très visuel article est extrait de *Mathematical Teachers* de Septembre 85, revue de la NCTM, l'Apmep à l'échelle américaine.

Prenons les séries géométriques $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ avec r compris entre 0 et 1.

$S_n = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$ désigne une somme partielle et S est la limite S_n quand n tend vers l'infini.

Le premier graphique se construit à partir des points $A(0,0)$ et $B(1,0)$. Une droite de pente r passe par A et une droite de pente 1 passe par B . Puisque r est compris entre 0 et 1, ces deux droites se coupent en un point C .

On construit ensuite les points P_1, P_2, P_3, \dots comme indiqué sur la figure, chaque point étant la projection du point précédent sur l'autre droite orthogonalement ou parallèlement à la droite (AB) .

Dans le triangle rectangle ABP_1 , AB valant 1 et (AC) ayant pour pente r , BP_1 vaut r . (BC) ayant pour pente 1, P_1P_2 est égal à BP_1 .

De même, dans le triangle rectangle $P_1P_2P_3$, P_1P_2 valant r , P_2P_3 vaut r^2 et ainsi de suite.

Appelons D la projection de C sur (AB) . La mesure du segment $[AD]$ est égale à la somme $S = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$. Et, comme $BD = CD$, nous en déduisons que $CD = S - 1$. Les triangles rectangles ABP_1 et ADC sont semblables donc :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1} \text{ soit } \frac{S}{1} = \frac{S-1}{r}, \text{ ce qui donne } S = 1/(1-r)$$

La figure 2 illustre la série géométrique alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = 1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \dots \text{ avec } 0 < r < 1$$

Cette fois, la droite (AC) a pour pente $-r$ et nous obtenons, avec $AB = 1$, $AD = S$ et $DC = DB = 1 - S$:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1} \text{ soit } \frac{S}{1} = \frac{1-S}{r}, \text{ ce qui donne } S = 1/(1+r)$$

Comme exercice d'application, vous êtes invité à étudier les cas $r = 1$ et $r > 1$. ■

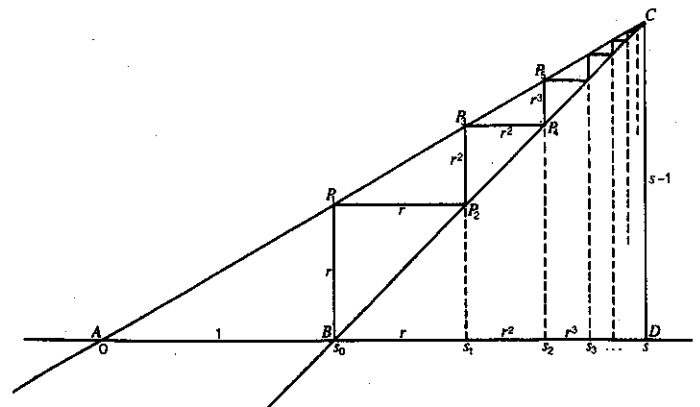


Fig. 1. $s = \frac{1}{1-r}$

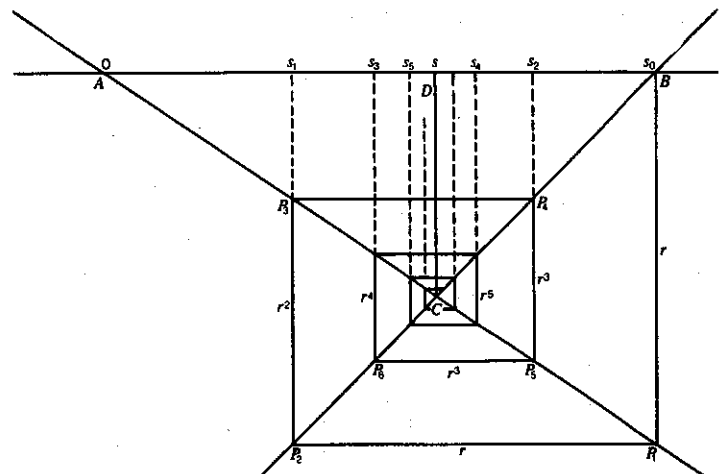


Fig. 2. $s = \frac{1}{1+r}$

DE HERON A NEWTON

Michel CLINARD - Orléans



PETITES réflexions
sur une méthode itérative
pour approcher une racine
à toute vitesse.

De quoi s'agit-il ?

Héron : Dans le livre I d'Héron d'Alexandrie (75-150 après J.C.), on trouve un moyen d'approcher les racines carrées en considérant des rectangles de même aire que l'on rend «de plus en plus carrés» grâce à l'algorithme suivant :

- On considère un rectangle d'aire A ; x est la mesure de l'un des côtés (l'autre mesure alors A/x).
- Calculer la moyenne arithmétique des côtés : $1/2 (x + A/x)$.
- Considérer le nouveau rectangle d'aire A dont l'un des côtés a pour mesure la moyenne précédente.
- Répéter la démarche en allant en 2.

A la limite, on obtient un carré de côté \sqrt{A} car la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

converge vers \sqrt{A} pour n'importe quelle valeur initiale x_0 strictement positive.

Cette méthode d'approximation était déjà connue des Babyloniens.

La suite récurrente associée à l'algorithme de Héron converge.

La suite récurrente est définie par $x_0 > 0$ et $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$

1. $\forall n \geq 1 \quad x_n > \sqrt{a}$
En effet : $x_n - \sqrt{a} = \frac{(x_{n-1})^2 + a - 2x_{n-1}\sqrt{a}}{2x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} > 0$

2. $\forall n \geq 2 \quad x_n < x_{n-1}$
En effet : $x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}}{2} - \frac{a}{2x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1})^2 - a}{2x_{n-1}} > 0$

puisque $x \geq 2$ et que $x_{n-1} > \sqrt{a}$ d'après 1)

3. On a donc : $\forall n \geq 2 \quad \sqrt{a} < x_n < x_{n-1}$

Pour $n \geq 1$, la suite (x_n) est décroissante minorée. Si \sqrt{a} n'est la borne inférieure de cet ensemble borné (\sqrt{a} existe toujours) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \leq x_n$$

A la limite on a alors $\sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) \Leftrightarrow \sqrt{a}^2 = a \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{a}$

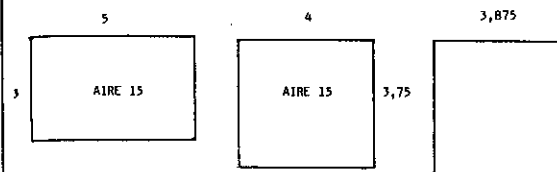
encadré 1

L'algorithme de Héron peut être le sujet d'une activité intéressante tant pour la notion de racine carrée que pour la mise en place d'un algorithme simple. Deux modes de présentation élémentaire peuvent être envisagés :

Analyse de l'algorithme : que fait ce programme ? Travail sur machine des élèves, libre choix des valeurs initiales (A, x_0), analyse des résultats, mise en évidence de l'algorithme sous-jacent, édition des procédures à la fin du travail.

Construction de l'algorithme : travail à partir de la fiche ci-jointe (encadré 2) observation des figures, utilisation des calculatrices, écriture des expressions algébriques, rédaction de l'algorithme.

Algorithme de Héron : fiche de travail élève



Ces rectangles deviennent de "plus en plus carrés".
Vers quel nombre les longueurs se rapprochent-elles ?
Le but est de trouver une méthode qui facilite les calculs.

Etape	0	1	2	3	4	5	6
Longueur x	5	4					
Longueur y	3						

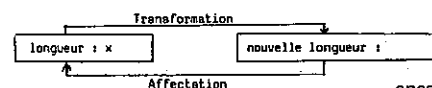
Ecrire le calcul qui permet d'obtenir y en fonction de x

(1) $y =$

Ecrire le calcul qui permet d'obtenir la nouvelle longueur en fonction de l'ancienne longueur x et de l'ancienne largeur y

(2) Nouvelle longueur =
Nouvelle longueur =

y doit disparaître :



encadré 2

Un travail de synthèse, avec toute la classe reste à faire, il peut s'orienter vers les mathématiques (racine, suite, convergence...) ou vers l'algorithmique (boucle itérative, test d'arrêt, conditions initiales...).

Il apparaît fondamental de bien définir ses objectifs pour éviter les effets d'un «glissement métadidactique» tel que l'a défini Guy Brousseau et qui consiste en «une transformation d'un moyen d'enseignement (l'algorithme de Héron pour les connaissances mathématiques : suite, racine) en un objet d'enseignement (algorithmique...)».

Newton : Dans son ouvrage «Méthode des fluxions et séries infinies» (1671), Newton mentionne une formule d'approximation pour une solution d'équation : on peut approcher une solution s de l'équation $f(x) = 0$ par la suite $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

La convergence de cette suite est assez remarquable pour sa rapidité (en général convergence d'ordre 2 : voir encadré 3). Même si on peut, théoriquement, exhiber des exemples de non-convergence, on constate que, dans la pratique, de tels cas sont rares, surtout si l'on considère des solutions qui sont des zéros simples de l'équation.

Convergences d'une suite

1. On dit que la suite (x_n) converge linéairement vers s avec le coefficient de convergence q si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|} = q \quad \text{et } 0 < q < 1$$

c'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} = q \times e_n$; les erreurs e_n sont alors approximativement les termes d'une suite géométrique de raison q .

2. On dit qu'il y a convergence quadratique de la suite (x_n) vers s s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = q$$

C'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} = q (e_n)^2$

Cette convergence est beaucoup plus rapide que la convergence linéaire, en effet si $e_n < 10^{-3}$ alors

$$e_{n+1} < q \times 10^{-3} \quad (\text{convergence linéaire})$$

$$e_{n+1} < q \times 10^{-6} \quad (\text{convergence quadratique})$$

3. On peut définir des convergences d'ordre p s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = q$$

encadré 3

Considérons alors la fonction $f(x) = x^2 - A$, ($A > 0$) \sqrt{A} est une solution - zéro simple - de l'équation $f(x) = 0$ et la suite récurrente (x_n) associée à la méthode de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - A) / 2x_n = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

On retrouve la méthode de Héron qui converge donc quadratiquement. (Pour plus de détails voir bibliographie [1] ou [2]).

Convergence quadratique de l'Algorithme de Newton

On appelle $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la fonction itérative de Newton liée à la résolution de l'équation $f(x) = 0$. Si s est une solution, la suite (x_n) des valeurs approchées correspondantes est définie par $x_{n+1} = g(x_n)$. On note comme précédemment la n ème erreur absolue : $e_n = |x_n - s|$

Dans le cas où s est un zéro simple de f (c'est à dire que $f'(s) \neq 0$) on a $g'(x) = \frac{f(x) \times f''(x)}{f'(x)^2}$ donc $g'(s) = 0$ (puisque $f(s) = 0$).

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = |g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x_n - s)^2|$$

$$= \frac{1}{2} |g''(\xi)| \times (e_n)^2$$

avec $\xi \in [s - e_n ; s + e_n]$

On constate alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2} |g''(s)| = q$

C'est à dire que, près d'une solution - zéro simple -, la méthode de Newton donne naissance à une suite qui converge de façon quadratique à condition de prendre une valeur initiale x_0 suffisamment proche de s .

Pour des solutions - zéro multiple - la convergence est linéaire et souvent plus lente que celle obtenue par dichotomie.

encadré 4

Quelques remarques d'ordre didactique

Il semble difficile de présenter l'algorithme de Newton autrement qu'ostensiblement (c'est-à-dire que l'enseignant - ou le manuel - «montre» la méthode et l'élève est invité à faire quelques applications). En revanche, le cas particulier de l'algorithme de Héron permet la réalisation de «situations de classe» (au sens de G. Brousseau [3]) qui amène les élèves à construire la méthode. On a déjà cité une approche liée aux aires, en voici une autre plus «analytique» :

x_n est une approximation de \sqrt{A} , on en cherche une autre sous la forme $x_n + h$ avec h réel voisin de 0. On a

$$(x_n + h)^2 = x_n^2 + 2x_n h + h^2$$

En négligeant h^2 on peut dire que $x_n^2 + 2x_n h$ est une approximation de A .

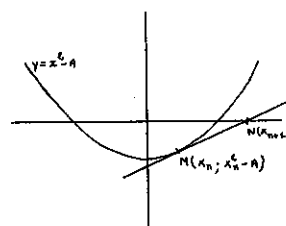
Si on prend $h = A/2x_n - x_n/2$ (c'est-à-dire que l'on considère

$$A = x_n^2 + 2x_n h) \text{ on obtient } x_{n+1} = x_n + h = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

qui est une nouvelle approximation de \sqrt{A} (Rappelons que nous avons négligé h^2).

Enfin, l'approche géométrique ne doit pas être oubliée : on trace la représentation graphique de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ |x \mapsto x^2 - A$$



La pente de la tangente à la courbe en $M(x_n ; x_n^2 - A)$ peut se calculer directement en considérant le point

$$N(x_{n+1}; 0) : \frac{0 - (x_n^2 - A)}{x_{n+1} - x_n}$$

ou par la dérivée : $2x_n$

On retrouve, en égalant, la formulation de l'algorithme de Héron.

Les situations de classe restent à construire précisément.

D'autre part, «les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes. L'activité didacti-

que consiste à organiser ces contraintes et à maintenir les conditions des interactions optimales élèves-milieu, milieu pris au sens général (social, scolaire...) et particulier de situation de classe (matériel manipulé, questions posées, éléments constructifs de la notion, preuve...)» [3].

Donc, pour construire une situation de classe, en plus de ses convictions propres («épistémologie du professeur»), l'enseignant peut être amené à faire un inventaire des «possibles» pour étayer ses choix :

- Possibles didactiques qui ne seront pas développés ici.
- Possibles historiques : il existe, d'autres méthodes pour approcher les racines, celle de Alkarchi (11^e siècle), voir l'article «la diagonale irrationnelle», celle de Bombelli, (16^e siècle), qui a conduit aux fractions continues.

- Possibles épistémologiques : l'algorithme de Héron peut être perçu comme purement numérique (c'est ainsi que procédait Héron qui traitait des problèmes éventuellement d'origine géométrique, en se servant exclusivement des nombres et des opérations élémentaires ; il faudra attendre Diophante pour voir apparaître les premiers rudiments de l'algèbre).

Ce procédé est explicité par Théon de Smyrne (2^e siècle) qui construit la suite (x_n) : $x_n = p_n/q_n$ (p_n et q_n entiers premiers entre eux) à partir de $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$ les entiers p_n , q_n se construisent sans peine par récurrence (pour plus de détails voir [6] p. 94).

D'autre part, une écriture algébrique moderne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

permet d'étudier la méthode en terme de suite convergente : suite de Cauchy ou suite monotone décroissante minorée qui débouchent sur la connaissance de R.

Enfin, des considérations algorithmiques liées aux développements des moyens modernes de calculs permettent de renouer avec le numérique par le biais de l'analyse numérique. Il n'y a plus intérêt, actuellement, à chercher à tout prix des «formules exactes», une bonne méthode numérique sera souvent mieux adaptée pour solutionner un problème.

- Possibles mathématiques : la méthode de Héron figure dans beaucoup de manuels actuels (cf. encadré 5) vulgarisation

passagère sans réel fondement mathématique ou apport majeur à la formation scientifique ?

Si on constate que cette méthode repose sur le calcul de la moyenne arithmétique de x_n et A/x_n on peut s'interroger : que se passe-t-il

- si on change de moyenne ?
- si on considère une moyenne pondérée ?
- si on recherche une convergence plus rapide vers \sqrt{A} ?

Ces questions ont été suggérées par Monsieur P. Damey, professeur à l'Université de Bordeaux I. Les réponses qui suivent éviteront de trop longs développements calculatoires (calculs polynominaux, de dérivée, de majoration ; certains sont accessibles à des élèves de 1^{ère} S).

Algorithmes itératifs pour approcher \sqrt{A}

Dans ce qui suit x est une approximation de \sqrt{A} . Les différentes fonctions f proposées permettent de construire des algorithmes itératifs correspondant aux suites récurrentes

$x_{n+1} = f(x_n)$. Ces suites convergent vers $\sqrt{A} = f(\sqrt{A})$.

Il est donc important d'étudier ces convergences d'un double point de vue :

- la vitesse de convergence (linéaire, quadratique...);
- l'intervalle de convergence $I = [\sqrt{A} - h; \sqrt{A} + h]$:

Quel serait l'intérêt d'un algorithme très rapide sur un tout petit intervalle I et linéaire ailleurs ?

- Utilisation des différentes moyennes de x et A/x

La forme générale des moyennes s'écrit

$$f(x) = \bar{x}(a) = \left[\frac{1}{2} (x^a + (A/x)^a) \right]^{\frac{1}{a}}$$

a est un entier.

- $a = 1$: moyenne arithmétique ;
- $a = 2$: moyenne quadratique ;
- $a = -1$: moyenne harmonique ; quand a tend vers 0 : moyenne géométrique ; quand a tend vers $+\infty$ on obtient $\sup(x; A/x)$ (inf avec $-\infty$).

POUR ALLER PLUS LOIN

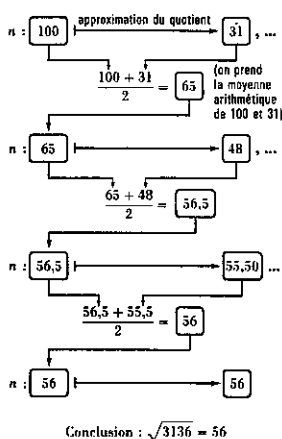
CALCUL D'UN RADICAL

- Le calcul de \sqrt{n} est, bien sûr, immédiat si tu disposes d'une calculatrice :
 - à touche « $\sqrt{\quad}$ »
 - à touche « puissance », type « x^y ». Il suffit de demander $n^{\frac{1}{2}}$ (puisque $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$).
- Avec une calculatrice plus simple, où à la main, tu peux procéder par essais, avec des encadrements de \sqrt{n} de plus en plus serrés. Mais cela risque d'être très lent alors que la méthode dite « de Héron » est rapide :

Calcul d'un radical par la méthode de Héron :

Exemple 1 : Calculons $\sqrt{3136}$. Posons $n = 3136$.

$100^2 = 10000$. Donc $100 > \sqrt{n}$. A partir de là voici la méthode de Héron (qui peut se dérouler à partir de n'importe quel nombre positif ou nul) :

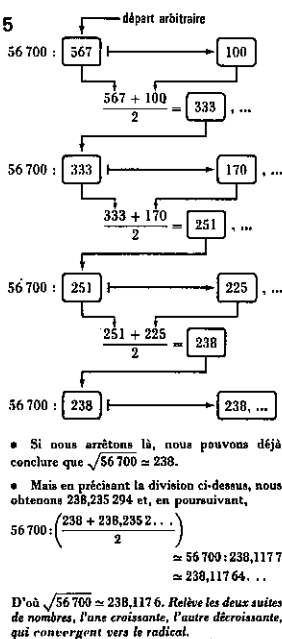


Conclusion : $\sqrt{3136} = 56$

- Les deux colonnes de nombres : 100; 65; 56,5; 56 et 31; 48; 55,5; 56 constituent une suite croissante et une suite décroissante qui « convergent » vers 56.

encadré 5

Exemple 2 : Calcul de $\sqrt{56700}$



● Si nous arrêtons là, nous pouvons déjà conclure que $\sqrt{56700} \approx 238$.

● Mais en précisant la division ci-dessus, nous obtenons 238,235 294 et, en poursuivant,

$$\sqrt{56700} = \left(\frac{238 + 238,2352 \dots}{2} \right) \approx 56700 : 238,1177 \approx 238,11764 \dots$$

D'où $\sqrt{56700} \approx 238,1176$. Relève les deux suites de nombres, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent vers le radical.

Utilisation, pour le calcul de $\sqrt[n]{n}$, de puissances de 10

- 1^{er} Exemple 1 : Calcul de $\sqrt[786]{786000000000}$. Ici $n = 7860 \times 10^6$.
D'où $\sqrt[n]{n} = 10^6 \times \sqrt[786]{7860}$
- Exemple 2 : Calcul de $\sqrt[780]{0,0000078}$. Ici $n = 780 \times 10^{-6}$.
D'où $\sqrt[n]{n} = \sqrt[780]{780 \times 10^{-6}}$.

● Il vaut mieux arrondir tant que le diviseur et le quotient sont éloignés l'un de l'autre. Il ne faut pas le faire, si l'on veut un radical précis, dès que le diviseur et le quotient sont très voisins.

● Rappelons que, par l'écriture du type « a... » nous voulons dire que ce nombre comporte d'autres chiffres, non précisés.

● Par cette méthode, vérifie, en quelques divisions, que :

$$\sqrt[78965]{412} \approx 8086,2485$$

$$\sqrt[0,0000078]{8} \approx 0,0027928$$

Les suites associées convergent pour tout x_0 de départ positif, elles sont croissantes et majorées par \sqrt{A} quand a est négatif (à partir de x_1), elles sont décroissantes et minorées par \sqrt{A} quand a est positif.

La convergence est quadratique sur un intervalle dont l'amplitude décroît quand $|a|$ augmente (amplitude 1 pour $a = 2$; amplitude 0,2 pour $a = 3$).

D'autre part, on démontre que $\bar{x}(a)$ est une fonction croissante de a ce qui permet d'ordonner les moyennes et dire que la moyenne arithmétique pour a positif et la moyenne harmonique pour a négatif correspondent aux meilleures convergences (c'est-à-dire que pour une même approximation x , l'approximation suivante $\bar{x}(1)$ ou $\bar{x}(-1)$ sont plus proches de \sqrt{A} que tout autre valeur $\bar{x}(a)$).

Enfin, l'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique et quadratiquement à partir de x_1 quel que soit x_0 .

Pour $a = 1$ on a $\bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$: l'algorithme de Héron !

L'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique

On note $f(x) = \bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ et (x_n) la suite associée, $g(x) = \bar{x}(-1) = [\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{A})]^{-1} = \frac{2Ax}{x^2 + A}$ et (y_n) la suite associée.

La convergence est quadratique si $|f'(x)| < 1$ ou $|g'(x)| < 1$ (on peut se reporter à [4] page 16)

1. Intervalle de convergence quadratique
 $x_n > \sqrt{\frac{A}{3}}$ donc convergence assurée dès x_1 ($x_1 > \sqrt{A}$)
 $y_n > \sqrt{(3\sqrt{3}-2) \times A}$ la convergence quadratique peut se faire attendre en particulier si y_0 est voisin de 0.

2. Comparaison des erreurs.
 A partir d'une même erreur au rang n :
 $x_n - \sqrt{A} = \sqrt{A} - y_n = \epsilon$, on montre que
 $\sqrt{A} - y_{n+1} > x_{n+1} - \sqrt{A} \Leftrightarrow 4\sqrt{A} > \epsilon$

Cette dernière inégalité est facilement obtenue (souvent avec l'approximation de départ).

encadré 6

● Utilisation d'une moyenne pondérée

$$f(x) = \frac{1}{a+b} (a x + b \frac{A}{x})$$

La suite associée (x_n) converge, en effet :

$$x_n < \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

$$x_n > \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

La convergence peut être alternée (à partir d'un certain x_n si $b > a$)

La convergence est linéaire,

$$\text{en effet } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left| \frac{a-b}{a+b} \right| < 1$$

$$\text{avec } e_n = |x_n - \sqrt{A}|.$$

Enfin, la vitesse de convergence dépend de la quantité

$$c = \left| \frac{a-b}{a+b} \right| :$$

- elle est médiocre quand c est voisin de 1 (c'est-à-dire a voisin de 0 ou b grand) ou exclusif (b voisin de 0 ou a grand);

- elle est la meilleure possible quand $c = 0$, c'est-à-dire $a = b$; on retrouve - faut-il le dire? - l'algorithme de Héron !!

● Utilisation des côtés d'un rectangle d'aire A .

La première présentation de la méthode de Héron faisait référence à un problème d'aire associé à la fonction F :

$$F(x) = x^2 - A$$

Si on compare les côtés x et A/x d'un rectangle d'aire A on obtient deux nouvelles fonctions :

G : $G(x) = x - A/x$ comparaison par différence

H : $H(x) = 1 - (A/x)/x = 1 - A/x^2$ comparaison par quotient

Les suites associées demandent de prendre en compte les fonctions itératives de Newton ($f(x) = x - F(x)/F'(x)$ voir encadré précédent). On retrouve les moyennes arithmétique et harmonique pour $f(x)$ et $g(x)$. La suite associée à $h(x)$ est plus délicate à traiter : on est assuré d'une convergence quadratique pour une valeur initiale comprise entre $\sqrt{A/3}$ et $\sqrt{3A}$, toutefois pour toute valeur comprise entre $-\sqrt{5A}$ et $\sqrt{5A}$ on a une convergence vers \sqrt{A} ou... $-\sqrt{A}$! Dans tous les cas, la convergence obtenue est la moins bonne des trois, Héron reste donc le meilleur !

Comparaison des cotes x et A/x par quotient

$H(x) = 1 - \frac{A}{x^2} = 0$ ou $h(x) = x \cdot \frac{3A - x^2}{2A} = x$

Exemple d'approximation de départ

convergence pour une valeur initiale x_0
 $-\sqrt{5A} < x_0 < \sqrt{5A}$
 la limite peut être \sqrt{A} ou $-\sqrt{A}$.

Suite associée (x_n)
 $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{3A - x_n^2}{2A}$

Convergence quadratique dès que $\sqrt{\frac{A}{3}} < x_n < \sqrt{3A}$

encadré 7

On comprend mieux l'importance donnée à cet algorithme dans l'enseignement, les raisons méritent toutefois d'être évoquées en classe, voire d'être mises en évidence par les élèves dans une des situations simples précédentes.

De plus, cette méthode se généralise sans problème aux approximations de la racine k ème avec les mêmes propriétés : on considère la moyenne arithmétique des k côtés d'un hypercube, $k-1$ côtés ont pour mesure x , le dernier a pour mesure A/x^{k-1}

On a alors la suite d'approximation :

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}} \right]$$

On peut aussi appliquer la méthode Newton à partir de la fonction f :

$$f(x) = x^k - A; f(x) = 0 \text{ ayant pour racine } \sqrt[k]{A}.$$

La rapidité de l'algorithme Héron-Newton peut-elle être mise en défaut ?

Dans [4], il est proposé de trouver en exercice une méthode pour améliorer la convergence de l'algorithme de Newton en déterminant $h(x)$ dans $G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} + h(x) \left[\frac{F(x)}{F'(x)} \right]^2$

pour obtenir une convergence cubique.

En appliquant cette idée à $F(x) = x^2 - A$, on obtient une condition nécessaire $h(\sqrt{a}) = -1/2\sqrt{A}$ - on peut prendre la fonction constante définie par $h_1(x) = -1/2\sqrt{A}$ mais $h_2(x) = -x/(x^2 + a)$ convient mieux car les erreurs sont plus petites. Dans les deux cas la convergence est d'ordre 4.

Avec $h_2(x)$ on obtient donc $G_4(x) = (x^4 + 6Ax^2 + A^2)/(4x^3 + 4Ax)$ qui permet de définir la suite des approximations. Avec l'algorithme de Héron on a

$$G_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right) = \frac{x^2 + A}{2x}$$

On peut alors généraliser en utilisant le développement du binôme $(x + \sqrt{a})^n$:

$$G_n(x) = \frac{x^n + \binom{n-2}{n} A x^{n-2} + \binom{n-4}{n} A^2 x^{n-4} + \dots}{\binom{n-1}{n} x^{n-1} + \binom{n-3}{n} A x^{n-3} + \binom{n-5}{n} A^2 x^{n-5} + \dots}$$

On obtient une suite décroissante vers \sqrt{A} à partir du deuxième terme x_1 et convergente d'ordre n.

Les tableaux en annexe permettent de constater les apports de cet algorithme : la vitesse de convergence double quand on passe de l'ordre 2 à l'ordre 4 (ce qui était prévisible). Ce gain de vitesse n'existe plus quand on passe à l'ordre 6. En général une seule itération supplémentaire avec l'ordre 4 suffit pour retrouver le résultat obtenu avec l'ordre 6, ce qui peut s'expliquer par le fait que la différence entre e^6 et e^4 est négligeable quand e est petit.

Cette méthode généralisée sera connue et utilisée désormais sous le nom de «Recette du Plot» pour la distinguer de celle de ses ancêtres célèbres (à moins qu'un lecteur apporte le témoignage de son existence plus ancienne).

On peut aussi raisonnablement penser que l'algorithme de Héron-Newton continuera à être utilisé et étudié en tant qu'outil et objet d'enseignement pour sa simplicité, pour la richesse des apports historiques, mathématiques et didactiques (s'ils sont explicités).

Tant pis pour le PLOT qui ne fera pas recette.

Michel CLINARD

Extraction de la racine carrée d'un nombre

Ce procédé, qui était enseigné dans les classes de troisième il y a encore quelques décennies (voir Monge et Guinchan) mérite quelque attention.

Il s'agit d'une variante de méthodes anciennes, en particulier celle d'Alkarchi (algébriste se référant à Diophante - début 11^e siècle), qui est une interpolation linéaire conduisant à des approximations par défaut de \sqrt{A} : ... x_n, x_{n+1}, \dots

$$\text{avec } x_{n+1} = x_n + \frac{A - x_n^2}{1 + 2x_n} \text{ et } x_0 < \sqrt{A}$$

Si on considère la courbe représentative de la fonction $f: f(x) = x^2 - A$,

$x_n + 1$ est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite (PQ) telle que

$$P(x_n; f(x_n)) \text{ et } Q(1 + x_n; f(1 + x_n))$$

La correction apportée à x_n est toujours inférieure à 1. En effet:

$$(x_n)^2 < A < (1 + x_n)^2$$

$$\text{Soit } 0 < A - x_n^2 < 1 + 2x_n$$

L'extraction de racine proposée apparaît quelque peu mystérieuse pour ceux qui la découvrent ou la redécouvrent. Elle repose sur une double séquentialité: celle des approximations successives et celle des unités d'ordre n: ... milliers, centaines, dizaines, unités, qui rend possible des calculs simples «à la main».

On considère x_0 , l'approximation par défaut de \sqrt{A} telle que $x_0 = \bar{x}_0 \times 10^n$ (\bar{x}_0 est le nombre d'unité d'ordre x: \bar{x}_0 entier et $1 < \bar{x}_0 < 9$). Il existe h tel que

$$A = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$$

$$\text{soit } A - x_0^2 = (2x_0 + h) \times h.$$

Il s'agit alors de trouver h' de la forme $h' = \bar{h}' \times 10^{n-1}$

(\bar{h}' , nombre d'unités d'ordre n-1, \bar{h}' entier et $1 \leq \bar{h}' \leq 9$) tel que

$(2x_0 + h') \times h' \leq A - x_0^2$. On comprend alors l'algorithme décrit:

multiplier l'approximation par 2, rechercher l'entier h' qui convient, prendre la nouvelle approximation $x_1 = x_0 + h'$.

Le fait de ne travailler qu'avec des «tranches de deux chiffres», correspond à la seconde séquentialité décrite précédemment, permet d'«alléger» les calculs et se justifie par le fait que

$$(\bar{x}_0 \times 10^n)^2 \leq A < [(\bar{x}_0 + 1) \times 10^n]^2$$

Bien que cet algorithme corresponde à une convergence d'ordre 1 (comme celui d'Alkarchi), son efficacité (en l'absence de calculettes), réside dans la simplicité des calculs, il demande toutefois un effort d'apprentissage et de mémorisation tel qu'il est présenté ici, en l'absence de toute construction susceptible de lui donner un sens.

De tels algorithmes risquent fort de contribuer à développer une vision magique des mathématiques même si - ou parce que - ils sont efficaces; ils deviennent alors des obstacles à la compréhension ou à la formation des notions sous-jacentes.

Paradoxalement, c'est parce que ces algorithmes simples existent que les concepts associés sont si performants (pour plus de détails voir «Introduction du débat scientifique» en situation d'enseignement» [5]).

Bibliographie

- [1] Mathématiques et informatique. A. Engel, Cedic.
- [2] Démarches algorithmiques en classe de mathématiques. Bouquard, Clinard. IREM Orléans-Tours, Novembre 1986.
- [3] Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. G. Brousseau. Thèse d'état, Bordeaux I, Décembre 1986.
- [4] Introduction à l'analyse numérique. Baranger. Hermann.
- [5] Textes et comptes rendus de la 4^e Ecole d'Été de Didactique. Orléans, Juillet 1986, IREM - Paris - Sud.
- [6] Nombre, Mesure, Continu. Jean Dhombres. Cedic, IREM - Nantes.
- [7] A la recherche de ses racines... M. Glaymann - in B. Vert 354, p. 331.

LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE
ALGÈBRE
GÉOMÉTRIE

M. MONGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure,
Professeur agrégé au Lycée Michelet.

et M. GUINCHAN
Licencié en Sciences,
Professeur de Cours Complémentaires

CLASSE DE 3^e
(Enseignement court)

NOUVELLE ÉDITION



PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE, EUGÈNE BELIN
8, rue Férou

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE
D'UN NOMBRE ENTIER

Deux cas sont à envisager :

86. Premier cas : Le nombre entier donné est inférieur à 100.
La racine carrée est inférieure à 10 et on doit connaître de mémoire les carrés des nombres entiers inférieurs à 10.

Exemple : Soit à calculer $\sqrt{57}$
57 est compris entre $49 = 7^2$ et $64 = 8^2$.

La racine carrée de 57 est donc 7; le reste est égal à $57 - 7^2 = 8$.

87. Deuxième cas : Le nombre entier donné est supérieur à 100.
On applique la règle suivante :

Règle :

On partage le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite (la première tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre).

On extrait la racine carrée de la première tranche à gauche ce qui donne le premier chiffre de la racine et l'on soustrait de la première tranche le carré de ce chiffre (la différence est le premier reste partiel).

À la droite de ce reste, on abaisse la tranche suivante dont on sépare, par un point, le dernier chiffre à droite.

On divise le nombre placé à gauche du point par le double du chiffre trouvé à la racine.

Le quotient est le deuxième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.
Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double du premier chiffre de la racine et on multiplie le nombre ainsi obtenu par le chiffre à essayer.

RACINE CARRÉE ENTIÈRE D'UN NOMBRE ENTIER

Si le produit peut se retrancher du premier reste partiel suivi de la deuxième tranche, le chiffre essayé est exact (la différence est le deuxième reste partiel); sinon il faut effectuer un essai avec le chiffre inférieur d'une unité jusqu'à ce que la soustraction soit possible. Le premier chiffre remplissant cette condition est le deuxième chiffre de la racine.

À la droite du deuxième reste partiel, on abaisse la troisième tranche dont on sépare, par un point, le dernier chiffre à droite.

On divise le nombre placé à gauche du point par le double de la racine trouvée le quotient est le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort; on le vérifie comme on a vérifié le deuxième chiffre.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches du nombre donné.

Le dernier reste est le reste de l'opération.

88. Exemple : Extraire la racine carrée du nombre 76 528.

Partageons ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

La racine de 7 est 2; nous écrivons 2 à la racine. Le carré de 2, soit 4, retranché de 7 donne pour reste 3. À la droite de ce reste nous abaissons la tranche suivante 65 et nous séparons par un point le dernier chiffre à droite 5.

$$\begin{array}{r} 76\ 52\ 8 \quad | \quad 2 \\ - 4 \\ \hline 3\ 6\ 5 \end{array}$$

Nous doublons la racine trouvée 2, soit 4 et nous divisons 36 par 4.

Essayons le quotient 8. Écrivons 8 à la droite de 4 et multiplions 48 par 8. Il vient 384 qui ne peut être soustrait de 365; 8 est donc un quotient trop fort, essayons 7. Écrivons 7 à la droite de 4 et multiplions 47 par 7. Il vient 329 qui peut être retranché de 365; 7 est donc le deuxième chiffre de la racine et le deuxième reste partiel est 36.

$$\begin{array}{r} 76\ 52\ 8 \quad | \quad 2\ 7 \\ - 4 \\ \hline 3\ 6\ 5 \\ \hline 4\ 7 \times 7 = 3\ 2\ 9 \\ \hline 3\ 6\ 2\ 8 \end{array}$$

À la droite de ce reste nous abaissons la tranche suivante 28 et nous séparons par un point le dernier chiffre à droite 8.

Nous doublons la racine 27 soit 54 et nous divisons 362 par 54; essayons le quotient 6. Écrivons 6 à la droite de 54 et multiplions 546 par 6; il vient 3276 qui peut être soustrait de 3628. 6 est donc le troisième chiffre de la racine et le reste de l'opération est 352.

$$\begin{array}{r} 76\ 52\ 8 \quad | \quad 2\ 7\ 6 \\ - 4 \\ \hline 3\ 6\ 5 \\ \hline 4\ 7 \times 7 = 3\ 2\ 9 \\ \hline 3\ 6\ 2\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 6 \times 6 = 3\ 2\ 7\ 6 \\ \hline 3\ 5\ 2 \end{array}$$

89. Remarques :

$$\begin{array}{r} 76\ 52\ 8 \quad | \quad 2\ 7\ 6 \\ 3\ 6\ 5 \\ \hline 4\ 7 \times 7 = 3\ 2\ 9 \\ \hline 3\ 6\ 2\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 6 \times 6 = 3\ 2\ 7\ 6 \\ \hline 3\ 5\ 2 \end{array}$$

1. Dans la pratique on simplifie l'opération en effectuant directement les soustractions sans écrire les produits à retrancher.

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 6\ 9\ 7 \quad | \quad 2\ 0\ 9 \\ 0\ 3\ 6\ 9\ 7 \\ \hline 4\ 0\ 9 \times 9 = 3\ 6\ 8\ 1 \\ \hline 1\ 6 \end{array}$$

2. Si l'une des divisions donnait zéro pour quotient on écrirait un zéro à la droite de la racine et on abaisserait la tranche suivante.

3. Il découle de la règle d'extraction de la racine que le nombre des chiffres de la racine est égal au nombre des tranches partagées dans le nombre.

90. Preuve de la racine carrée.

On vérifie que :

1^o Le reste de l'opération est au plus égal au double de la racine.

2^o Le nombre donné est égal au carré de la racine trouvée augmenté d'un reste.

RACINE CARRÉE DE 2

APPROXIMATION DE DÉPART : 1,000

ITERATION N° 1	ITERATION N° 2	ITERATION N° 3	ITERATION N° 4	ITERATION N° 5	ITERATION N° 6	ITERATION N° 7
ORDRE 2 : 500.001	ORDRE 2 : 250.002499996	ORDRE 2 : 125.0052499950005	ORDRE 2 : 62.51062464301703	ORDRE 2 : 31.27130960206219	ORDRE 2 : 15.66763299486837	ORDRE 2 : 7.897642347856358
ORDRE 4 : 250.002499996	ORDRE 4 : 62.51062464301703	ORDRE 4 : 15.66763299486837	ORDRE 4 : 4.079441240519499	ORDRE 4 : 1.579548752406015	ORDRE 4 : 0.794723912430008	ORDRE 4 : 0.397361956217503
ORDRE 6 : 166.6703553389631	ORDRE 6 : 27.80175512906461	ORDRE 6 : 4.772758729456669	ORDRE 6 : 1.488486956359724	ORDRE 6 : 1.414213563166932	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095

RACINE CARRÉE DE 2

APPROXIMATION DE DÉPART : 1,001

ITERATION N° 1	ITERATION N° 2	ITERATION N° 3	ITERATION N° 4	ITERATION N° 5	ITERATION N° 6	ITERATION N° 7
ORDRE 2 : 1000.0005	ORDRE 2 : 500.0012499995	ORDRE 2 : 250.002624999475	ORDRE 2 : 125.0053124553755	ORDRE 2 : 62.51065588770507	ORDRE 2 : 31.2713252164103	ORDRE 2 : 15.66764078607512
ORDRE 4 : 500.0012499995	ORDRE 4 : 125.0053124553755	ORDRE 4 : 31.2713252164103	ORDRE 4 : 7.89764211720405	ORDRE 4 : 2.283093646797556	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095
ORDRE 6 : 333.3352777757037	ORDRE 6 : 55.56754577992679	ORDRE 6 : 9.33146001789546	ORDRE 6 : 1.952807928195619	ORDRE 6 : 1.414260948124878	ORDRE 6 : 1.414213562373097	ORDRE 6 : 1.414213562373095

RACINE CARRÉE DE 2

APPROXIMATION DE DÉPART : 1,000

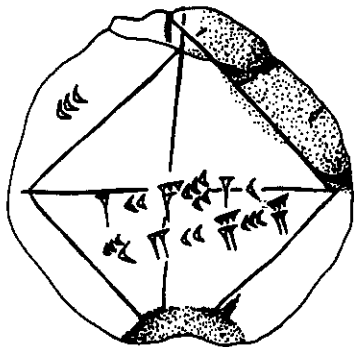
ITERATION N° 1	ITERATION N° 2	ITERATION N° 3	ITERATION N° 4	ITERATION N° 5	ITERATION N° 6	ITERATION N° 7
ORDRE 2 : 1.5	ORDRE 2 : 1.416666666666667	ORDRE 2 : 1.414213562373095	ORDRE 2 : 1.414213562373095	ORDRE 2 : 1.414213562373095	ORDRE 2 : 1.414213562373095	ORDRE 2 : 1.414213562373095
ORDRE 4 : 1.416666666666667	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095	ORDRE 4 : 1.414213562373095
ORDRE 6 : 1.414285714285714	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095	ORDRE 6 : 1.414213562373095

LA DIAGONALE IRRATIONNELLE

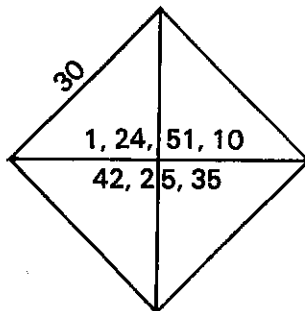
Michel DARCHE - Orléans

D EPUIS la découverte de ce que nous appelons aujourd'hui "le théorème de Pythagore", de nombreuses tentatives ont été faites pour approcher sinon atteindre $\sqrt{2}$. Nous vous en proposons ici quelques-unes.

La plus ancienne de ces approximations se trouve sur une tablette babylonienne de 8 centimètres de côté.



Copie d'une tablette babylonienne (grandeur réelle)



Transcription moderne

(icône Yale Babylonian Collection Pl. 8b. YBC 7289)

Cette tablette, représente un carré et ses diagonales. Elle donne en plus un message composé de trois nombres écrits en base soixante :

$a = 30$
 $b = 1, 24, 51, 10$
 $c = 42, 25, 35$

Vérifions que $a \times b = c$:

1, 24, 51, 10
 x 30

= 30, 720, 1530, 300
 = 30, 720, 1535
 = 30, 745, 35
 = 42, 25, 35

Multiplier le côté du carré par b donne donc la diagonale de ce même carré. Connaissant, de nos jours, le théorème de Pythagore, nous pouvons en déduire que b est une bonne approximation de $\sqrt{2}$. On le vérifie de deux façons :

- le carré de b , en base soixante, est égal à 1, 59, 59, 38, 1, 40.

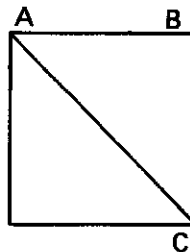
- b , en base dix, s'écrit 1,414212963... alors que $\sqrt{2}$ s'écrit 1,414221356... soit une erreur de un cent millièmes !

Dans un livre indien d'Apastamba - Sulba - Sutra datant de 800 ans avant notre ère, on trouve une autre approximation de $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} \text{ soit } \frac{577}{408}$$

Les cinq premiers chiffres de l'écriture décimale de cette fraction sont les mêmes que pour $\sqrt{2}$. Les Grecs semblent avoir été les premiers à reconnaître que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Il est "incommensurable" c'est-à-dire qu'il ne peut être écrit comme rapport de deux nombres entiers.

Voici la preuve fournie par Aristote :



Supposons que AC soit "commensurable" avec AB .
 Posons $AC/AB = d/a$ avec a et d sans diviseur commun.
 On a $d > a$ et $AC^2/AB^2 = d^2/a^2$

De $AC^2 = 2 \cdot AB^2$, $d^2 = 2 \cdot a^2$ on déduit que d^2 et donc d sont pairs.

Posons $d = 2c$. Alors $d^2 = 2 \cdot a^2$ s'écrit $4 \cdot c^2 = 2 \cdot a^2$, soit $2 \cdot c^2 = a^2$.

On en déduit que a est pair, ce qui est en contradiction avec le fait que a et d n'ont pas de diviseur commun. L'hypothèse de départ est donc fautive.

Ce sont les Pythagoriciens qui ont, les premiers, inventé une méthode pour calculer des approximations de $\sqrt{2}$ de plus en plus précises.

Le procédé repose sur une autre approximation : si d/a est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, alors le triangle isocèle est presque... rectangle.

La mesure de l'erreur est donnée par le théorème de Pythagore : $e = d^2 - 2.a^2$. Si le triangle isocèle (a, a, d) est presque rectangle, une formule, due à Euclide : $2.a^2 - d^2 = (2.a + d)^2 - 2(a + d)^2$, permet d'ajouter qu'il en est de même du triangle $(a + d, a + d, a + 2.d)$

et $\frac{2.a+d}{a+d}$ est une autre approximation de $\sqrt{2}$, meilleure que d/a !

Avant l'ère des calculettes

Rappelez-vous, l'extraction de racine de 2!!!

$ \begin{array}{r} 2.00000000 \\ -1 \\ \hline 1.00 \\ 96 \\ \hline 400 \\ 281 \\ \hline 11900 \\ 11296 \\ \hline 60400 \\ 56564 \\ \hline 383600 \\ 282841 \\ \hline 10075900 \end{array} $	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1,414213</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24 x 4 = 96</td> <td style="text-align: right;">(A)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">281 x 1 = 281</td> <td style="text-align: right;">(B)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2824 x 4 = 11296</td> <td style="text-align: right;">(C)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">28282 x 2 = 56564</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">282841 x 1 = 282841</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2828423 x 3 = ...</td> <td></td> </tr> </table>	1,414213		1		24 x 4 = 96	(A)	281 x 1 = 281	(B)	2824 x 4 = 11296	(C)	28282 x 2 = 56564		282841 x 1 = 282841		2828423 x 3 = ...	
1,414213																	
1																	
24 x 4 = 96	(A)																
281 x 1 = 281	(B)																
2824 x 4 = 11296	(C)																
28282 x 2 = 56564																	
282841 x 1 = 282841																	
2828423 x 3 = ...																	

A la règle et au compas

La méthode qui suit est décrite par Théon de Smyrne (130 ap. J.-C.), "l'unité étant le commencement de toute chose, il doit en être de même du côté et de sa diagonale, au moins au début !"

Commençons avec deux longueurs unités, l'une est celle du premier côté a_1 ,

l'autre est celle de la première diagonale d_1 .

Les seconds côté et diagonale (a_2, d_2) sont construits à partir des premiers, les troisièmes (a_3, d_3) et les suivants le sont comme suit :

$$a_2 = a_1 + d_1, \quad d_2 = 2.a_1 + d_1,$$

$$a_3 = a_2 + d_2, \quad d_3 = 2.a_2 + d_2,$$

$$a_4 = a_3 + d_3, \quad d_4 = 2.a_3 + d_3, \text{ etc.}$$

puisque $a_1 = d_1 = 1$, il en résulte que :

$$a_2 = 1 + 1 = 2 \text{ et } d_2 = 2.1 + 1 = 3 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 3/2,$$

$$a_3 = 2 + 3 = 5 \text{ et } d_3 = 2.2 + 3 = 7 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 7/5,$$

$$a_4 = 5 + 7 = 12 \text{ et } d_4 = 2.5 + 7 = 17 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 17/12,$$

et ainsi de suite.

Cette méthode était connue de Platon 5 siècles avant J.-C.

Une autre approximation de $\sqrt{2}$ fait appel aux fractions continues. Cette méthode, parfois appelée méthode de Héron, est utilisée plus généralement pour trouver une mesure approchée de la racine carrée d'un nombre A.

Elle est décrite au XIV^{ème} siècle par Rhabdas. Si a est le plus grand nombre dont le carré est inférieur à A, alors, si nous posons $A = a^2 + b$, les nombres

$$a + \frac{b}{2a}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}}$$

... fournissent des approximations de $\sqrt{2}$.

Avec $A = 2$ on obtient $3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408, \dots$ qui est la séquence fournie par la méthode des Pythagoriciens.

La septième approximation est celle fournie par Apastamba - Sulba - Sutra.

La méthode est rappelée par ailleurs par Monge et Guinchan dans l'annexe à l'article de Michel Clinard. Pourquoi ça marche si bien ?

A l'étape A,

il s'agit de trouver le plus grand entier n d'un chiffre tel que : $(10 + n)^2 \leq 200$.

Puisque $(10 + n)^2 = 100 + (20 + n)n$, cela revient à trouver n tel que $(20 + n)n \leq 100$.

A l'étape B,

il faut trouver n tel que $(140 + n)^2 \leq 20\,000$, soit : $(280 + n)n \leq 400$.

A l'étape suivante : $(1410 + n)^2 \leq 2\,000\,000$, soit : $(2820 + n)n \leq 11\,900$.

Cette méthode était connue des Grecs mais ils utilisaient pour ce faire la base soixante, héritage des Babyloniens. C'est ainsi que l'on trouve chez les Babyloniens, 1600 ans avant notre ère :

$$\sqrt{2} \simeq 1^\circ + 24' + 51'' = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600}$$

soit environ 1,41416.

Cherchez l'erreur

● Avec la méthode de Newton :

$$\text{En partant de } x = 1, \text{ avec } y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

$$\text{on obtient } y_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = 1,5$$

$$\text{puis } y_2 = \frac{1}{2} \left(1,5 + \frac{1}{1,5} \right) = 1,417$$

$$\text{puis } y_3 = \frac{1}{2} \left(1,417 + \frac{1}{1,417} \right) = 1,414216$$

Après 3 approximations, l'erreur est inférieure à deux millièmes.

● Avec la méthode des fractions continues.

Posons $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$ et notons e_n l'erreur d'approximation.

On a $e_{n+1} = [-(\sqrt{2} - 1)e_n] \simeq [(-\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} + 1)]e_n$ soit environ $-1/6$ de e_n .

L'erreur est réduite par un facteur 6 à chaque étape. C'est une méthode linéaire puisque e_{n+1} est proportionnel à e_n .

Pour la méthode de Newton, les erreurs successives sont liées par la relation : $e_{n+1} = e_n^2 / (2(\sqrt{2} + e_n))$ soit environ $e_n^2 / 2\sqrt{2}$.

On a là une méthode d'approximation quadratique puisque e_{n+1} est proportionnel au carré de e_n .

Si x_n a p décimales correctes, alors x_{n+1} aura 2p décimales correctes. ■

APPROCHEZ LE NOMBRE D'OR



J.-J. PAROT et Abd el Aziz CHEIKH - Nouakchott



A première manifestation humaine de la connaissance du nombre d'or remonterait à 10 000 ans comme cela aurait été constaté dans le temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas. La pyramide de Chéops (2 800 av. J.-C.) a des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or. Les bâtisseurs de cathédrales faisaient appel au nombre d'or qui donnait " la divine proportion " permettant d'obtenir les meilleures perspectives. Le nombre d'or n'apparaît pas seulement dans les constructions humaines ; on en trouve de nombreuses manifestations dans l'univers du vivant : les dimensions d'un individu qui nous semble " bien proportionné " ; les galaxies auraient une structure constituée de bras en forme de spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or, spirales identiques à celle de la structure d'une Ammonite ! Nous ne prétendons pas infirmer ou prouver de telles conjectures qui excitent l'imagination et la curiosité mais aborder quelques propriétés du nombre d'or en relation avec des suites de nombres et des suites de " rectangles dorés " qui vont nous permettre de construire une spirale logarithmique ressemblant à celle de la structure de l'Ammonite !

" LE NOMBRE D'OR φ "

à partir d'une suite de FIBONACCI

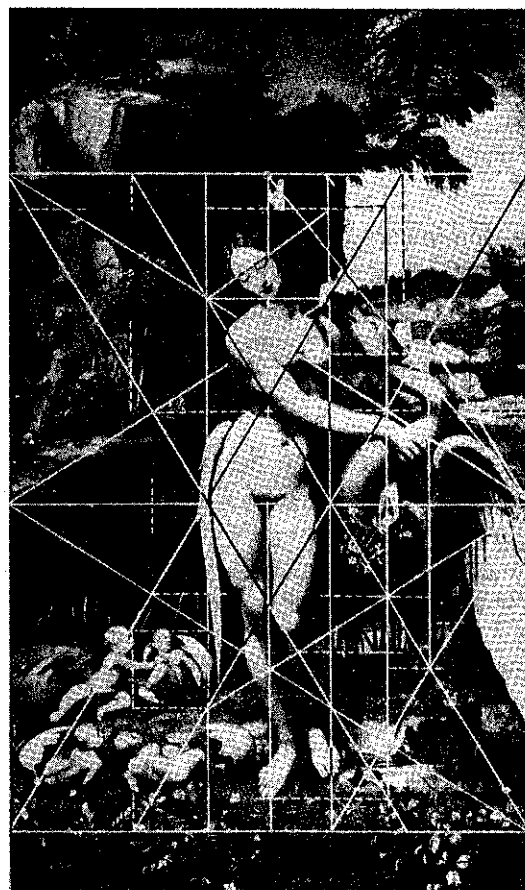
1	.	u_1	$1 = v_1$
1	.	u_2	$2 = v_2$
2	..	u_3	$1,5 = v_3$
3	...	u_4	$1,66 = v_4$
5	u_5	$1,6 = v_5$
8	u_6	$1,625 = v_6$
13	u_7	

La configuration de points ci-dessus représente le début de la suite de Fibonacci définie ainsi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & ; & u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} & \quad \forall n > 2 \end{cases}$$

A partir de la suite divergente (u_n) , on définit la suite (v_n) de la façon suivante :

$$(\forall n \geq 1) \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$



On trouve ainsi :

$v_1 = \frac{1}{1}$	$=$	1	$=$	2
$v_2 = \frac{2}{1}$	$=$	2	$=$	1,5
$v_3 = \frac{3}{2}$	$=$	1,5	$=$	1,666...
$v_4 = \frac{5}{3}$	$=$	1,6	$=$	1,625
$v_5 = \frac{8}{5}$	$=$	1,6	$=$	1,615..
$v_6 = \frac{13}{8}$	$=$	1,615..	$=$	1,6190...
$v_7 = \frac{21}{13}$	$=$	1,6190...	$=$	
$v_8 = \frac{34}{21}$	$=$	1,6190...	$=$	

Comme il apparaît clairement ci-dessus (v_n) peut être scindée en deux sous-suites :

(v_{2n}) décroissante et minorée par 1

(v_{2n+1}) croissante et majorée par 2

(Puisque $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{u_n - 1}$)

Donc ces deux suites convergent vers le même nombre positif l tel que :

$$l = 1 + \frac{1}{l} \quad \text{ou} \quad l^2 = l + 1$$

La résolution de cette équation donne $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

nombre qu'on appelle :

LE NOMBRE D'OR qu'on désignera par φ .

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Donc : la suite (v_n) converge vers le nombre d'or φ .

Remarquons que :

1. Il suffit d'ajouter 1 à φ pour obtenir son carré puisque : $\varphi + 1 = \varphi^2$

2. Il suffit de lui retrancher 1 pour obtenir son inverse puisque :

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

3. Comme encadrement de φ , on peut donner : $1,61803 < \varphi < 1,61804$

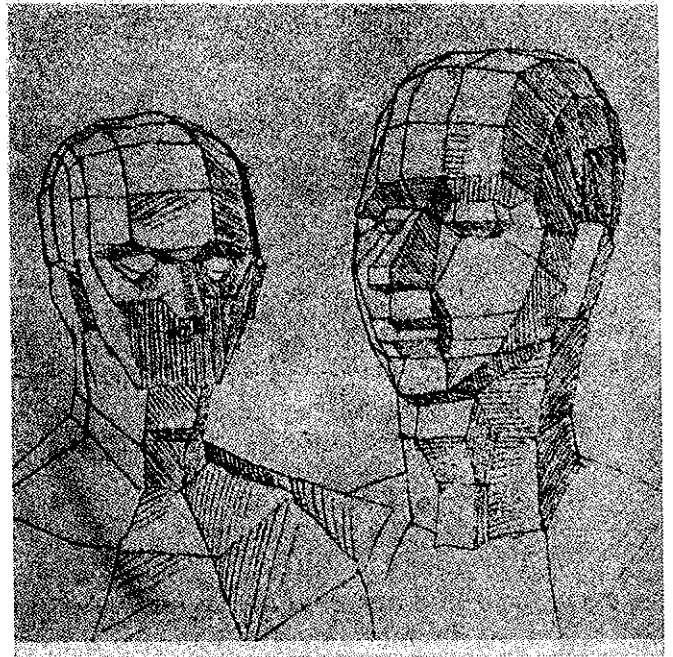
4. Un programme réalisé avec CASIO PB 700 nous a permis de constater que, pour $n=23$, l'écart entre v_n et φ est inférieur à 10^{-9} .

Retour à la suite de FIBONACCI avec la LINEARISATION DE φ^n

φ étant solution de $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtient $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$, c'est à dire qu'on a linéarisé φ^3 ; de proche en proche, on pourra linéariser, de la même façon $\varphi^4, \varphi^5, \dots, \varphi^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1\varphi \\ \varphi^2 &= 1\varphi + 1 \\ \varphi^3 &= 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 &= 3\varphi + 2 \\ \varphi^5 &= 5\varphi + 3 \dots \end{aligned}$$



On peut démontrer que, quel que soit $n \geq 1$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que :

$$\varphi^n = a_n \varphi + b_n$$

et que chacune des deux suites (a_n) et (b_n) est la suite de Fibonacci.

En linéarisant φ^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$, on trouvera :

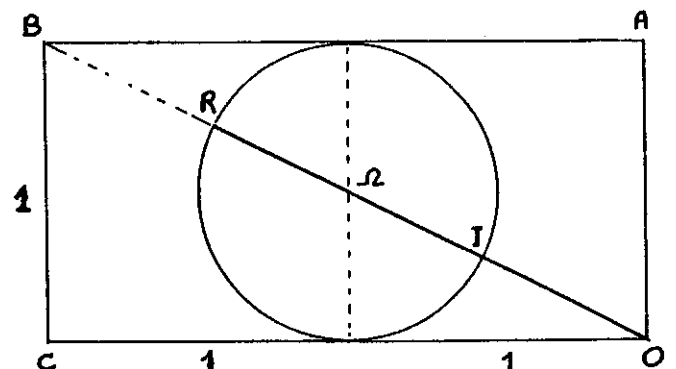
$$\begin{aligned} \varphi^{-1} &= 1.\varphi - 1 \\ \varphi^{-2} &= -1.\varphi + 1 \\ \varphi^{-3} &= 2.\varphi - 3 \\ \varphi^{-4} &= -3.\varphi + 1, \dots \end{aligned}$$

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe deux relatifs α_n et β_n tels que : $\varphi^n = \alpha_n \varphi + \beta_n$

on retrouve, pour $(|\alpha_n|)$ et $(|\beta_n|)$, la suite de Fibonacci !

Représentation géométrique du NOMBRE D'OR

Dans le rectangle (OABC) de côtés 2 et 1 :



$$OB = \sqrt{5}, \quad Or = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$OR = \varphi$$

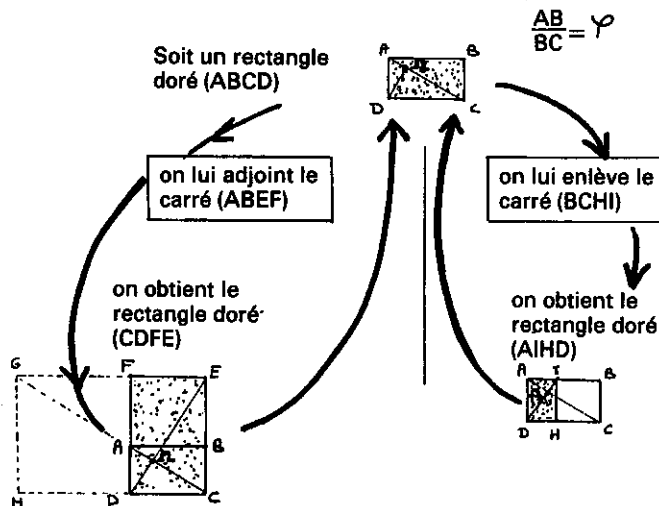
$$OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$OI = OR - 1 = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

N.B. : En considérant la puissance de O par rapport au cercle, on retrouve : $OI \cdot OR = 1$ donc $OI = \frac{1}{\varphi}$

Processus récursifs pour construire des suites de RECTANGLES DORÉS

On dira qu'un rectangle est doré si le rapport de ses côtés est φ .



Ce procédé récursif en augmentation permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus grands: (ABCD) étant un rectangle doré,

$$AB = \varphi \times BC. \text{ Or } EC = EB + BC = AB + BC$$

$$\text{donc } EC = \varphi \times BC + BC = (\varphi + 1) BC = \varphi^2 \times BC$$

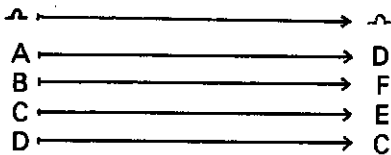
$$EC = \varphi \times (\varphi BC) \quad EC = \varphi \times DC$$

Par conséquent (DCEF) est aussi un rectangle doré. Si on continue en lui adjoignant un autre carré (DFGH), on obtient encore un rectangle doré, etc...

Il existe une similitude S qui transforme (ABCD) en (DCEF); S a

- pour rapport φ
- pour angle $+\frac{\pi}{2}$
- pour centre ω

Dans cette similitude $S(\omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$



$$(\vec{\omega A}, \vec{\omega D}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\vec{\omega D}, \vec{\omega C}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

d'où

$$(\vec{\omega A}, \vec{\omega C}) = \pi + 2k\pi \text{ donc } \omega \in [AC]$$

$$\text{Puisque } (\vec{\omega A}, \vec{\omega D}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

et $\omega \in [AC]$, le point ω est le projeté orthogonal de D sur la diagonale [AC].

Par conséquent: S et S' ont le même centre ω , S et S' sont deux similitudes réciproques.

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [DE] du rectangle doré (DFEC) qui lui est perpendiculaire; donc le point ω est aussi le projeté orthogonal de C sur la diagonale [DE].

Si on poursuit la production de rectangles dorés en utilisant les processus indiqués, c'est toujours:

$$S(\omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$$

qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus grand.

A partir d'un rectangle doré (ABCD), on obtient donc:

une suite de rectangles dorés "croissants" images de (ABCD) par $S, S \circ S = S^2, \dots, S^n$

Ce procédé récursif en diminution permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus petits: (ABCD) étant un rectangle doré,

$$AB = \varphi \times BC, AI + IB = \varphi \times BC$$

$$AI = (\varphi - 1) \times BC \quad AI = \frac{1}{\varphi} \times BC$$

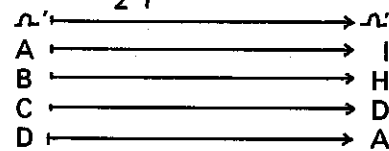
$$\varphi \times AI = AD$$

Par conséquent, (AIHD) est aussi un rectangle doré. Si on continue en lui enlevant un autre carré (DHKL), on obtient encore un rectangle doré (AIKL), etc...

Il existe une similitude S' qui transforme (ABCD) en (AIHD); S' a

- pour rapport $\frac{1}{\varphi}$
- pour angle $-\frac{\pi}{2}$
- pour centre ω

Dans cette similitude $S'(\omega, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$



$$(\vec{\omega C}, \vec{\omega D}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\vec{\omega D}, \vec{\omega A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

d'où

$$(\vec{\omega C}, \vec{\omega A}) = -\pi + 2k\pi \text{ donc } \omega \in [AC]$$

$$\text{Puisque } (\vec{\omega D}, \vec{\omega A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

et $\omega \in [AC]$, le point ω est le projeté orthogonal de D sur la diagonale [AC].

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [ID] du rectangle doré (IHDA) qui lui est perpendiculaire; donc le point ω est aussi le projeté orthogonal de A sur la diagonale [DI].

$$S'(\omega, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$$

qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus petit.

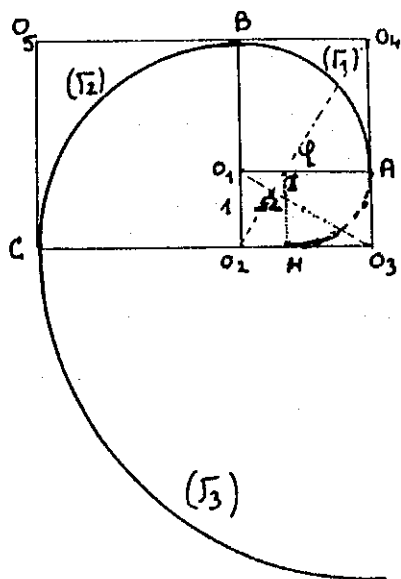
Procédé pour représenter l'Ammonite

1. Après avoir construit le rectangle doré ($O_1 O_2 O_3 A$) de côtés φ et 1, on construit le carré ($O_1 A O_4 B$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_2 O_3 O_4 B$) de côtés φ^2 et φ .

Soit (Γ_1) l'arc de cercle $[AB]$ quart du cercle de centre O_1 et de rayon $\varphi^1 = O_1 A$.

2. On construit le carré ($O_2 B O_5 C$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_3 O_4 O_5 C$) de côtés φ^3 et φ^2 .

Soit (Γ_2) l'arc de cercle $[BC]$ quart du cercle de centre O_2 et de rayon $\varphi^2 = O_2 B$.



En poursuivant indéfiniment ce processus, on obtient une courbe réunion de (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) ,... en décrivant des arcs de cercles inscrits dans des rectangles dorés.

Imaginons une puce qui tourne ainsi en se déplaçant sur cette courbe; si au lieu de tourner en allant de A vers B, elle décide de tourner dans l'autre sens en allant de B vers A, quelle va être la suite de sa trajectoire après être arrivée en A?

Il suffit de procéder comme précédemment mais, cette fois-ci, en suivant le processus en diminution: c'est en enlevant le carré (IAO_3H) de côté 1 qu'on obtient le rectangle doré ($O_1 I HO_2$) de côté 1 et φ^{-1} . On pourra désigner par (Γ_{-1}) l'arc de cercle $[AH]$, quart du cercle de centre I et de rayon IA. $[AH]$ sera donc le début de la suite de la trajectoire de la puce après son arrivée en A.

Si elle continue à décrire de tels quarts de cercles obtenus de cette façon en suivant le processus en diminution elle va se rapprocher de plus en plus du point ω centre des similitudes (ω est le point d'intersection des segments $[O_1 O_3]$ et $[O_2 O_4]$).

Si on désigne par (Γ) la réunion des branches (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) ,... obtenues par le "procédé en augmentation", et par (Γ_{-1}) , (Γ_{-2}) ,... celles obtenues par le "procédé en diminution", on peut considérer que (Γ) est une représentation approchée de l'enroulement d'une ammonite.

Structure de l'Ammonite et Nombre d'Or

La courbe (Γ) ainsi obtenue ressemble à une spirale (\mathcal{C}) qui aurait pour pôle ω et qui passerait par les points A, B, C, ..., H, ... extrémités des "quarts de cercles" utilisés pour construire (Γ) .

Pour déterminer une équation polaire d'une telle courbe (\mathcal{C}) , nous pouvons choisir comme repère:

- le pôle ω (centre des similitudes)
- la demi-droite $[\omega A]$ comme axe polaire
- $1 = \|\omega A\|$

Dans ce repère:

- les coordonnées polaires de A sont $(1, 0)$
- puisque B est l'image de A dans la similitude S de centre ω , de rapport φ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, les coordonnées de B sont $(\varphi, \frac{\pi}{2})$
- C étant l'image de B par S, $C(\varphi^2, \pi)$

Lorsque l'angle polaire augmente de $\frac{\pi}{2}$, le module r est multiplié par le nombre d'or φ .

$$\theta = 0 \quad r = \varphi^0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad r = \varphi^1 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

$$\theta = \pi \quad r = \varphi^2 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

ce qui nous amène à l'équation

$$r = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}} \quad \text{ou} \quad r = e^{(\frac{2}{\pi} \text{Log } \varphi) \theta}$$

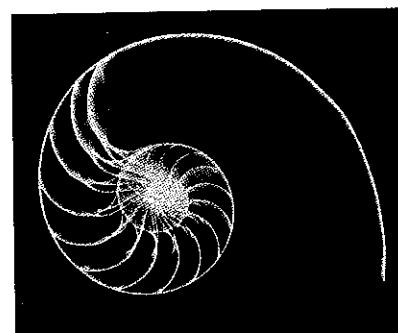
équation d'une spirale logarithmique qui fait apparaître le nombre d'or φ .

$$(\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_1 = r \times \varphi)$$

Cette spirale (\mathcal{C}) qui est une courbe "continue" a en commun avec (Γ) tous les points ayant pour angle polaire $\theta = k \times \frac{\pi}{2}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). On peut donc la considérer comme "voisine" de (Γ) et tout aussi représentative que (Γ) de la structure de l'ammonite.

Dans ce contexte, on pourra admettre que:

la structure de l'ammonite ressemble à une spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or.



Bibliographie:

"Les nombres et leurs mystères", par A. Warusfel. Editions du Seuil. Paris.

"Le nombre d'or, clé du monde vivant", par D. Neroman Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris V^e.

"Les nombres cachés, Esotérisme arithmologique" par G. Jouven Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris V^e. Gödel, Escher, Bach. "Les brins d'une guirlande éternelle" Inter Editions, 87, avenue du Maine, 75014 Paris.

"The geometry of art and life" par Matila Ghyka -Dover Pub. 1977.

MESURES APPROCHEES A LA MAIN

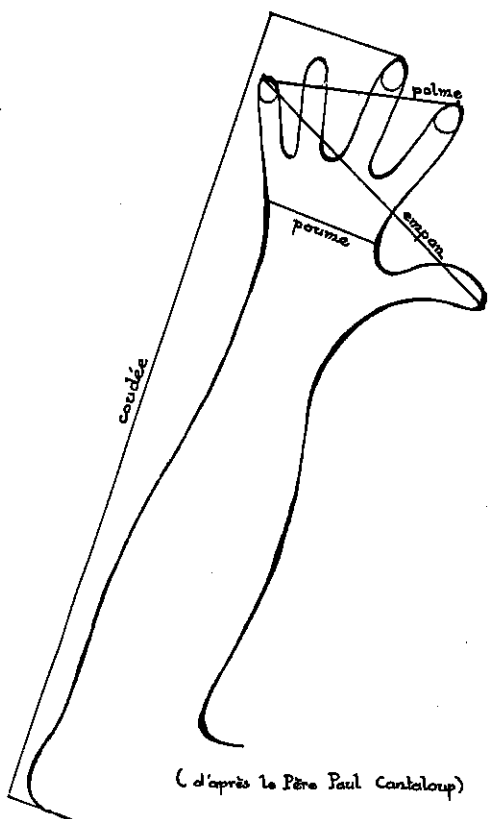
De l'Abbaye de Boscodon



OICI des pages écrites à la main par un instituteur et extraites des «Cahiers de l'Abbaye de Boscodon». Abbaye qui se trouve dans les Hautes-Alpes et qui mérite assurément le détour.

La main. Le pentagone. Les mesures.

Lorsque l'on veut évaluer la longueur d'une table, on porte successivement la longueur de la main, doigts écartés: on utilise l'empain.
 Cette longueur est généralement comprise entre 20 et 25 cm.
 Elle donne naissance à un système de mesures variables suivant l'époque et la région.
 Le passage d'une unité à l'autre se fait en numération duodécimale.



(d'après le Père Paul Canteloup)

en cm				
Unités	équivalence	étalon du Chabélet-Paris	étalon de Vallouise (Ch.)	étalon des initiales
ligne	diamètre du grain d'orge	0,22558	0,2523	0,2247
pouce	12 lignes	2,7069	3,027	
pied	12 pouces	32,48	36,35	
toise	6 pieds	194,9	218,	
La coudée	pouce	34 lignes*	7,66	7,64
	palme	55 lignes	12,40	12,36
	empain	89 lignes	20,07	22,45
	pied	144 lignes	32,48**	36,35
	coudée***	233 lignes	52,56	52,36

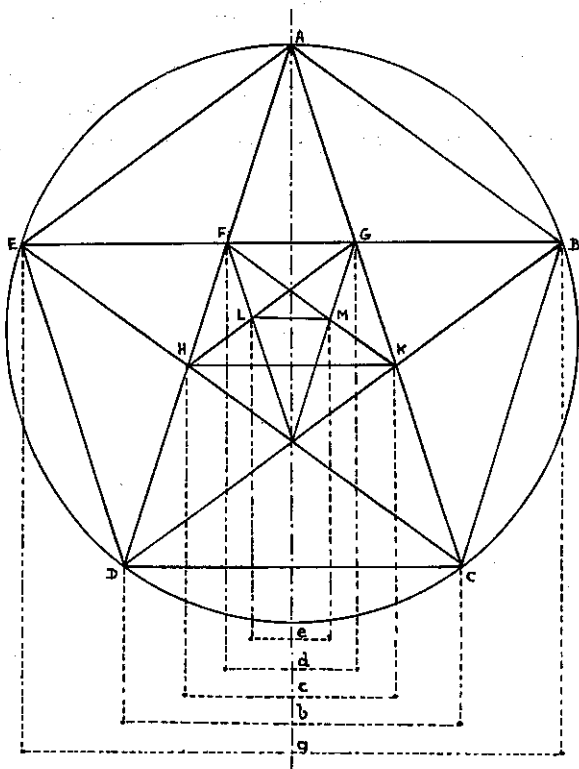
* $\frac{1}{2} \times 3,2$ suite de Fibonacci.

** mesure appelée "le pied de Charlemagne".

*** $\frac{1}{2} \times 2,43$

La main . Le pentagone . Les mesures.

La Quine des Maîtres de l'Œuvre, réservée aux initiés, se réfère aux mesures humaines, mais présentait une progression directement liée à la section d'or, $\frac{1}{\varphi^2}$ et au pentagone régulier $\frac{1}{\varphi}$.



(d'après le Père Jean Bétous.)

paume	palme	empan	pied	coudée royale.
$\frac{1}{\varphi^2}$	$\frac{1}{\varphi}$	1	φ	φ^2
0,382	0,618	1	1,618	2,618
(en cm) 7,64	12,36	20	32,36	52,36

Cette "coudée royale" semble être une constante architecturale qui a traversé le temps et qui s'est reproduite dans le monde ...

Calculs: Grande étoile: ABC (h8) $\frac{EB}{EA} = \varphi$ EA=DC donc $\frac{a}{b} = \varphi$
 AHK (h7) $\frac{AH}{HK} = \varphi$

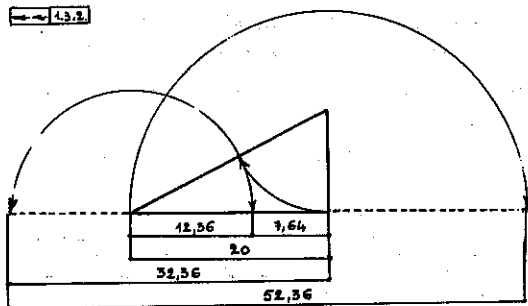
Les triangles AFG, AHK et ADC sont semblables: (a11)
 AH = AF x φ AD = AH x φ donc DC = HK x φ HK = FG x φ
 et $\frac{b}{c} = \varphi$ $\frac{c}{d} = \varphi$

Petite étoile: une observation semblable conduit à écrire: $\frac{FG}{LM} = \varphi$ donc $\frac{d}{e} = \varphi$

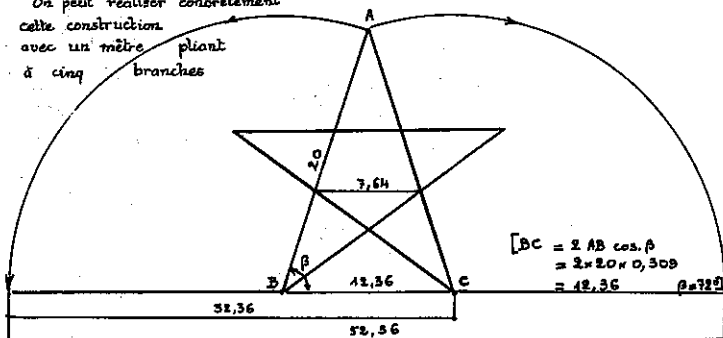
* $\frac{1}{\varphi^2}$

Autres approches de ces mesures.

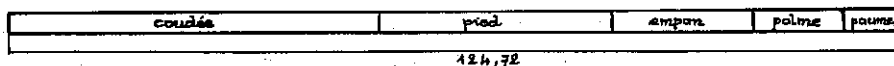
$\frac{1}{\varphi^2}$



On peut réaliser concrètement cette construction avec un mètre pliant à cinq branches



La canne des maîtres de l'Œuvre.



Les maîtres de l'Œuvre utilisaient cette pique ou canne chiffrée, correspondant à une longueur de 555 lignes de 0,2247 cm (!), soit deux coudées plus un empan. Pour plus de commodité, elle pouvait être formée de cinq segments articulés, matérialisation de la double progression arithmétique et géométrique. $\frac{1}{\varphi^2}$

(d'après J. Bétous)

Remarques: L'aune de Vallouise mesurait 1,25 m.
 Le cicero utilisé en imprimerie est le 1/6 du pouce.

UN NOUVEAU FLIRT SUR NOS PAGES : UNE CALCULATRICE TENTE UNE APPROCHE



Yves OLIVIER - Blois

1^{re} tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. Sa démarche est la suivante :
Pour s'approcher de $\log_{10} a$, elle procède par élévations successives à la puissance 10. Mais dans le calcul de a^{10^n} la machine est vite saturée (en général la valeur maximale correspond à $10^{12}-1$). En conséquence de quoi, après chaque élévation à la puissance 10 on divise le résultat par une puissance entière de 10 de telle façon que le résultat trouvé a soit compris entre 1 et 10.

Voici par exemple $\log_{10} 2$:

$$2^{10} \approx 1.024 \times 10^3$$

$$2^{100} = 2^{10^{10}} \approx 1.024^{10} \times 10^{30} \approx 1.26765 \times 10^{30}$$

$$2^{1000} = 2^{100^{10}} \approx 1.26765^{10} \times 10^{300} \approx 1.07150 \times 10^{301}$$

$$2^{10^5} \approx 9.99002 \times 10^{30102}$$

$$2^{10^8} \approx 3.68454 \times 10^{30102999}$$

$$2^{10^{12}} \approx 6.90178 \times 10^{301029995663}$$

ainsi $\log_{10} 2 \approx 0.301029995663$

Quelques remarques

Ce processus peut s'exécuter même avec une calculatrice "non scientifique" entendons par là une calculatrice quatre opérations.

Ce processus peut se généraliser avec plus ou moins de bonheur pour un logarithme de base quelconque puisqu'il est justifié par la formule :

$$\log_{10} a^{10^n} = 10^n \times \log_{10} a$$

2^{eme} tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. La démarche est la suivante :
on considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par les relations suivantes :

$$a_0 = 10 \text{ et } b_0 = 1 \quad (a_0 = 10^{b_0})$$

$$a_1 = \sqrt{10} \text{ et } b_1 = \frac{1}{2} \quad (a_1 = 10^{b_1})$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \text{ pour } n \geq 0$$

Soit c le réel strictement supérieur à 1 dont on veut déterminer le logarithme, et k le plus petit entier tel que $a_k \leq c$.

On a alors $\log c = \log \frac{c}{a_k} + b_k$. Si $\frac{c}{a_k} = 1$ alors $\log c = b_k$ sinon on a $\frac{c}{a_k} > 1$ et on peut itérer le procédé en considérant comme nouveau c la quantité $\frac{c}{a_k}$. On obtient $\log c$ en faisant la somme des b_k trouvés. On itère jusqu'à ce que $\log c = \log y + L$ où $L \in \mathbf{R}$ et $a_p \leq y < a_{p-1}$ pour trouver $\log c$ avec une précision de

l'ordre de $\frac{1}{2^p}$. D'où l'algorithme suivant :

```

L ← 0, B ← 1, A ← 10, Pres ← 10-6
lire C
si C < 1 alors C ← 1/C, Z ← 1
sinon Z ← 2
tant que C ≠ 1 et B > Pres faire
début
tant que C ≥ A faire
début
L ← L + B, C ← C/A
fin
A ← rac(A), B ← B/2
fin
L ← L * (-1) ^ Z
afficher L
    
```

Quelques remarques sur cet algorithme :

On peut approcher n'importe quel logarithme d'un nombre réel strictement positif car Z est ici le témoin de l'appartenance de ce réel à l'un des 2 intervalles]0,1[ou]1,+∞[.

Pour le calcul d'un logarithme de base A, il suffit d'initialiser A à la bonne valeur.

La traduction de cet algorithme sur des calculatrices programmables en basic ou dans un langage simple ne doit pas poser de problèmes. Il n'en est pas de même pour des petites calculatrices du style Casio fx180p ou TI57. En effet, le nombre de pas est limité à 50 au plus et ce nombre diminue de 8 à chaque fois que l'on utilise une mémoire supplémentaire !

De plus la Casio ne permet pas de relire les instructions afin de corriger d'éventuelles erreurs de programmation !

Reportez-vous au BGV de septembre 87 qui donne quelques recommandations de choix.

3^{eme} tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un nombre avec une suite (dans les idées ?). Nous ne parlerons pas ici de cas limite que la morale mathématique réproouve.

Comment extraire une racine carrée ?

Nous redonnons ici la méthode classique dite des babyloniens. Elle correspond à une méthode plus générale utilisée dans l'approximation de solutions d'une équation à savoir la méthode de Newton.

La suite est définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$
 α désigne une valeur proche de celle cherchée et a le nombre dont on cherche la racine carrée.

Par exemple si $a = 2$ et si on prend $u_0 = 1$, on obtient :

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) \simeq 1.5 \quad u_2 \simeq \frac{1}{2}(1.5 + \frac{2}{1.5}) \simeq 1.4166667$$

$$u_3 \simeq 1.4142157 \quad u_4 \simeq 1.4142136 \quad u_5 \simeq 1.4142136$$

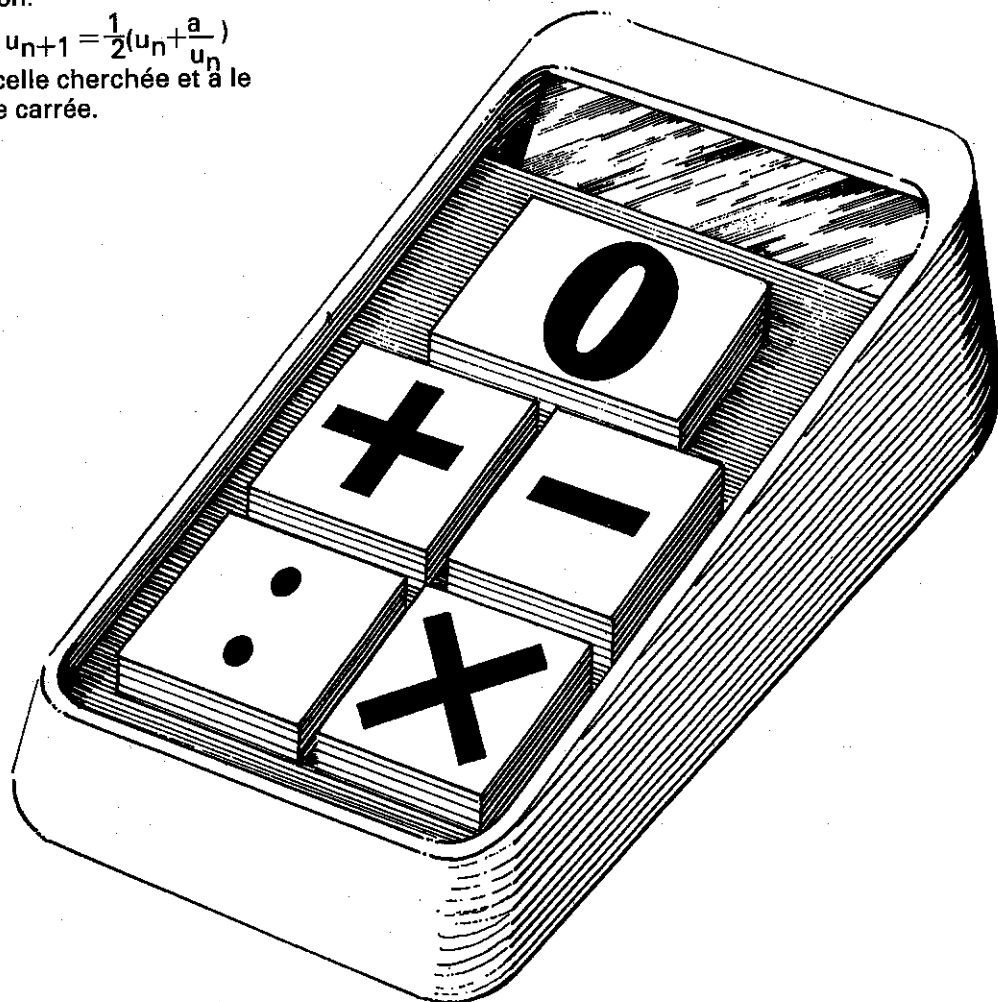
Quelques remarques : on appréciera toujours la rapidité de convergence de cette méthode

l'algorithme peut s'écrire :

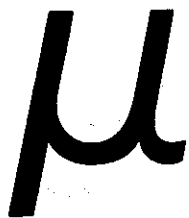
```
lire A, U, PRES
V ← (U+A/U)/2
tant que abs (U-V) > PRES faire
début
  écrire V
  U ← V
  V ← (U+A/U)/2
fin
écrire V
```

ou encore :

```
lire A, U, PRES
répète
  écrire U
  V ← U
  U ← (U+A/U)/2
jusqu'à ce que abs (U-V) ≤ PRES
écrire U
```



MACHINE A CALCULER SIMPLIFIÉE
 Dès l'école maternelle apprenez à vos enfants le maniement des machines à calculer modernes. Celle-ci, avec son chiffre unique, sera une bonne initiation aux machines plus complexes dont ils auront à se servir plus tard.



GRANDEUR ET DECADENCE D'UN NOMBRE DANS L'ENSEIGNEMENT



Un antiexposé de G. CHARRIERE - Lausanne



COMMENT approcher, cerner, un nombre que l'on ne connaît pas mais que l'on peut... définir facilement. Voilà ce que nous propose un collègue suisse dans le bulletin des maîtres de mathématique vaudois n° 30 - 1984 avec réponse d'un étudiant dans le n° 38 - 1987. N'attendez pas aussi longtemps pour prolonger cet article et pour approcher μ d'encore plus près !!!

Pourquoi un antiexposé ?

Considérations sur les programmes d'enseignement.

Il est acquis aujourd'hui qu'un programme d'enseignement rédigé en liste de connaissances est, en mathématique comme dans d'autres disciplines, insatisfaisant. Il présente en effet les défauts suivants :

- les connaissances de cette liste sont soit d'un usage trop restreint (qui doit nécessairement connaître la formule de l'aire d'un trapèze ?) soit spécifiques (c'est-à-dire à l'usage exclusif du futur chimiste, du futur maçon, etc.) ;
- si un tel programme veut être complet, il conduit inévitablement à la surcharge.

Afin de remédier à ces défauts, il serait donc plus judicieux de :

- viser l'apprentissage de procédés généraux (utilisation de tables, usage de graphiques, etc.) ;
- viser l'apprentissage de savoir-faire plutôt que de savoirs et fixer les lignes directrices de cet apprentissage, lignes directrices qui sont savoir chercher, savoir communiquer, savoir choisir, savoir coder, savoir déduire.

Il serait vain de tenter d'enseigner ces savoir-faire en excluant de vouloir mettre l'élève en situation de les exercer. On n'apprend pas à conduire une automobile sans entrer dans une automobile ! C'est dans ce contexte que s'inscrit tout particulièrement bien la technique des situations.

La technique des situations.

Pour le cas des mathématiques, les mouvements de réformes émanant de l'insatisfaction de l'enseignement de cette branche (trop d'échecs ; des élèves « perdus » définitivement ; des « forts en math » sans initiative, etc.) ont amené une nouvelle définition des objectifs beaucoup plus précise qu'auparavant. Si nous voulons que l'élève sache « choisir, choisir au mieux », « aller en quête d'informations, les organiser », « inventer par analogie », « formuler un problème », etc., il faut créer une situation dans la classe telle que l'élève ressente la nécessité ou l'envie d'agir de la sorte.

Pratiquement, cela implique que les élèves soient confrontés à des problèmes assez peu définis pour permettre un choix quant au plan d'attaque, et se laissant approcher par sous-problèmes plus précis que l'élève peut formuler lui-même. Le point de départ doit être à la portée de l'élève, pour qu'il ait « envie d'y voir clair », et de plus, si les choix doivent être réels, il importe que le maître n'ait pas en tête une solution, ou un point du programme auquel il faut aboutir à tout prix.

Ce sont des problèmes choisis dans ces buts qu'on a appelés des « situations », mais il est clair que leur forme peut varier énormément. Le problème lui-même n'est que le point de départ : c'est l'attitude du maître qui en fait une situation.

Inquiétudes et vicissitudes d'un groupe d'expérimentation.

La technique dite « des situations » doit permettre à chaque élève de réussir quelque chose qui ait une

valeur mathématique, à propos d'une question ouverte. Il importe qu'il découvre et qu'il comprenne par lui-même une idée nouvelle qui soit à sa portée. Le maître a pour tâche de favoriser cette démarche peut-être laborieuse, sans imposer sa propre vision.

Où et comment trouver des situations problématiques qui se prêtent à ce genre d'enseignement ? Comment faut-il les présenter aux élèves ? Quel est le comportement des élèves devant des situations de ce type ? Par quels procédés le maître peut-il relancer la curiosité des élèves ? Comment amener les élèves à rendre compte de leur travail ? De quelle documentation le maître a-t-il besoin ? Voilà quelques-unes des questions auxquelles, avant d'espérer une application plus étendue de cette méthode d'enseignement, tente de répondre un groupe d'étude du Centre Vaudois pour l'Enseignement Mathématique.

Lisbonne, août 1983
(35^e rencontre de la CIEAEM).

Présenter ses travaux dans une rencontre internationale et faire partager ses problèmes aux participants était, pour le groupe, une entreprise difficile. Une seule solution s'imposait, basée sur l'évidence qu'il est impossible de faire l'économie de l'expérience : un antiexposé.

Et c'est ainsi que naquit un titre insolite... suivi d'une séance où quelques-uns des mystères du nombre μ se dévoilèrent.

Le nombre μ .

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0,1 \\ \mu_2 &= 0,12 \\ \mu_3 &= 0,123\end{aligned}$$

$$\mu_{12} = 0,123456789101112$$

$$\mu = 0, \dots$$

Le nombre μ fait partie de l'ensemble des nombres dont le développement décimal peut être décrit par une formule explicite :

$$0, f(1) f(2) f(3) \dots$$

où les nombres entiers $f(1), f(2), \dots$ sont écrits l'un après l'autre à la suite de la virgule.

Dans ce cas : $f(n) = n$.

Les participants, une fois mis au courant de l'existence de ce nombre, en arrivèrent à se demander :

- combien y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$?
- quelle est la 734^{ème} décimale de μ ?
- combien y a-t-il de 7 dans les mille premiers chiffres à droite de la virgule de μ ?
- comment μ se note-t-il dans le système binaire ?
- quelles sont les propriétés de la suite $\mu_1 + \mu_2, \mu_2 + \mu_3, \mu_3 + \mu_4, \dots$?
- et celles de la suite μ_{n+1} / μ_n ?
- peut-on imaginer une représentation géométrique de la suite $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$?
- μ est-il transcendant ?

- μ porte-t-il un nom ?!

...

- μ peut-il (ou doit-il) jouer un rôle dans l'enseignement élémentaire ?

...

- inventer un problème du μ que personne, dans la salle, ne saurait résoudre !!

En imaginant de telles questions, en tentant dans certains cas de les résoudre, en discutant des intérêts mathématiques et pédagogiques de μ , il est certain que participants et animateurs prirent mieux conscience de ce qu'est, de ce que devrait être, ... une situation.

Réponse d'un lecteur, Daniel Venditti, étudiant.

Je me suis penché sur la question suivante : combien y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$. J'ai découvert une formule dont je vais vous donner la démonstration. Mais auparavant, dans le livre «Les nombres remarquables», de François le Lionnais, voici ce qu'il est dit : Nombre de Champernowne obtenu en écrivant successivement les nombres entiers consécutifs. Ce nombre est normal en base 10 (Un nombre x est normal en base b si toute suite de k chiffres apparaît dans les « b -cimales» de x avec la fréquence $1/b^k$. Tous ces nombres sont irrationnels mais on ne connaît à ce jour que des nombres normaux artificiellement construits.). D'où la démonstration suivante :

Introduction

- $E[x]$, représente la partie entière de x . $\log x$, est le log décimal de x .
- Pour plus de facilité, j'ai pris un exemple numérique et je vais calculer μ_n pour $n = 8537$.
- Je poserai $m = E[\log n]$, où m représente le nombre de chiffres moins un du nombre n ; donc dans l'exemple numérique $n = 8537$ alors $m = E[\log 8537] = 3$.

Démonstration

- J'ai décomposé n en une somme, ici $8537 = 7538 + 999$ ce qui est très pratique car $\mu_{8537} = 0,12345\dots998999\dots853585368537$ et l'on remarque que, dans la partie sous l'accolade, tous les nombres ont le même nombre de chiffres, ici 4 ou $m+1$.
- Il faut déterminer quel est le 9, 99, 999, 9999, qu'il faut soustraire à n . Il suffit de prendre le dernier de ces nombres qui ait m chiffres et ce nombre sera égal à $10^m - 1$, ici $999 = 10^3 - 1$.
- Donc sous l'accolade il y a $n - (10^m - 1)$ nombres à $m + 1$ chiffres.
 $n - (10^m - 1) = n - 10^m + 1$, ici $8537 - 10^3 + 1 = 7538$.
- Il en découle tout naturellement que $(m+1) \cdot (n - 10^m + 1)$ est le nombre des décimales provenant des 7538 nombres de 1000 à 8537. Voici la première partie de la formule. Ici on aura $(3 + 1)(8537 - 10^3 + 1) = 30152$.
- La prochaine étape est d'exprimer le nombre des chiffres de μ_{999} ; or $\mu_{999} = \underbrace{0,123456789}_{a)} \underbrace{10\dots979899}_{b)} \underbrace{100\dots997998999}_{c)}$



"spécial approximations"

- dans a) il y a 9.1 chiffres $10 - 1 = 9$
 b) il y a 90.2 chiffres $100 - 10 = 90$
 c) il y a 900.3 chiffres $1000 - 100 = 900$
 d) et ainsi de suite.

d'où la série $9.1 + 90.2 + 900.3 + 9000.4 + \dots + 9.m.10^{m-1}$.

Il faut trouver une formule qui exprime la somme de cette série !

Pas évident, mais en faisant un détour on voit que :

$$\begin{aligned} 9.1 &= 9 & 10.9 &= 1 & 9 &= 10.1 \\ 9.1 + 90.2 &= 189 & 200.189 &= 11 & 189 &= 200.11 \\ 900.3 + 90.2 + 9.1 &= 2889 & 3000.2889 &= 111 & 2889 &= 3000.111 \\ \text{or } 2889 &= m.10^m - 111, \text{ où } m = 3. \end{aligned}$$

● Ici une autre série apparaît 1, 11, 111, 1111, ... qui est bien plus simple à exprimer :

$$\begin{aligned} 1/9 &= 0,1111111111111111\dots \\ \text{or pour faire } 1 &= E[1/9 \cdot 10^1] = E[1,11111\dots] = 1 \\ 11 &= E[1/9 \cdot 10^2] = E[11,11111\dots] = 11 \\ &\text{et ainsi de suite} \end{aligned}$$

$$\underbrace{111\dots11}_m = E[1/9 \cdot 10^m] = E[\underbrace{111\dots11}_m, 11111\dots]$$

● Et on conclut ainsi :

$$\begin{aligned} 1.9 &= 9 = 1.10 - E[1/9 \cdot 10^m] & m = 1 \\ 1.9 + 2.90 &= 189 = 2.10 - E[1/9 \cdot 10^m] & m = 2 \\ \text{le terme général } m.10^m &- E[1/9 \cdot 10^m]. \end{aligned}$$

● Il ne nous reste plus qu'à assembler les deux bouts de formule.

$$\text{Nombres de chiffres} = (m + 1)(n - 10^m + 1) + m.10^m - E[1/9 \cdot 10^m]$$

où $m = E[\log n]$.

Pour notre exemple $n = 8537$ donc $m = 3$ puis $(3 + 1)(8537 - 10^3 + 1) + 3.10^3 - 111 = 33041$.

D'une manière générale on obtient la formule :

$$y = (E[\log n] + 1)(n - 10^{E[\log n]} + 1) + E[\log n].10^{E[\log n]} - E[1/9.10^{E[\log n]}]$$

où y désigne le nombre des chiffres de l'entier $123\dots n$ associé à μ_n . On en tire facilement le nombre des chiffres significatifs de μ_n . Par exemple $\mu_{10} = 0,123\dots891$ en a 10, alors que la formule donne 11.

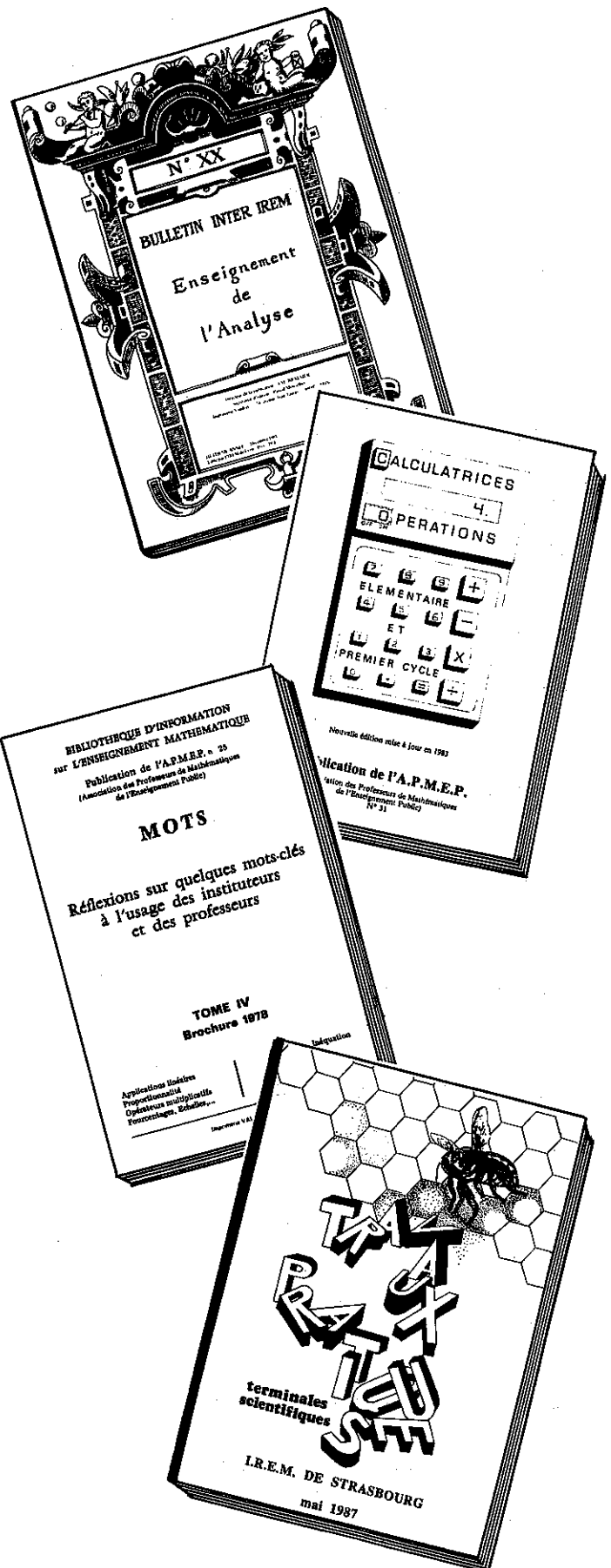
Remarque

On peut représenter bien plus facilement cette formule par un signe de sommation :

$$y = n + \sum_{i=1}^n E[\log i] \parallel$$

$$\text{car } y = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\text{Nombre des chiffres de } i)}_{(E[\log i] + 1)}$$

Mais cette formule n'est pas très facilement calculable. Et le temps de calcul ! La dernière formule est valable car on doit bien sommer tous les chiffres, un à un, jusqu'à n . ■



Les activités ont été vécues aussi dans des classes de perfectionnement, c'est à dire dans des classes où les enfants sont déjà en échec scolaire. Le tâtonnement expérimental est plus long et l'enseignant doit être très vigilant pour que l'outil ne soit pas simplement un jouet muni de boutons-poussoirs mais une véritable aide technique. Les élèves en échec manquent souvent d'attention pour remplir correctement la grille ; certains refusent d'associer papier-crayon-gomme à la calculette, puisque cette dernière est là « pour faire tous les calculs ». Ce passage délicat étant franchi, les enfants font du calcul avec plaisir puisqu'ils réalisent plus souvent des calculs justes. La calculette est un outil qui diminue l'échec scolaire. Le travail par équipe de deux permet en particulier d'associer la vérification à tout calcul écrit. L'utilisation de la calculette dans la construction des nombres décimaux démystifie l'écriture à virgule et évite l'idée que le nombre 16,5 est l'ensemble des naturels 16 et 5 séparés par une virgule.

L'autonomie des enfants dans l'utilisation entraîne pour l'enseignant, un rôle d'animateur vigilant, peu bavard, donc efficace, tout particulièrement dans les synthèses collectives.

Cet aperçu succinct des objectifs et de la méthode nous conduit à présenter maintenant des exemples pris dans des travaux d'élèves dans les rubriques : suites de nombres, prolongement des tables, calcul de différences et à propos de la division.

Suites de nombres - utilisation de l'itération

f	ON	1	+	1	+	1	+	1	+	--	ON	+	1	=	=	=
l	0	1	1	1	2	1	3	1	4	--	0	0	1	2	3	4
m	1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4									0 → 1 → 2 → 3 → 4 a ₁ a ₂ a ₃ a ₄						
	suite des nombres 1, 2, 3, 4, ...									ad1 : additionner 1						

CP (mois de mars) pour écrire et nommer la suite des naturels-utilisation du facteur constant.

CP (juin) CE (1^{er} trimestre). Mêmes exercices avec utilisation du facteur constant. Partir d'un nombre connu et additionner un nombre constant.

Ex. Continuer les suites : 25, 28, 31, ... ; 77, 79, 81, ... ; 10 ; 20 ; 30 ; ... ; ...

f	ON	+	3	=	=	=	=	ON	3	x	1	=	2	=	3	=
l	0			3	6	9	12	0				3	6	9		
m	0, 3, 6, 9, 12, 15 suite des multiples de 3							deux écritures 3x1, 3x2, 3x3, ... de la suite 3 6 9 12 ...								

CE (2^e trimestre). Approche de la multiplication par la suite des multiples d'un nombre.

f	ON	3	+	7	=	=	=	=	-	3	=	=	=	=	=	=
l	0				10	17	24			21	18	15	12	9	6	3
m	-- → additionner 7								-- → soustraire 3							
	3 -- 10 -- 17 -- 24								24 -- 21 -- 18 -- 15 -- 12							
	soustraire 7 <- --								additionner 3 <- --							

CE (2^e année). Suites croissantes et décroissantes. Idem en CM avec des nombres plus grands.

f		3	x	6	=	11	=	16	=	21	=	17	=	13	=	--
l					18	33		48	63		51		39			
m	6 → 11 → 16 → 21 18 → 33 → 48 → 63 multiplier et diviser par 3								21 → 17 → 13 → ... 63 → 51 → 39 → ... soustraire 4 et 12							

CM (2^e année). Comparaison de suites et fonctions numériques.

Construire à partir d'une suite croissante (ou décroissante) une suite croissante (ou décroissante).

f	75.6 ÷ 5	=	=	=	...	75.6 ÷ 3	=	=	=	=
l		15.12			0.6048		25.2	8.4	2.8	0.9333...		
m	suite de nombres décimaux obtenue à partir de 75,6 en divisant par 5						suite de nombres rationnels obtenue à partir de 75,6 en divisant par 3					

CM (2^e année) 6^e-5^e. Décimaux et rationnels non décimaux.

Les propriétés de divisibilité peuvent être étudiées par des exercices semblables.

6^e-5^e. Recherche pour trouver 20 éléments de suites dont le départ est :

50, 60, 64, ... ; 0, 12, 24, ... ; 97, 93, 89, ... ; ...

pour trouver 7 éléments

0 ; 0,1 ; 0,01 ; ... 6,3 ; 5,4 ; 4,5 ; ... 2,5 ; 4 ; 5,5 ; ... 15 ; 14,4 ; 13,8 ; ...

pour trouver 7 éléments

21 ; 7 ; $\frac{7}{3}$; ... 4,6 ; 2,3 ; 1,15 ; ...

pour trouver 10 éléments

7 ; 10 ; 9 ; 12 ; 11 ; 14 ; ... 0,7 ; 1 ; 0,99 ; 1,29 ; 1,28 ; 1,58

Pour ces dernières suites, les calculs machines ont été conduits de diverses manières, certains élèves ont vu l'alternance des termes de deux suites plus simples : 7, 9, 11 et 10, 12, 14 ; 0,7 ; 0,99 ; 1,28 ; et 1 ; 1,29 ; 1,58 ;

Prolonger les tables d'addition et de multiplication

La calculette est un répertoire qui contient les tables et leur prolongement jusqu'aux nombres de huit chiffres.

CP (fin d'année) début CE, prolonger la table d'addition.

f	0N	+	7	=	1	=	2	=	3	=	5	=	8	=	13	=	
1	0				7		8		9		10		12		15		20
m	(a7)-0				1		2		3		5		8		13		(s7)
	↘7				8		9		10		12		15		20		(s7)
	↙																
	additionner 7																soustraire 7

CM : fonctions numériques $x \mapsto x - 7$
 $y \mapsto y - 7$ dans l'ensemble des naturels.

f	7 x 1	=	2	=	0	=	3	=	30	=	40	=	73	=		
1			7		14		0		21		210		280		511	
m	(m7)0				1		2		3		30		40		73	
	↘0				7		14		21		210		280		511	
	↙															
	multiplier par 7															

CE (fin d'année) CM 6^e-5^e. Prolonger la table de multiplication.

- fonctions numériques, $x \mapsto x \times 7$ et $y \mapsto y : 7$
 - utilisation des propriétés des opérations
 «+» et «x»

↗	0	10	20	30	40	50	60	70	↘
+	0	3	6	9	12	15	18	21	↘
+	0	7	14	21	28	35	42	49	↘

CE. CM. 6^e. 5^e : Comparer trois suites de multiples pour constater qu'il suffit de connaître les tables de multiplication de 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Disposer comme ci-contre pour retrouver $x \mapsto x \times 7$

CM. 6^e. 5^e : Des exercices semblables sont faits avec les décimaux, il suffit de les écrire sous forme de quotients $x/10^n$ où x et n entiers.

Calcul de différences

CE : lire autrement la table d'addition, par exemple la ligne 7 de cette table en écrivant :

$7 = 7 - 0 = 8 - 1 = 9 - 2 = 17 - 10 = 18 - 11 = 1650 - 1643 = \dots$

Si l'on pense à la disposition pratique habituelle, la différence 1650-1643 se calcule à la main par la «soustraction à retenue» alors que ce n'est pas le cas de 18-11.

Les enfants constatent l'existence de la propriété connue et formalisée au collège :

Dans \mathbb{N} si $a \geq b$ alors $a - b = (a + c) - (b + c)$

et si $a \geq b, b \geq c$ alors $a - b = (a - c) - (b - c)$

Le calcul occupe beaucoup de temps au CE parce que les enfants ont l'impression qu'il y a plusieurs soustractions : sans retenue, à une retenue, deux retenues, trois retenues, ... bien que toutes correspondent à la même définition. La calculette permet de vivre rapidement l'existence de plusieurs dispositions pratiques pour calculer une différence.

Ensuite le calcul mental soutient le calcul réel. Par exemple soit à calculer : 6342 - 2758.

a2	a40	a200	s3000
6342	→6344	→6384	→6584
2758	→2760	→2800	→3000
			→ 0
a2	a40	a200	s3000
s2000	s700	s50	s8
6343	→4342	→3642	→3592
2758	→ 758	→ 58	→ 8
			→ 0
s2000	s700	s50	s8

ou bien combiner les fonctions s et a, en commençant par 58 (60-2) puis 2700 (3000 - 300).

Remarque. Cette méthode plus sûre plaisait aux enfants, cependant pour satisfaire le conservatisme actuel, les enseignants ont malgré tout mis en place la «ritournelle» classique. Pourtant, la méthode exposée ci-dessus a heureusement conforté les aptitudes en calcul de beaucoup d'enfants.

A propos de la division euclidienne

CE. CM. 6^e. 5^e. Lire autrement la table de multiplication, par exemple la ligne 7 de cette table en écrivant suivant la classe :

$$7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{210}{30} = \frac{2800}{400} = \frac{3031}{433} \text{ ou } 7 = 14 : 2 = 210 : 30 = 2800 : 400 =$$

Toutes ces divisions exactes admettent le même quotient 7. Le schéma mathématique présenté ci-dessus avec la table de 7 faisant apparaître

$433 = 400 + 30 + 3$ permet de mettre en place la disposition pratique.

L'écriture fractionnaire des quotients prépare à la simplification des fractions ainsi qu'à la propriété connue et formalisée au Collège.

Dans \mathbb{N} si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

et si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

$$\begin{array}{r|l} 3031 & 7 \\ -2800 & 400 + 30 + 3 \\ \hline 231 & \\ -210 & \\ \hline 21 & \\ -21 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Les enfants recherchent des exemples et en partant de 78 à la calculette ils construisent des couples (Dividende, diviseur) avec des nombres de plus en plus grands. En s'aidant de la divisibilité ils écrivent dans l'autre sens $2808 : 36 = 1404 : 18 = 702 : 9 = 234 : 3 = 78$

CE. CM. L'approche de la division euclidienne part d'un constat : la table de 7, la suite des multiples de 7 ne contient pas tous les naturels, il y a des trous. Les enfants ont cherché des écritures possibles d'égalités telles que : $35 = 7 \times 5$, $36 = (7 \times 5) + 1$; $37 = (7 \times 5) + 2$... $41 = (7 \times 5) + 6$, $42 = 7 \times 6$.

Le calcul d'un quotient et d'un reste est associé à la suite des multiples du diviseur ou la table du diviseur.

Voici les calculs par un élève de CM : 81 divisé par 13.

f	+	13	=	=	=	=	=	=	=	-13	=	M+	81	-	RM	=
1			13	26	39	52	65	78	91		78					3
m	$78 < 81 < 91$ $13 \times 6 < 81 < 13 \times 7$ $81 = 13 \times 6 + 3$ on compte les touches =															

CM 2. 6^e. 5^e. Exemple de calcul pour la division de 23742 par 76 lorsqu'on est habile .

f	+	7600	=	=	=	+ 760	=	+76	=	M+	23742	-	RM	=
1			7600	15200	22800	23560	23636	23712						30
m	$7600 \times 3 < 23742 < 7600 \times 4$; $760 < 958 < 760 \times 2$; $76 \times 2 < 98 < 76 \times 3$ $23742 = 22800 + 958$ $958 = 760 + 198$ $198 = 76 \times 2 + 30$ $23742 = (7600 \times 3) + (760 \times 1) + (76 \times 2) + 30 = (76 \times 312) + 30$													

remarquons d'abord que 23742 est dans l'un des trous compris entre 76000 et 7600.

$$23742 = (7600 \times 3) + (760 \times 1) + (76 \times 2) + 30 = (76 \times 312) + 30$$

f	23742 - 7600	=	=	=	- 760	=	- 76	=	=
1		16142	8542	942	182		106	30	
m	$23742 = 76 \times 312 + 30$								

Ou encore, on s'intéresse au reste en soustrayant des multiples du diviseur.

L'ensemble de ces deux tableaux permet d'écrire la disposition pratique :

$$\begin{array}{r|l} 23742 & 76 \\ -228 & 312 \\ \hline 942 & \\ -76 & \\ \hline 182 & \\ -152 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

Bibliographie :

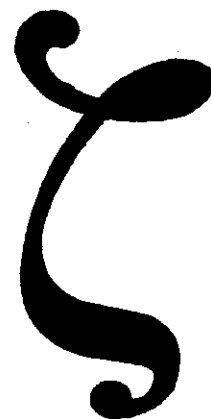
- la division à l'école élémentaire Elem. Math III
- MOTS IV (approximation, opérateurs)
- PLOT N° 3 et 10 (bouliers)
- Dictionnaire de l'APMEP Approximations. ■

Jacques LUBCZANSKI



ZIXIEME lettre de l'alphabet grec, zeta (prononcer «dzeta») est le nom d'une fonction mathématique étudiée par Léonhard Euler au XVIII^e siècle...

...et qui, malgré les travaux acharnés de nombreux mathématiciens, ne nous a pas encore livré tous ses secrets !



La fonction ζ est définie par

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$$

lorsque cette somme infinie a un sens,

(c'est-à-dire lorsque la somme finie $\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x}$

a une limite quand n tend vers l'infini).

L'objet de ce travail est l'étude d'une valeur approchée, puis de la valeur exacte de

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

A - ETUDE DE LA SUITE : $v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1 - Soit f la fonction en escalier définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in [n, n+1[\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n^2}$$

Dessiner la courbe représentative de f ; calculer

$$\int_n^{n+1} f(x) dx.$$

2 - Montrer que $\forall x > 1$, on a la double inégalité

$$\frac{1}{(x-1)^2} > f(x) > \frac{1}{x^2}$$

En déduire un encadrement de $\frac{1}{n^2}$ par deux intégrales.

3 - Etudier la convergence de la suite

$$\text{pour } n \geq 1 : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

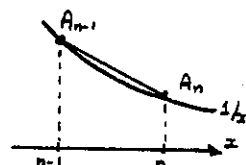
B - ENCADREMENTS DE $\zeta(2)$

1 - Dédurre de la question A 2 un encadrement de la

$$\text{somme } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

2 - Soit A_n le point de coordonnées $(n, 1/n^2)$ et la fonction dont la restriction à l'intervalle $[n-1, n]$ est représentée par le segment de droite $[A_{n-1}, A_n]$.



$$\text{Calculer } \int_{n-1}^n f(x) dx$$

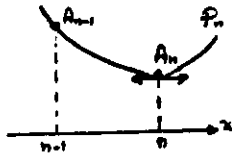
Montrer qu'on a :

$$\int_{10}^n f(x) dx = v_n - \sqrt{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Comparer $f(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; minorer v_n , pour $n > 10$.

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

3 - Soit P_n la parabole d'axe vertical, de sommet A_n , et passant par A_{n-1} ; soit ψ la fonction dont la restriction à l'intervalle $[n-1, n]$ est représentée par l'arc $\overline{A_{n-1} A_n}$ de la parabole P_n .



Calculer l'équation de P_n dans un repère d'origine A_n .

Calculer $\int_{n-1}^n \psi(x) dx$

Montrer que :

$$\int_{10}^n \psi(x) dx = \sqrt{n} - \sqrt{10} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Comparer $\psi(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; majorer n , pour $n > 10$

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

C. CALCUL DE LA VALEUR DE $\zeta(2)$

1 - Calculer, à l'aide d'intégration par parties,

$$\int_0^\pi x \cos(nx) dx \text{ et } \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$$

En déduire qu'on peut trouver a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^\pi (ax^2 + bx) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2}$$

2 - Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) =$

$$\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Montrer que, si on pose, pour $x \in]0, \pi[$,

$$g(x) = \frac{ax^2 + bx}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

On a l'égalité :

$$\sqrt{n} = \int_0^\pi g(x) \cdot \sin[(n + \frac{1}{2})x] dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi (ax^2 + bx) dx$$

3 - Montrer que, si on pose $g(0) = b$, g est continue et dérivable sur $[0, \pi]$, et g' est continue.

En déduire que :

$$\int_0^\pi g(x) \cdot \sin[(n + \frac{1}{2})x] dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(b + \int_0^\pi g'(x) \cdot \cos[(n + \frac{1}{2})x] dx \right)$$

Quelle est la limite de cette expression quand n tend vers l'infini ?

En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

En 1736, dans le dixième volume des "Institutions du Calcul Différentiel", L. Euler calcule la valeur de la fonction ζ pour les entiers pairs :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$$

Dans cette formule, les nombres B_{2n} sont les "nombres de Bernoulli", introduits en 1713 par Jacob Bernoulli... pour calculer autre chose !

Ces nombres se calculent de proche en proche par la formule :

$$\sum_{k=0}^n C_{n+1}^k B_k = 0$$

On trouve $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{6}$... puis tous les B_k avec k impair sont nuls...

Calculer des valeurs approchées de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$... avec la formule d'Euler.

Quant aux valeurs de ζ pour les entiers impairs... on ne connaît toujours pas leurs valeurs !

Le résultat le plus récent (R. Apéry, 1978) dit seulement que $\zeta(3)$ est un irrationnel.

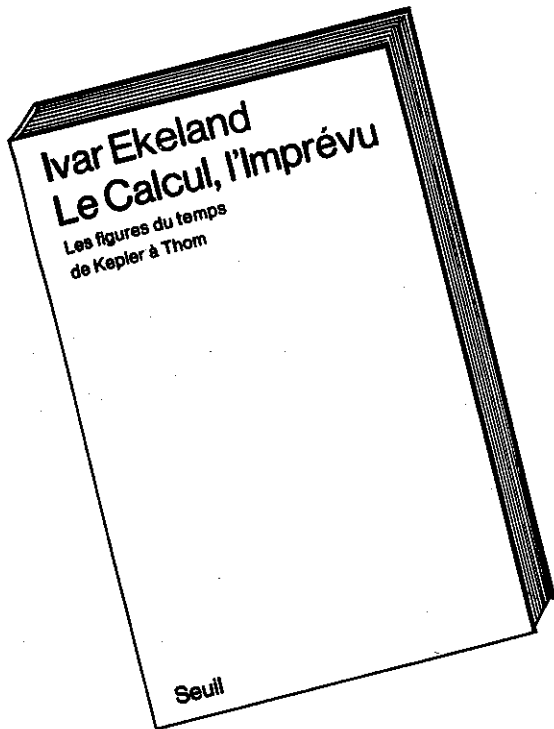
Les recherches sur la fonction ζ ont pris une autre direction : on peut définir $\zeta(x)$ pour x réel, $x > 1$ et aussi pour x complexe. Et on a pu mettre en évidence des liens étroits entre les racines dans \mathbb{C} de l'équation $\zeta(z) = 0$ et la répartition des nombres premiers parmi les entiers !

Le problème le plus important dans ce domaine est d'arriver à prouver - ou à réfuter - une conjecture de Bernhard Riemann (1826-1866) :

"les racines complexes de $\zeta(z) = 0$ vérifient : $\text{Re}(z) = 1/2$ "

L'exploration systématique des racines de $\zeta(z) = 0$ avec un ordinateur a donné raison à Riemann pour les 3 500 000 premières racines. Et après ?

(Référence : F. Le Lionnais "les nombres remarquables" p. 27).



Dans son livre Ivar Ekeland, mathématicien de l'Université Dauphine, nous fait une magistrale démonstration de l'art de vulgariser les connaissances scientifiques. Cette qualité, qui lui a valu le prix J. Rostand 1985, est d'autant plus rare actuellement que peu de scientifiques osent s'y confronter laissant la place aux journalistes dits scientifiques.

Qu'est-ce qu'une théorie scientifique ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? L'Univers est-il déterministe ? Y a-t-il encore une part d'imprévu ? A travers le Temps et l'Espace, l'Histoire et la Science, I. Ekeland nous décrit comment les hommes, savants et chercheurs, ont illustré ces questions par des représentations successives, s'appuyant sur des théories mathématiques disponibles à ce moment-là ou créées pour cela.

Du mouvement des astres et des planètes à la théorie des catastrophes, l'auteur nous fait évoluer des premières théories scientifiques du type déterministes (Aristote de Samos, Copérnic, Képler, ...) aux théories actuelles plus... aléatoires ! La théorie des catastrophes de Thom mais aussi les attracteurs étranges et les problèmes et découvertes qui en découlent.

Pour les enseignants de Lycée, il nous propose même une annexe sur la constante de Feigenbaum qui pourrait faire un excellent thème de travail dès la seconde débouchant sur une réflexion scientifique qui est loin d'être inintéressante (du type petites causes - grands effets).

Cf. bulletin APM n° 350 - sept. 85 - p. 649.

Dans ce livre G. Th. Guilbaud nous donne de «rigoureuses» leçons d'à peu près, montrant à travers l'histoire que la rigueur mathématique est plus liée aux problèmes d'approximation qu'à l'établissement de «vérités» dites «mathématiques».

Exemples en sciences sociales :

«Vérité des chiffres : ... la vérité, s'il y en a une, c'est qu'il n'y a pas dans ce domaine de certitude statistique. Chacun, dès lors, peut se risquer à avancer son propre chiffre. Avec les réserves d'usage, celui qu'on peut estimer le plus juste, ou le moins inexact, tourne autour de quatre millions, sans doute un peu moins...»

En astronomie (ou l'on retrouve Ekeland) :

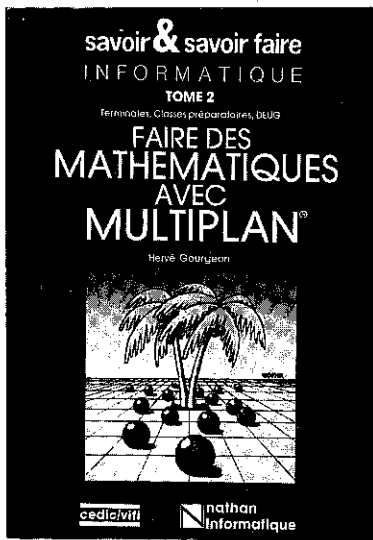
«L'orbite d'un satellite artificiel est, en première approximation, une ellipse ; les orbites sont liées entre elles par la troisième loi de Kepler, ici pratiquement rigoureuse, les masses des satellites étant négligeables devant celle du corps central...»

En mathématique où l'auteur cite Dieudonné (calcul infinitésimal, Hermann, 1968) :

«Il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable. En d'autres termes, le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et pourrait se résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher.»

A travers son livre G. Th. Guilbaud, nous donne une mine d'idées, d'activités numériques pour la classe. En commençant par pi noté π depuis... (combien de) siècles ? en passant par les racines carrées, cubiques, les élections (et oui encore !) et les harmonies musicales. Vous y trouverez toute une série de problèmes itératifs et récurifs que vos élèves pourront aborder avec leurs calculatrices (mais en ont-ils encore) ou leurs micros !

M. Laure Darche Giorgi ■



Depuis l'arrivée du matériel IPT dans les établissements scolaires, les tableurs sont utilisés ici ou là par les professeurs de mathématiques.

Quelques documents, photocopiés ou brochures de divers centres comme celui du Cueep et de l'Irem de Lille («à propos du support tableau en maths» 1987) donnaient des exemples d'utilisation.

Voici qu'apparaissent en librairie les premiers livres consacrés à ce sujet : «Faire des Mathématiques avec Multiplan» en deux tomes ; l'un de Marc Laura (niveau secondes à terminales), l'autre d'Hervé Gourjeon (terminales, niveau classes préparatoires et Deug).

Ces deux ouvrages sont édités chez Cedic/Vifi - Nathan informatique. Sans doute, la volonté de les rendre indépendants a amené à quelques redites : une première partie (presque la moitié de l'ouvrage dans le tome 1, une trentaine de page dans le second) est un guide pour s'initier au tableur. Cette première partie est suivie, dans chaque livre, par un chapitre de conseils sur la réalisation d'un modèle de feuille de calcul, chapitre utile pour les débutants. Suivent, dans chaque tome, de nombreux exemples de réalisation de feuilles de calcul.

Les feuilles du premier tome sont données sous forme brute : il n'y a pas d'explication mathématique, et c'est dommage, par exemple pour un élève qui désirerait travailler seul. Par contre les feuilles du tome 2 sont introduites à partir de situations mathématiques exploitables dans les classes.

Peut-être quelques points faibles :

- pour bien maîtriser l'ITERATION de Multiplan (cas auquel Multiplan n'est plus vraiment utilisé comme tableur, la programmation redevenant impérative), il vaut mieux savoir que celui-ci calcule colonne par colonne !

- la méthode des isopérimètres peut se traiter par une suite double récurrente, on ne connaît pas de formule sommatoire pour les nombres de Stirling.

- Avouons aussi la surprise d'apprendre que les nombres algébriques ont des développements ^{en p} tout professeur de mathématiques devrait avoir connaissance.

Ces deux livres peuvent aider professeurs et élèves dans l'approche de cet outil et de son utilisation facile dans et hors la classe.

On peut le recommander pour une première approche de «tableurs et mathématiques» en attendant le numéro spécial co-édité par «le Plot» et «La Source» des informations sur la pédagogie de l'informatique. (Cf. Plot 40 p. 10).

Calcul des nombres de Stirling S_n^p de deuxième espèce.

Ils sont définis par :

$$S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + p \times S_{n-1}^p$$

$$S_{n,1} = 1 \text{ pour } n \geq 1$$

$$S_{1,p} = 0 \text{ pour } p > 1$$

Ils servent à résoudre des problèmes de dénombrement comme :

- Nombre de partitions d'un ensemble (il est donné par la somme de la ligne $n + 3$).

Ces nombres s'appellent nombres de BELL ; les sept premiers sont 1 ; 2 ; 5 ; 15 ; 52 ; 203 ; 877.

- Nombre de surjections d'un ensemble sur un autre. Ce nombre \sum_n^p est donné par la formule récurrente : $p^* (\sum_{n-1}^{p-1} + \sum_{n-1}^p)$.

Ce nombre vaut $p!S_n^p$

(comme dit l'auteur, une surjection c'est p images réciproques qui forment une partition de l'ensemble de départ, mais ordonnées (il y a $p!$ classements distincts et c'est bien plus difficile que les questions de nombres d'applications ou d'injections que l'on pose habituellement !)

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0							
1		1					
2		1	1				
3		1	3	0			
4		1	7	6	0		
5		1	15	25	10	0	
6		1	31	90	65	15	0
7		1	63	301	350	140	21
8		1	127	966	1701	1050	266
9		1	255	3025	7770	6951	2646
10		1	511	9330	34105	42525	22827
11		1	1023	28501	145750	246730	179487
12		1	2047	86526	611501	1379400	1323652
13		1	4095	261625	2532530	7508501	9321312
14		1	8191	788970	10391745	40075035	63436373
15		1	16383	2375101	42355950	210766920	420693273
16		1	32767	7141686	171798901	1,095E+09	2,735E+09
17		1	65535	21457825	694337290	5,653E+09	1,751E+10
18		1	131071	64439810	2,799E+09	2,896E+10	1,107E+11
19		1	262143	193449101	1,126E+10	1,476E+11	6,931E+11
20		1	524287	580605446	4,523E+10	7,492E+11	4,306E+12

n = 20
p = 5 $S_{n,p}$ 7,492E+11

En élargissant les colonnes 4, 5, 6, on aurait obtenu l'écriture entière des nombres en bas de colonne).

Jean-Marie Chevallier ■

APPROXIMATIONS ET TABLEURS

COLLEGES

Jean-Marie CHEVALLIER - Orléans



N attendant un futur, mais proche, numéro spécial sur "Maths et tableurs" coproduit avec le bulletin enseignement et informatique "La Source" (cf. publicité in Plot 40 - page 10), l'un des membres de cette équipe nous livre, en avant-première, deux exemples d'utilisation du tableur Multiplan en Collège.

1 - Les fractions Egyptiennes

Les Egyptiens de l'empire n'utilisaient que des fractions de numérateur 1 (sauf $2/3$!).

Une fraction quelconque s'exprimait comme somme de fractions de numérateur 1. Pour les calculs, ils utilisaient des tables donnant une décomposition des fractions de type $\frac{2}{n}$. Les calculs sur les fractions n'en étaient pas simplifiés, d'autant qu'ils utilisaient des fractions de l'unité de dénominateurs distincts.

Il n'est pas évident, au départ, que tout rationnel compris entre 0 et 1 puisse s'exprimer comme somme de fractions unitaires distinctes.

Le premier algorithme décrit se trouve chez **Léonard de Pise**, qui utilisait ce type de décomposition.

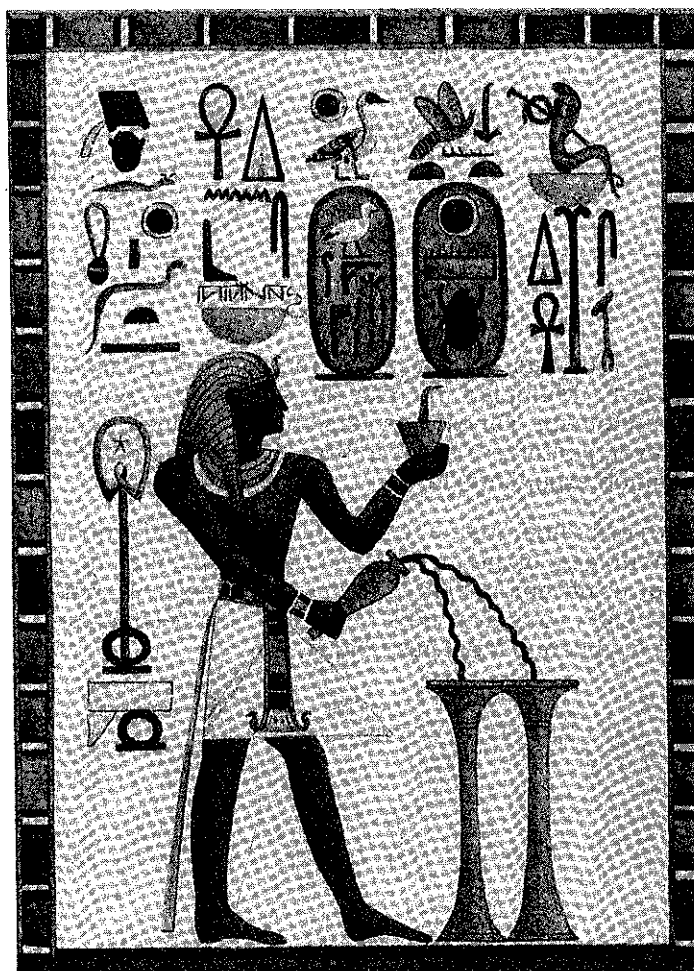
L'algorithme fut redécouvert et prouvé par **Sylvester** en 1880.

L'idée est simple :

si a/b est la fraction, on prend pour premier terme la plus grande fraction unitaire inférieure à a/b . On soustrait cette fraction unitaire de a/b , et on recommence avec la fraction obtenue.

La démonstration se fait en raisonnant à partir de la division euclidienne de b par a .

Je laisse le plaisir au lecteur de s'en convaincre. Cet algorithme se déclare sans problème dans Multiplan (la recopie de colonne permettant de "recommencer avec la fraction obtenue...").



Voici le tableau des formules ; on introduit le numérateur et le dénominateur du rationnel à décomposer en ligne 1 colonne 2 et ligne 2 colonne 2 respectivement.

Le résultat se lit dans les lignes 5-6. Une tentative de convivialité a consisté à écrire le texte "+ 1/" dans

chaque case de la ligne 5, au dessus du dénominateur correspondant. Le processus s'arrête lors du test en haut de chaque colonne ; s'il n'y a plus rien à calculer, on y met un **texte vide**. Les cases de la même colonne qui calculent avec le contenu numérique de la première case indiquent un profond mécontentement en affichant le message d'erreur **VALEUR !**

	1	2	3
1 "num">	111		SI(LC(-1)=L(+2)C(-1);"";L(+2)C(-1))
2 "denom">	137		L(+2)C(-1)#LC(-1)
3 "a-r">	L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)		L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)
4 "q+1">	1+(L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C		1+(L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C
5	" + 1/"		" + 1/"
6	SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)		SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)

Et voici deux calculs :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1 num>	131	125	101		87	84		72		36	VALEUR!	
2 denom>	137	274	822		7398	636228		4819427100		322595524246025000	2,891E+33	VALEUR!
3 a-r>	125	101	87		84	72		36		36	VALEUR!	VALEUR!
4 q+1>	2	3	9		86	7575		66936488		8960986784611800	VALEUR!	VALEUR!
5		+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/		+ 1/	+ 1/	1/
6		2	3	9	86	7575		66936488		8960986784611800	VALEUR!	REF!

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1 num>	111	85	66		26	10		6	
2 denom>	137	274	1096		18632	13359144		17846680856760	5,308E+25
3 a-r>	85	66	26		10	6		6	VALEUR!
4 q+1>	2	4	17		717	1335915		2974446809461	VALEUR!
5		1/	1/	1/	1/	1/		1/	1/
6		2	4	17	717	1335915		2974446809460	VALEUR!

Il ne faut pas vouloir aller trop loin en nombres entiers : Multiplan ne calcule en nombre entiers correctement, suivant les versions et les opérations, qu'avec quatorze à seize chiffres. Il passe au delà en notation exponentielle.

Dernière remarque : c'est un algorithme. En le modifiant un peu, on peut en trouver des dérivés menant à d'autres décompositions : comme on l'a déjà vu (cherchez bien, vous avez déjà rencontré...) la décomposition égyptienne n'est pas unique.

Bibliographie

- "Fractions Egyptiennes", in *Histoire de Mathématiques pour les collèges CEDIC*
 - "Mains casse-tête et problèmes sur les nombres issus de curieuses fractions utilisées dans l'Egypte Ancienne" in *Jeux Mathématiques par Martin Gardner* - Editions "Pour la Science", reprise d'articles du n° Décembre 78.
 - "1932 exercices posés à l'oral du CAPES"
- Luc Moissette
et, dans nos régionales :
- Taol Lagad : bulletin de l'Irem de Brest n° 50 et 51 - 1987
 - Compte-rendu de l'Université d'été "Histoire des maths" 84 - Irem du Mans - 1986
 - Algèbre et calcul en Egypte antique. Irem de Lyon - 1986.
 - Cahiers d'histoire des Maths - Irem de Poitiers - 1980

2 - L'inverse d'un nombre par des multiplications

La méthode de Newton (encore elle !) permet de calculer l'inverse d'un nombre en utilisant uniquement des multiplications.

On montre, sans trop de peine (ndlr : pour ceux qui peinent, le dire à l'auteur !), que la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 \in [0, \frac{2}{b}] \\ a_{n+1} = a_n (2 - b \times a_n) \end{cases}$$

converge vers $1/b$. On peut obtenir cette suite en cherchant, par Newton, les solutions de l'équation

$$\frac{1}{x} - b = 0$$

Un logiciel de bon aloi, PHASER, appelé à la rescousse, peut d'ailleurs nous donner une image graphique "en escalier" de la suite ainsi définie, ainsi que les quinze premières valeurs obtenues pour $b = 0,425$, $a_0 = 0,1$.

On peut y vérifier que la tangente au point d'intersection de $y = x$ et $y = x(2 - bx)$ est horizontale, et que le nombre de décimales exactes y double à chaque étape.

EQUATION = invers
PARAMETERS:
b = 0.425000

TIME = 7.000000
IC 1: x1 = 2.3438760212

TIME = 8.000000
IC 1: x1 = 2.3529062512

TIME = 0.0
IC 1: x1 = 0.1000000000

TIME = 9.000000
IC 1: x1 = 2.3529411760

TIME = 1.000000
IC 1: x1 = 0.1957500000

TIME = 10.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

TIME = 2.000000
IC 1: x1 = 0.3752148234

TIME = 11.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

TIME = 3.000000
IC 1: x1 = 0.6905955273

TIME = 12.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

TIME = 4.000000
IC 1: x1 = 1.1784991271

TIME = 13.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

TIME = 5.000000
IC 1: x1 = 1.7667326724

TIME = 14.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

TIME = 6.000000
IC 1: x1 = 2.2068940021

TIME = 15.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

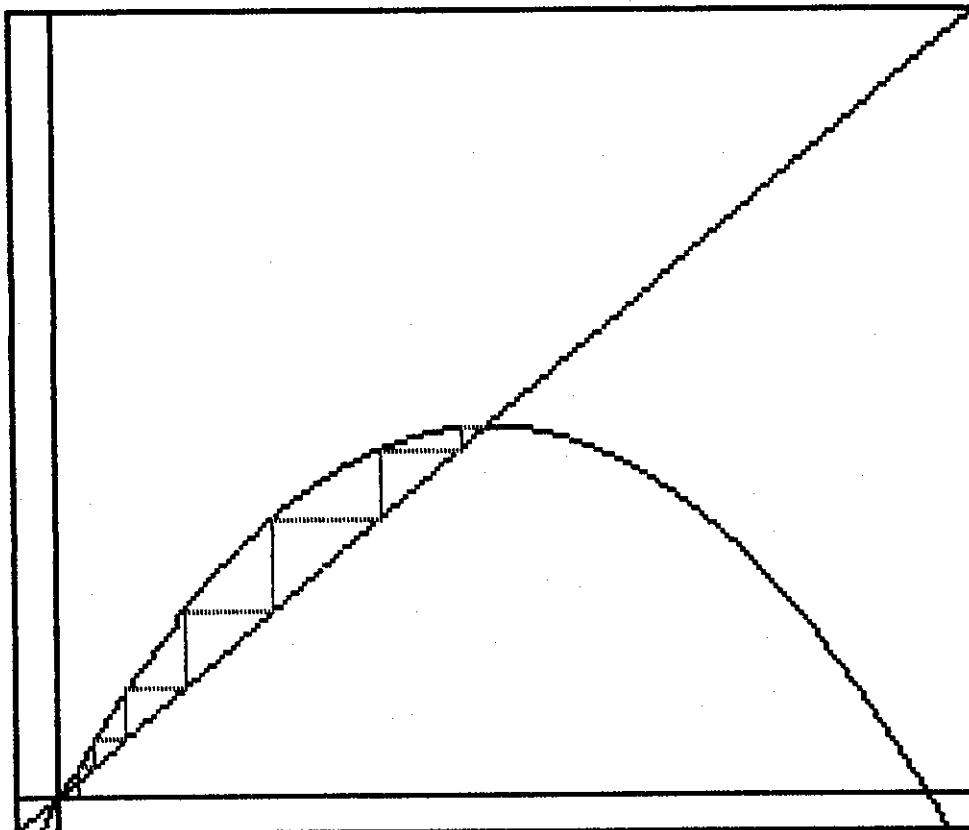
Multiplan peut nous permettre, à peu de frais, une visualisation numérique pour une série de valeurs initiales, pouvant mettre en évidence plusieurs propriétés de cette suite :

si $a_0 < 0$ la suite à l'air de diverger
 $a_0 = 0$ suite constante nulle

$\frac{2}{b} > 0$, même petit : convergence vers $1/b$

$a_0 = \frac{2}{b}$: retour à l'origine !

$a_0 = \frac{2}{b}$: divergence rapide vers $+\infty$



- ligne 7 colonne 3 on y place la première valeur initiale
- ligne 8 colonne 2 on a nommé la cellule PAS et l'on y place (on change) la valeur numérique du pas de parcours des valeurs initiales
- ligne 9 colonne 2 on a nommé la cellule B, et on y place le nombre à inverser.

Dans les cellules suivant la ligne 7, on place la formule LC (-1) + pas [ajoute à la valeur de la cellule précédente de la même ligne la valeur qui se trouve dans la cellule de nom : PAS !].

La formule fondamentale $L(-1) \cdot C + (2 - B \cdot L(-1) \cdot C)$ est placée en ligne 8 colonne 4, recopiée vers le bas le nombre de fois désiré et la colonne de formule recopiée dans les colonnes suivantes en une seule commande. La colonne 3 est un compteur précisant l'indice i de l' a_i .

Voici le tableau des formules :

	1	2	3	4	5
7		"x0 = "	6		LC(-1)+pas
8	"pas = "	0,6	1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
9	"nombre B = "	0,234567	L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
10			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
11			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
12			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
13			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
14			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
15			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
16			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
17			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)
18			L(-1)C+1	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)	L(-1)C+(2-B*L(-1)C)

Voici un des tableaux obtenu, en partant de la valeur initiale 6 (calcul dans la colonne) et avec les autres valeurs initiales obtenues par addition du pas.

On peut y voir la convergence (d'ailleurs de plus en plus lente) pour les valeurs initiales comprises entre 0 et 2/b, et une divergence rapide pour les valeurs plus grandes que 2/b. Pour voir les autres cas, il suffit de changer valeur initiale et pas sur une feuille de calcul assez grande.

Bibliographie :

- "Analyse 1" Léonard Epistemon CEDIC Nathan.
- "Mathématiques et Informatique" Arthur Engel CEDIC Nathan. 1986 - 2^e édition.
- "Faire des Mathématiques avec Multiplan" t1 et 2 - CEDIC/VIFI - Nathan Informatique. 1987.

Avec un guide pour apprendre Multiplan, cf. Aplostrophe dans ce même numéro du Plot.

Et, bien entendu, la documentation Multiplan fournie avec le logiciel par la maison MICROSOFT !

CALCUL DE L'INVERSE D'UN NOMBRE PAR LA METHODE DE NEWTON									
	pas = 0,6		nombre B = 0,234567						
x0 =	6	6,6	7,2	7,8	8,4	9	9,6	10,2	
1	3,555588	2,98226148	2,24004672	1,3289437	0,2489525	-0,999927	-2,417695	-4,004351	
2	4,14573165915931	3,87831138082413	3,30308096410132	2,2436207	0,4833671	-2,234387	-6,206492	-11,76994	
3	4,25993894612457	4,22843034002937	4,04695530107103	3,3064701	0,9119291	-5,639846	-21,44863	-56,03481	
4	4,26317181900664	4,26289111886556	4,23220811589978	4,0484791	1,6287889	-18,74076	-150,8083	-848,5865	
5	4,26317427429974	4,26317425549428	4,26314606606421	4,2523621	2,6352825	-119,8653	-5636,411	-170608,7	
6	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427411451	4,2631469	3,6415643	-3609,915	-7463261	-6,83E+09	
7	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,1725378	-3063977	-1,31E+13	-1,09E+19	
8	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2612473	-2,2E+12	-4E+25	-2,81E+37	
9	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631734	-1,14E+24	-3,76E+50	-1,85E+74	
10	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-3,03E+47	-3,3E+100	-8E+147	
11	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-2,16E+94	-2,6E+200	-1,5E+295	
12	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-1,1E+188	NUM!	NUM!	
13	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
14	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
15	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
16	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
17	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
18	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
19	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!	
	inverse de L19C4 =	0,234567	précision = 2,776E-17						

TABLEURS ET GRANDS NOMBRES



Jacques PINAUD - Dreux



OICI de petits programmes développés pour apprendre à utiliser les tableurs Multiplan avec, en arrière plan, le souci pédagogique de montrer la souplesse de l'outil à travailler avec les grands nombres. Le tableur, feuille de calcul automatique et électronique, permet de présenter les résultats sans les problèmes d'affichage qui sont la plaie des débutants sur des langages type Basic.

La feuille de calcul

Elle se présente sous forme de case, appelées cellules, repérables par leurs coordonnées (ex : L3C2), que l'on peut remplir par des mots, des nombres ou des formules.

	C1	C2	C4	C5
L1				
L2				
L3		x		
L4				

Le contenu d'une cellule peut être utilisé pour le calcul du contenu d'une autre par l'intermédiaire d'un nom qui lui est donné ou de ses coordonnées absolues ou relatives.

Muni de ces quelques notions, on peut rapidement utiliser Multiplan et découvrir sa puissance de calcul et ses limites.

Puissance d'un nombre

Calculons les puissances de 2 jusqu'à 2^{90} .
Placez-vous en L1C1 et tapez 1
Descendez en L2C1 et tapez 2
Donnez lui le nom A.
Dans L3C1, il s'agit de calculer 2^2 , c'est-à-dire la case du dessus multipliée par 2. Pour cela tapez «=» puis indiquez avec vos flèches ou cliquez avec votre souris la case du dessus puis tapez «*» et «A», passez à la cellule du dessous. 4 s'affiche dans L3C1. On recopie alors, au moyen de la commande Recopie, la cellule L(-1)C*A dans les cellules en dessous jusqu'à la ligne 90 et les puissances de 2 s'affichent plus vite que l'éclair !

Mais, surprise, en élargissant les colonnes au maximum on s'aperçoit qu'à partir de la puissance 49, le

résultat est arrondi à la dizaine. Seuls, 13 chiffres significatifs apparaissent. Pour s'en sortir une seule solution :

Calculer par tranches

xxx	xxxxxxxxxxx	LC(-2)*A	LC(-2)*A	ENT(LC(-1)/E)
L(-1)C(+2)	L(-1)C(+2)			
+L(-1)C(+4)	-L(-1)C(+3)			

E désigne la case où vous placez 10^{10} et Ent(LC(-1)/E) désigne la retenue partie entière au-dessus de 10 chiffres.

En répétant ces formules vers le bas (toujours par la commande recopie), on obtient les puissances suivantes jusqu'à 20 chiffres significatifs. L'extension à plus de chiffres se conçoit sans problème par répétition de la procédure sur une autre colonne.

Remarque :
Pour faire la mise au point il vaut mieux utiliser des colonnes larges de 3 caractères avec E = 10.

Puissances de 2		
multiplications par tranches de 13 chiffres		
0	0	1
1	0	2
2	0	4
3	0	8
4	0	16

43	0	8796093022208
44	1	7592186044416
45	3	5184372088832
46	7	368744177664
47	14	737488355328
48	28	1474976710656
49	56	2949953421312
50	112	58999068421312

CALCUL DES VARIATIONS ET BRACHYSTOCHRONE



ES problèmes d'extrema ont une histoire qui remonte à la période grecque. Ainsi les problèmes isopérimétriques connus depuis l'Antiquité : de toutes les courbes simples et fermées de périmètre fixé, c'est le cercle qui a la plus grande aire. Euclide prouve, au III^{ème} siècle avant notre ère, ce résultat dans le cas des rectangles (cf. PLOT n° 33 - Décembre 85).

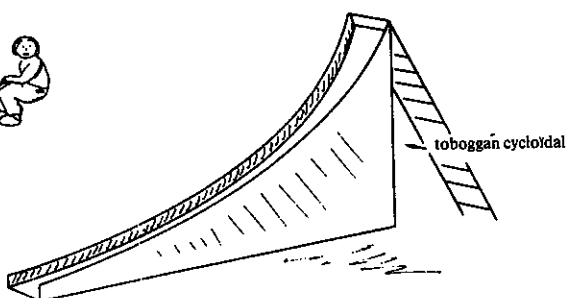
C'est Fermat, au XVII^{ème} siècle, qui donne la traduction analytique de la méthode d'Euclide dans laquelle l'aire A est donnée par l'expression : $A(x) = x \cdot (a - x)$, dans laquelle a désigne le demi-périmètre fixé de chaque rectangle. Il relie les points stationnaires de la courbe $(x, A(x))$ aux points qui ont une tangente horizontale, c'est-à-dire aux points où la dérivée est nulle : $A'(x) = 0$.

Euler, au XVIII^{ème} siècle, formule le problème général d'extrema pour des fonctions données par des intégrales et déduit la condition analogue à $A'(x) = 0$. Ces équations appelées différentielles doivent être satisfaites par des solutions à des problèmes de «variations». L'artillerie analytique appliquée à ces problèmes est appelée «calcul des variations».

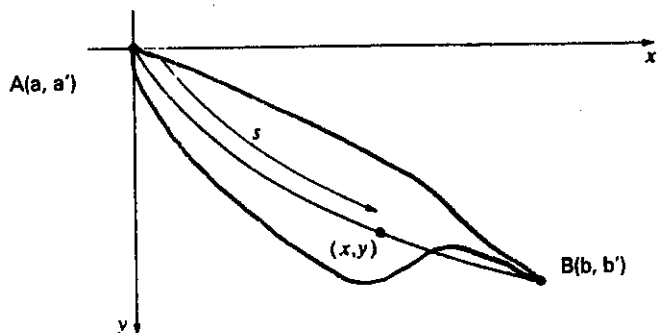
Pour rendre compréhensible l'important apport d'Euler, passons en revue des problèmes célèbres comme celui du brachystochrone, rendu célèbre par Bernoulli (Jean) en 1696 et qui donna naissance au calcul des variations :

quelle est la courbe qui permet à une bille de glisser le plus vite d'un point $A(a, a')$ au point $B(b, b')$?

enfant innocent



Pour résoudre ce problème, on calcule, pour toutes les courbes qui joignent A et B , le temps mis par la bille. On calcule ensuite les conditions pour obtenir le temps minimum et, pour cela, on mesure la variation de temps provoquée par une petite variation de la courbe. D'où le nom de «calcul des variations» donné à cette partie de l'analyse.



Voici d'abord quelques problèmes voisins :

- pour trouver le plus court chemin joignant A à B , il suffit de trouver l'aire minimum sous la courbe, soit à trouver le minimum de l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \text{ avec les conditions } y(a) = a' \text{ et } y(b) = b'$$

- pour trouver la courbe joignant A et B qui donne la surface, de révolution autour de l'axe des x , d'aire minimum il suffit de trouver le minimum de

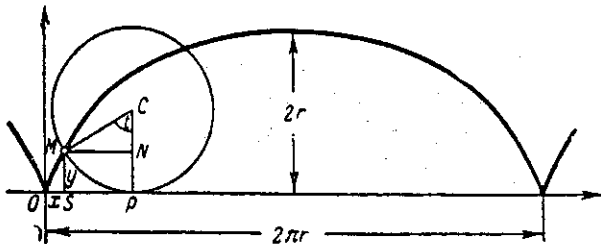
$$\int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx \text{ avec les mêmes conditions que ci-dessus.}$$

- trouver enfin la courbe qui amène le plus vite en bas du toboggan revient à minimiser une intégrale.

Vitesse instantanée v , temps t et distance parcourue sont liés par la relation $v = ds/dt$. La vitesse est donnée en fonction de la hauteur par $v = \sqrt{2gy}$, g étant bien sûr, l'accélération de la pesanteur.

Comme ds est égal à $\sqrt{1+y'^2}dx$, le temps mis par la bille est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$



Construction d'une cycloïde

La solution est un arc de cycloïde

Voyons encore d'autres problèmes du même genre :

- résoudre le problème des isopérimètres revient à «maximiser» l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_t^{t'} (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) dt$$

sous la condition :

$$\int_t^{t'} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$$

reste constante.

- trouver les géodésiques (courbes de plus courte distance) sur une surface $S(x, y, z) = 0$ revient à «minimiser» l'intégrale

$$\int_t^{t'} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt$$

Dans les trois premiers exemples, le problème consiste à trouver les valeurs stationnaires y de

$$\int_a^b f(x, y, y') dx = 0.$$

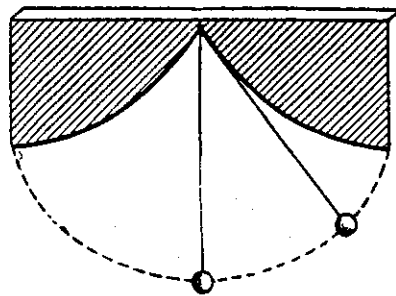
Il arrive que des fonctions $y(x)$ satisfassent l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(qui est analogue à la condition $d[g(x)]/dx = 0$, satisfaite par une solution x pour laquelle la fonction g a une valeur stationnaire).

Dans les autres exemples les valeurs stationnaires doivent satisfaire des changements appropriés de cette équation.

«Le calcul des variations a été l'une des branches majeures de l'analyse pendant plus de deux siècles. C'est un puissant outil qui peut être utilisé dans une grande variété de problèmes en mathématique pure. Il peut être aussi utilisé pour exprimer les principes de base de la physique mathématique dans les formes les plus simples et les plus élégantes.» (Simmons in Differential equations. MacGraw-Hill, 1972).



Pendule cycloïdal

L'analyse mathématique est le domaine du calcul de limite et de l'approximation. Elle est issue du calcul infinitésimal qui permet l'étude des phénomènes en évolution et leur traduction en lois physiques.

Né du travail de Newton et Leibniz au XVII^{ème} siècle, le calcul infinitésimal sera développé au XVIII^{ème}, par Euler et Lagrange, pour décrire les phénomènes physiques.

Au XIX^{ème}, ce sera le développement des équations aux dérivées partielles (propagation de la lumière, des ondes électromagnétiques, de la chaleur, ...).

Ces méthodes d'approximations, utilisées dans des espaces de dimension infinie (espaces de Hilbert) sont actuellement utilisées, par exemple, dans le contrôle des phénomènes instables.

M.D.

Petite bibliographie :

- Petite encyclopédie des Maths - Didier ed. 1980 p. 761.
- Bulletin APM n° 353. Avril 86 - Page 248 à 252 (Tonton Lulu), ou «Comment réussir le triangle quelconque» Cedic - Belin 86.

AU RYTHME DES ALGORITHMES

Rubrique
itérative



bas l'impérialisme de l'itératif !
Place au récursif !!!

Il s'agit bien d'une fronde contre le titre qualificatif de cette rubrique, contre le titre de ce numéro contre tous ces algorithmes itératifs qui risquent de nous enfermer dans une seule vision des choses :

l'itération est une démarche constructive qui part du connu (données initiales) pour aller vers l'inconnu (le résultat que l'on cherche). D'une certaine manière, on est assez proche des raisonnements inductifs (il serait intéressant de bien distinguer l'une et l'autre démarche et leurs inter-actions dans quelques situations typiques qu'il faudrait produire).

En revanche la récursion part de l'inconnu pour aller au connu en réduisant le problème, c'est l'analyse récurrente qui consiste :

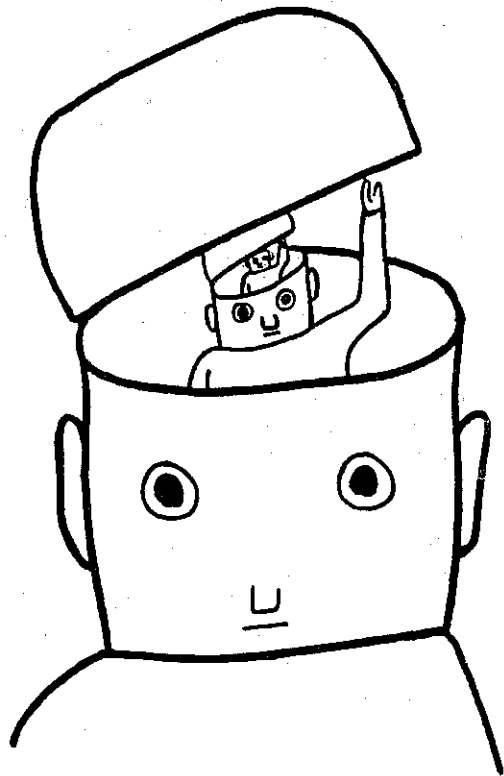
- à repérer l'information par son **type** et sa **taille**
- à la formaliser en montrant les aspects qualitatifs (type-propriété) et quantitatifs (taille),
- à faire apparaître un «découpage» de cette information (séquentialité) qui correspond à la réduction du problème en conservant le type et en réduisant la taille.

L'exemple classique de la factorielle permet de mettre en évidence le type : produit d'entiers consécutifs à partir de 1, et la taille n (pour n !). La séquentialité et la réduction du problème apparaissent avec l'écriture :

$$n! = (n - 1)! \times n$$

Connaître la factorielle de n revient donc à connaître la factorielle de n-1. La difficulté avec cette analyse récurrente (comme d'ailleurs avec la mise en évidence de la formule d'itération) est de bien concevoir ce passage comme une démarche générique qui engendre un processus qui ne prendra fin que lorsqu'on arrivera à quelque chose de connu (on rappelle qu'une démarche récursive conduit de l'inconnu au connu).

Pour cet exemple le connu peut être 1 ! (ce peut être aussi 10 ! si vous connaissez ce résultat et aussi les précédents car vous ne pourrez calculer n !, que pour n > 10).



On écrira donc la procédure récursive suivante :

RECURSIF

Fact : (naturel n) → (naturel)

choix :

| n = 1 → 1 cas connu
| n ≠ 1 → [Factoriel (n - 1)] * n cas inconnu

Fin choix

Fin fact.

La démarche itérative conduit à l'algorithme suivant

ITERATIF

```
Factoriel (naturel n) → (naturel)
  F ← 1
  x ← 1
  TANT QUE (x < n) FAIRE (x ← x + 1 ; F ← F * x)
  FIN TANT QUE
  → F
Fin factoriel
```

On peut améliorer ce programme pour avoir une seule variable F.

Ici, il est plus important de noter que la forme itérative permet de bien mettre en évidence l'algorithme de calcul :

La lecture d'une écriture itérative est donc «proche» du traitement que l'on effectue (en particulier on peut facilement utiliser une calculette - programmable ou non -).

En revanche la forme **réursive** est plus nettement **déclarative** et il est plus difficile de lui associer «spontanément» un traitement. Dans ses travaux didactiques sur la récursivité André ROUCHIER pose le problème en ces termes : comment passer de l'analyse de la situation (la factorielle pour notre exemple) qui repose sur un traitement de forme **conjonctive** (pour avoir Fact... 10 il faut avoir la suite ordonnée des antécédents Fact 9 et Fact 8 et ... et Fact 1) à l'écriture du programme de forme **disjonctive** :

$n = 1$ (on donne Fact 1) ou $n \neq 1$ (on calcule avec Fact $n-1$)?

D'autre part, les programmes récursifs nécessitent des langages souvent complexes permettant le traitement de piles, ils sont parfois plus lents à l'emploi (avec du petit matériel (logo M05) on constate nettement un temps d'attente correspondant à l'empilage de n jusqu'à 1).

Pour ces raisons, certains pensent que les démarches itératives plus rapides d'emploi et plus faciles à comprendre (en particulier pour les élèves) sont mieux adaptées à l'enseignement.

Il convient de rester prudent alors que la didactique de l'informatique commence à produire ses premiers travaux, alors que le «déclaratif» semble prendre une place déterminante dans le monde informatique (de multiplan aux systèmes-experts).

D'autre part, d'un point de vue plus cognitif, les heuristiques font apparaître des interactions constantes entre :

connu → inconnu : démarche ascendante,
inconnu → connu : démarche descendante

en particulier dans les démonstrations. Ces distinctions sont d'ailleurs souvent étrangères à la recherche des problèmes et n'apparaissent que dans la formulation (ou la formalisation) des solutions. On montre en particulier qu'il y a équivalence entre itération et récursivité avec appel récursif terminal (nous reviendrons sur ce problème on peut déjà se reporter à [1] ou [2], la distinction itératif-algorithmique / récursif-déclaratif demeure toutefois).

Enfin, signalons que la démarche récursive est moins étrangère aux enfants qu'on veut bien le croire (voir [3]) et qu'elle prend tout son sens quand on a à traiter

des problèmes un peu complexes qui conduisent à un appel récursif non terminal (on met des actions en réserve dans une pile qui seront traitées par la suite au dépilage) ou qui nécessitent à plusieurs appels récursifs : on peut citer les constructions fractales dont voici un exemple (facilement programmable en logo)

```
POLYFRACTAL (nombre de côté N, côté L) image fractale

choix : L < 5 → rien
        L ≥ 5 REPETE N [POLYFRACTAL (N ; L/2)
                        AVANCE L
                        TOURNEDROITE 360/N]
FIN CHOIX

FIN POLYFRACTAL
```

Le nombre d'appels récursifs varie avec la longueur L du côté de départ. Le fait de prendre 5 dans le test est lié au matériel (définition de l'écran) à l'image que l'on veut obtenir.

Pour terminer on peut reprendre l'approximation de $\sqrt[n]{A}$ proposée dans l'article «De Héron à Newton», en constatant qu'une analyse récurrente du calcul ne convient pas, en effet pour réduire le problème (type racine, taille n) il est nécessaire d'avoir $n = a \times b$ pour écrire $\sqrt[n]{A} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{A}}$

(avec $1 < a < n$ et $1 < b < n$).

Il faut donc connaître $\sqrt[n]{A}$ pour tout n premier !

Cela ne disqualifie pas pour autant la démarche récursive et permet d'insister sur le caractère itératif de l'approximation, le titre de ce numéro est donc bien justifié, un pléonasme en quelque sorte.

C'est tout pour aujourd'hui.

M.C.

Référence [1] : LUCAS - PEYRIN - SCHOLL Algorithmique et traitement des données - MASSON ed.

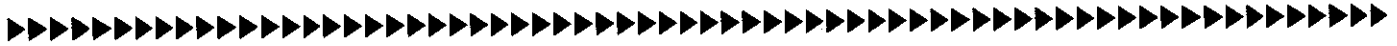
Référence [2] : Démarches algorithmiques en classe de mathématiques IREM Orléans.

Référence [3] : Piaget. Construction des raisonnements récurrentiels PUF. éd.

*"Aide toi
le ciel t'aidera"
Dieu serait-il récursif ?*

Pour le savoir,
lisez "Démarches algorithmiques
en informatique"
Pub n° 25 - Irem d'Orléans

PLOT MENINGES



OUR faire chercher les élèves et leurs profs, voici quelques petits problèmes proposés dans nos régionales. Notez le TOURNOI du LIMOUSIN qui propose une formule innovante où il n'y a pas que les profs qui posent des problèmes, les élèves aussi !

UN EXERCICE DE CALCUL

Serge Parpay - Niort

Les nombres a, a', b, b' peuvent être chacun soit $+1$ soit -1 .

Trouver le maximum de preuves montrant que $|ab - ab' + a'b + a'b'| = 2$.

En voici quelques-unes.

1 - Seize cas possibles. Pourquoi ? Comment les trouver ? Comment conduire les calculs ? Faut-il faire un tableau ? Et toujours $|A| = 2$.

2 - On a $A = a(b - b') + a'(b + b')$, alors :
 ou b et b' sont égaux, alors $b - b' = 0$ et $b + b' = 2b$ donc $A = 2a'b$ et $|A| = 2$,
 ou b et b' sont opposés, alors $b + b' = 0$ et $b - b' = 2b$, $A = 2ab$ et $|A| = 2$.

3 - Un et un seul des deux nombres $b - b'$ et $b + b'$ est nul.

En effet $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 1 - 1 = 0$ et $(b - b') + (b + b') = 2b (\neq 0)$.

Alors ou $b - b' = 0$ et... ou $b + b' = 0$ et..., on retrouve la discussion ci-dessus.

4 - On a $A = (a + a')(b + b') - 2ab'$. Alors, ou $a = a'$ et $b = b'$ alors $A = 2a \cdot 2b - 2ab = 2ab$ et $|A| = 2$, ou un des couples (a, a') et (b, b') est formé de deux valeurs opposées et l'une des deux sommes $a + a'$ et $b + b'$ est nulle, alors $A = -2ab'$ et $|A| = 2$.

5 - On a $A = a^2(b - b')^2 + a'^2(b + b')^2 + 2aa'(b - b')(b + b')$
 Mais $a^2 = a'^2 = 1$ et $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 0$
 donc $A^2 = (b - b')^2 + (b + b')^2 = 2(b^2 + b'^2) = 2(1 + 1)$
 soit $|A| = 2$.

Remarque : on peut même calculer A^2 directement à partir de la forme initiale, on retrouve facilement $A^2 = 4$.

Référence : Le cantique des cantiques. Ortoli et Pharabod. Ed. La Découverte. 1982. (Inégalités de Bell et expérience de M. Alain Aspect).



Cherche blonde, moins de quarante ans,...

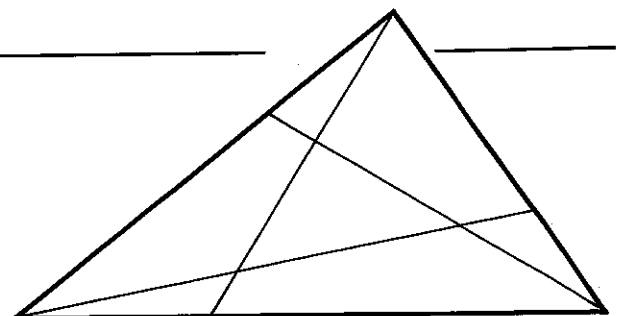
Bernard d'Espagnat parle des inégalités de Bell dans son livre «A la recherche du réel. Le regard d'un physicien» paru chez Gauthier-Villars en 82. En guise d'introduction à la présentation de ces inégalités, il cite (page 27 du livre) le théorème :

«Dans une population quelconque, le nombre de femmes de moins de quarante ans est inférieur ou égal au nombre de femmes qui fument augmenté des individus âgés de moins de quarante ans qui ne fument pas !»

C'est très facile à prouver. Sans faire de concurrence à A-Plot-strophe, inutile de dire que le livre de Bernard d'Espagnat est à lire (mais cela va mieux en le disant, ce qui est fait (et n'est plus à faire). La rédaction).

Dans la tempête de Bretagne. (Valabrègue - Loctudy).

Un triangle. Trois droites qui joignent les sommets aux points qui divisent les côtés dans le rapport $1/3$. Que dire de l'aire du triangle ainsi formé ?



LES VRAIES RACINES DU TRINOME

Bernard Revranche - Mandegault

Vous êtes élève de première ou terminale, vous voulez surprendre votre professeur de mathématique.

Demandez-lui de résoudre, dans R, l'équation $25x^2 - 70x + 38 = 0$.

Il lui faudra un certain temps, alors que votre calculatrice, munie du programme qui suit, affichera en quelques secondes de calcul, les deux solutions : $(7 + \sqrt{11})/5$ et $(7 - \sqrt{11})/5$.

Ce programme demande les trois coefficients entiers A, B, C du trinôme $Ax^2 + Bx + C$, et en donne les zéros exacts, réels ou complexes.

Toutes les simplifications sont effectuées ; ainsi :

$\sqrt{50}$ apparaît sous la forme $5\sqrt{2}$.

$(8 - i\sqrt{12})/2$ apparaît sous la forme $4 - i\sqrt{3}$.

La version qui suit, fonctionne sur une Sharp PC 1245. Pour qu'elle loge (de justesse !) dans la machine, il a fallu utiliser quelques astuces propres à cette calculatrice ; elles sont signalées dans l'explication du programme.

Commande de l'imprimante

```
2: PRINT = LPRINT
5: CLEAR : DIM B(7) :
  B(0)=4:B(1)=2:B(2)=4:B(3)=2
  B(4)=4:B(5)=6:B(6)=2:B(7)=6
10: INPUT "A=";A, "B=";B,
    "C=";C: IF A=0 THEN 10
```

Chargement du vecteur B(i)
i = 0 à 7. Ce vecteur sert à
générer les entiers supérieurs
à 7, non divisibles par 2, 3, 5.

Les coefficients de l'équation,
avec A non nul.

Au cours du déroulement du
programme, la variable chafne
Z\$ contient "i" ou est vide, la
variable T\$ contient "√" ou
est vide. Pour "vider" Z\$, on
peut sur le PC, poser Z=0.

```
20: Z = 0: T$ = "√"
30: B=B*SGN A:C=C*
    SGN A:A=ABS A
40: K = B : L = 2A
50: GOSUB "P.G.C.D."
60: E = L
70: D = BB - 4AC
```

On peut toujours choisir A > 0

La variable E contient le pgcd
de 2A et de |B|.

Si D=0, on écrit la racine
double avec le sous-
programme "Print 1".

Si D<0, alors on travaille
dans C; on met i dans Z\$.

```
80: IF D=0 THEN
  LET X = B/E: Y = 2A/E:
  GOSUB "PRINT 1":GOTO 10
90: IF D<0 THEN LET D=-D:
  Z$ = "I"
100: Q=√D:
  IF (INT Q=Q)*(Z$="I")
  THEN LET T=0: M=0:
  G=1: F=Q: GOTO 130
```

Le virus bien connu de la
trinômite (ici * peut être
omis -soi qui mal y pense)
(rappel des Plot précédents :
connaissez-vous :BB - 3AC ?)

Si -D est un carré, on vide T\$
et M\$ pour écrire les racines
sous la forme $(a \pm ib)/c$.

Si D est un carré, on écrit
les 2 racines rationnelles avec
le sous programme "Print 2".

```
110: IF INT Q=Q THEN LET
  X=-B+Q: Y=2A: W=-B-Q:
  U=2A:GOSUB "PRINT 2":
  GOTO 10
```

On sort les carrés de √D.
On a $\sqrt{D} = F\sqrt{G}$.

```
130: GOSUB "SLPF. √D"
140: K=E: L=F: IF G<>1
  THEN LET M$=STR$ G
150: GOSUB "P.G.C.D."
160: X=-B/L: Y=2A/L: F=F/L
```

Simplification éventuelle
de X, F, Y.

Ecriture des solutions.

```
170: GOSUB "PRINT 3"
180: GOTO 10
190: END
```

LES SOUS - PROGRAMMES

```
500: "P.G.C.D."
510: K = ABS K
520: R = K - L * INT (K/L)
   : IF R = 0 THEN RETURN
530: K = L: L = R: GOTO 520
540: *
```

```
600: "SLPF. √D"
610: F = 1: G = D
620: N = 2: GOSUB "DIVICAR"
   : IF V = 1 THEN RETURN
630: N = 3: GOSUB "DIVICAR"
   : IF V = 1 THEN RETURN
640: N = 5: GOSUB "DIVICAR"
   : IF V = 1 THEN RETURN
650: N = 7: GOSUB "DIVICAR"
   : IF V = 1 THEN RETURN
660: I = 0
670: IF I > 7 THEN LET I = 0
680: N = N + B(I)
690: GOSUB "DIVICAR"
   : IF V = 1 THEN RETURN
695: I = I + 1: GOTO 670
699: *
700: "DIVICAR"
710: IF NN > G THEN LET V = 1
   : RETURN
720: P = G/(NN): IF INT P = P
   THEN LET F = FN: G = P
   : GOTO 710
730: V = 0
740: RETURN
750: *
```

```
800: "PRINT 1"
810: IF Y = 1 THEN PRINT
   "X1 = X2 = "; STR$ X
   : RETURN
820: PRINT "X1 = X2 ="
   STR$ Y: RETURN
```

```
830: "PRINT 2"
840: K = X: L = Y
   : GOSUB "P.G.C.D."
   : X=X/L: Y=Y/L: K=W: L=U
   : GOSUB "P.G.C.D."
   : W=W/L: U=U/L
850: IF Y = 1 THEN PRINT
   "X1="; STR$ X: GOTO 870
860: PRINT "X1="; STR$ X;
   "/"; STR$ Y
880: PRINT "X2="; STR$ W;
   "/"; STR$ U: RETURN
```

1. Sous-programme PGCD
Il calcule le pgcd de K et L et l'inscrit dans L.

2. Sous-programme de simplification de √D.
Il donne √D sous la forme $F\sqrt{G}$ où G n'est pas divisible par un carré.

- de 610 à 660 on teste si N^2 divise D pour 2, 3, 5, 7; et, le cas échéant, pour N supérieur à 7 et non divisible par 2, 3, 5. On décrit, pour cela, les entiers de la forme $30.n + k$, où $k=1; 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.

- la variable V, "booléenne", provoque la fin du déroulement du sous-programme dès que la valeur prend la valeur 1.

3. Sous-programme d'écriture des solutions quand $D=0$.

4. Sous-programme d'écriture des solutions quand D est un carré.

- en 840, simplification des fractions.

- en 850 et 870, si le dénominateur est égal à 1, on n'écrit que le numérateur.

5. Sous-programme d'écriture des solutions quand $D < 0$ ou quand D n'est pas un carré.

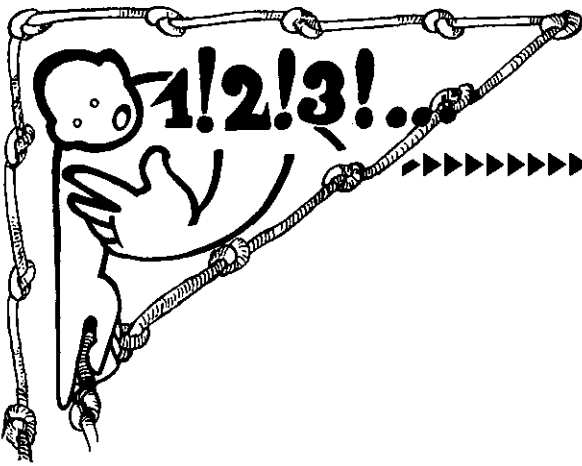
```
900: "PRINT 3"
   : J = (F=1)+2*(Y=1)+4*(X=0)
   : GOTO 910 + J
910: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
   "+"; Z$; STR$ F; T$; M$;
   ")"; STR$ Y:
   PRINT "X2 = ("; STR$ X;
   "-"; Z$; STR$ F; T$; M$;
   ")"; STR$ Y: RETURN
911: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
   "+"; Z$; T$; M$; ")"; STR$ Y
   : PRINT "X2 = ("; STR$ X;
   "-"; Z$; T$; M$; ")"; STR$ Y:
   RETURN
912: PRINT "X 1="; STR$ X;
   "+"; Z$; STR$ F T$; M$
   : PRINT "X2 ="; STR$ X;
   "-"; Z$; STR$ F; T$; M$:
   RETURN
913: PRINT "X1 ="; STR$ X;
   "+"; Z$; T$; M$
   : PRINT "X2 ="; STR$ X;
   "-"; Z$; T$; M$: RETURN
914: PRINT "X1 ="; Z$;
   STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
   : PRINT "X2 ="; Z$;
   STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
   : RETURN
915: PRINT "X1 ="; Z$; T$;
   M$; "/"; STR$ Y
   : PRINT "X2 ="; Z$; T$;
   M$; "/"; STR$ Y
   : RETURN
916: PRINT "X1="; Z$;
   STR$ F; T$; M$
   : PRINT "X2="; Z$;
   STR$ F; T$; M$
   : RETURN
917: PRINT "X1="; Z$; T$; M$
   : PRINT "X2="; Z$; T$; M$
   : RETURN
```

.En 900, aiguillage

.La variable J prend les valeurs entières de 0 à 7 suivant que :

- le dénominateur Y = 1 ou non
- le facteur F = 1 ou non,
- le terme $x = 0$ ou non

LE TOURNOI DU LIMOUSIN



LE TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN a été organisé en 1987, sous la présidence d'honneur de Monsieur le Recteur de l'Académie de Limoges pour les élèves de toutes Premières et de toutes Terminales de l'Académie par :

- la Régionale Apmep et l'Irem de Limoges
- le Département de Mathématiques de l'U.F.R. des Sciences de Limoges.
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'Académie.

Les objectifs déclarés de ce 1^{er} tournoi étaient :

- développer chez les élèves le goût de la recherche
- éviter l'élitisme
- faire participer un maximum de jeunes
- juger, plus que leur niveau, l'aptitude des jeunes à s'adapter à une situation nouvelle.

Ces objectifs sont ceux que l'A.P.M. veut mettre en avant et notre Régionale est donc une composante naturelle de ce tournoi.

A l'issue de cette première expérience, nous nous félicitons d'avoir été partie prenante dès le départ. Non seulement nous pensons que les objectifs ont été atteints mais qu'en intéressant pendant 4 heures, un mercredi après midi, sur un même sujet, plus de 800 élèves de premières et de terminales de toutes origines, de toutes sections, de toute formation scientifique ou littéraire, technologique ou économique, nous avons montré qu'il n'y a pas qu'une seule façon de faire des maths. Que de chercher, d'imaginer, de trouver n'est pas le privilège des « forts en maths », que plusieurs voies possibles mènent à la découverte et aux mathématiques.

La recherche des lots, confiée à une équipe particulièrement dynamique a permis, par une rencontre originale avec les entreprises, de faire connaître notre enseignement à un large public et de promouvoir notre discipline auprès d'organismes publics et privés.

Pour attribuer les différentes récompenses nous avons voulu éviter toute idée de classement et encourager un maximum de jeunes qui avaient participé et trouvé (même partiellement).

Mais là où réside, nous semble-t-il, la plus grande originalité des récompenses c'est dans leur nature même : prix tournés vers la vie active, ouverts sur le monde du travail (visite d'une centrale hydroélectrique de l'EDF ; aller-retour à Paris dans la cabine du conducteur du Capitole ; une journée à la Météorologie, à Radio France, à FR3, une nuit dans les locaux des journaux régionaux, une visite de librairie, etc...).

Nous joignons les textes des exercices proposés et des éléments de correction (si vous trouvez pour le carré mieux que 6 cercles...).

Une grande fête des mathématiques avec remise des prix, vin d'honneur, a cloturé dans la joie ce 1^{er} tournoi.

La presse, la radio et la télévision locales ont largement rendu compte de cette manifestation.

Nous voici prêts à recommencer et à recevoir de tous, conseils, critiques et... encouragements.

Les organisateurs du Tournoi

Tournoi mathématique du Limousin 1987

Quelques recommandations

Voici le sujet proposé pour le premier Tournoi Mathématique du Limousin. Vous travaillez, peut-être à plusieurs dans une même salle. Pensez à respecter le travail de vos camarades. Vous pouvez parler avec votre équipier mais... en silence !

Pour chacun des 3 textes composant le sujet, vous ne devez pas hésiter à proposer :

- plusieurs démonstrations, éventuellement...
- des solutions partielles
- des prolongements
- de nouvelles questions, même si vous n'y répondez pas...

Par exemple : pour le texte n° 2, vous pouvez envisager d'autres configurations de points...

Bref, place à votre imagination créatrice, aux idées même insolites et au plaisir de chercher.

Chaque équipe ne remet qu'une copie. N'oubliez pas de mettre les noms des équipiers en tête de la copie ainsi que : classe, section et établissement.

BONNE CHANCE

à tous les chevaliers du Tournoi 1987 !

Sujet du Tournoi

Texte n° 1

Un tournoi de tennis oppose 1987 joueurs numérotés de 1 à 1987. A chaque tour, on oppose les joueurs restants deux par deux dans l'ordre de leurs numéros ; si le nombre de joueurs qualifiés est impair, le dernier est automatiquement qualifié pour le tour suivant (ainsi le premier tour est composé des matches 1-2, 3-4, ..., 1985-1986 et le joueur 1987 est qualifié pour le deuxième tour).

Combien de matches auront été joués au cours de ce tournoi ?

Texte n° 2

Dans le plan, pouvez-vous contruire, avec le compas seulement, 4 points situés :

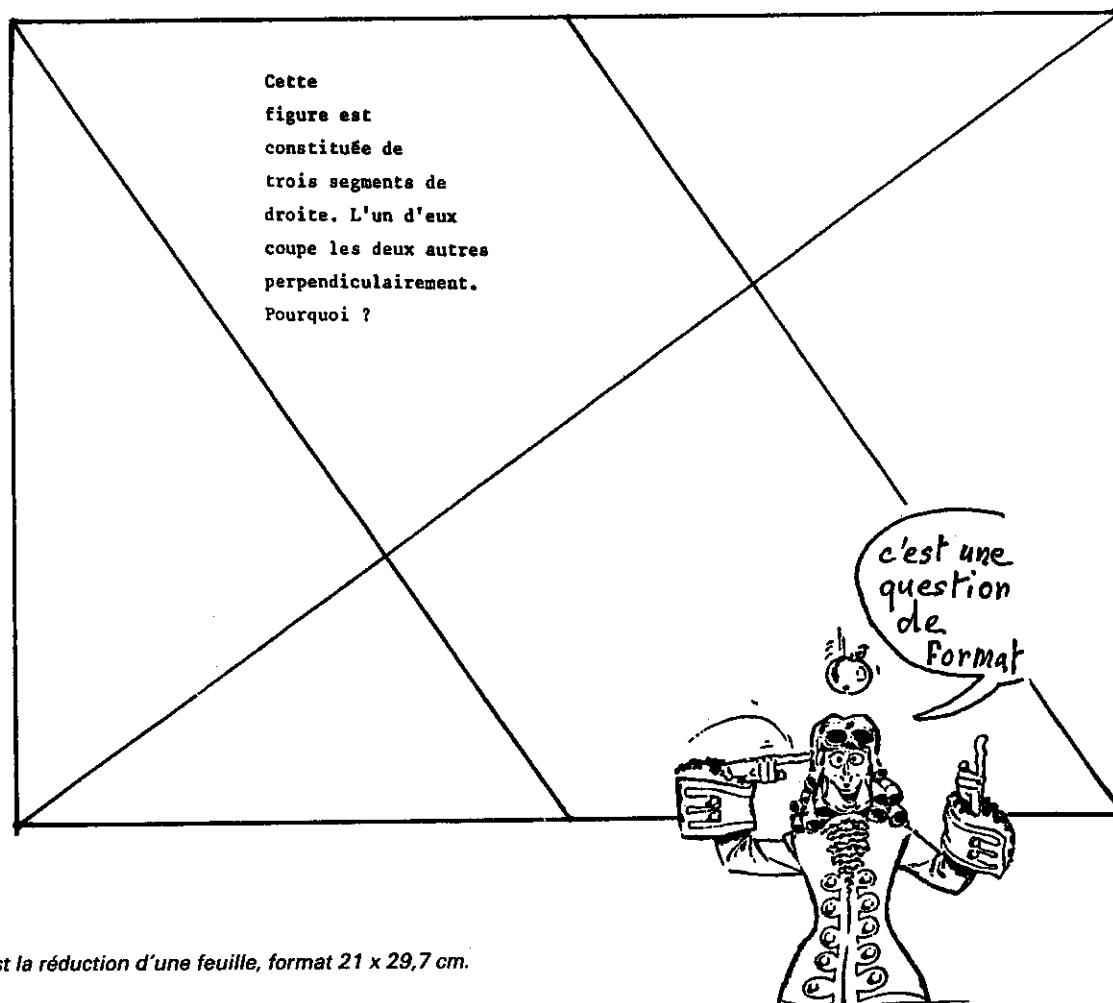
- aux sommets d'un losange
- aux sommets d'un rectangle
- aux sommets d'un carré.

Pensez à justifier vos constructions !

Texte n° 3

Voir dessin ci-dessous.

Le plus grand des 3 segments est une diagonale de la feuille, les 2 autres joignent un coin de la feuille au milieu du bord !



Le journal PLOT - ABONNEMENTS - Tarifs 1988

Avec réduction
si vous vous abonnez pour 2 ans ou +

Nom et prénom ou établissement _____
 Adresse complète _____
 Code postal et ville _____

Pour les 4 numéros de :
 1983 1987
 1984 1988
 1985 1989
 1986 1990

Ecole élémentaire Collège Lycée Supérieur Autre

payé par chèque

désire facture

nouvel abonné

Tarif normal
et établissement

Membre
Apmep

Supplément
tarif avion

Pour un an

Par année
supplémentaire

100 F

80 F

+ 40 F

Total à payer

+ 75 F

+ 60 F

+ 40 F

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X

Les Dossiers et Matériels du PLOT - Tarifs 88 -

REDUCTIONS 10% pour les abonnés au Plot 10% pour plus de 500 F d'achat

Nom : _____

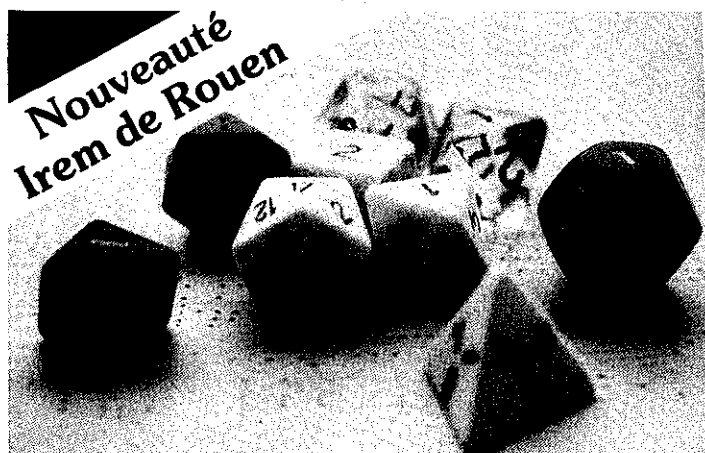
Adresse : _____

Prix unitaire - Port compris

	Matériel (Nombre)	Dossier (Nombre)	Coût Total
40 F	Polyèdres n° 1 - Dossier technique		
40 F	Polyèdres n° 2 - Dossier pédagogique*		
40 F	Aléatoire		
40 F	Papiers accrochés		
40 F	Pliages et mathématiques		
40 F	Espaces, pavages et symétries (à paraître)		
80 F	Dossier "Spécial π " (300 p. Adcs)		
20 F	Les Dossiers "Ludi-Math" (Poitiers)	n° 1	
40 F		n° 3	n° 4
50 F	Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique		
10 F	Affiches pour la classe : "Horizons Mathématiques"	<input type="checkbox"/>	
	"Polyèdres dans l'espace"	<input type="checkbox"/>	
	60 x 40 cm "l'Univers mathématique"	<input type="checkbox"/>	
40 F	Pochettes pour rétroprojecteur - n°s 1 à 14	n°	
80 F	Pochettes de diapositives - n°s 2 à 6 (n° 1 : 100 F)		n°
Frais d'envoi forfaitaire :		15 F	
sous-total			
- 10% pour les abonnés au PLOT			
- 10% pour plus de 500 F d'achat			
TOTAL à Payer			

* Plot n° 39 ou Géométrie dédéeiste (Rouen)

Règlement à envoyer à l'APMEP Orléans-Tours - BP 6759, 45067 Orléans-Cedex 2 - CCP La Source 144009X



PETITE GEOMETRIE DEDEISTE